

# Zadania

**1** Dvaja malí uvreštaní fyzici sa na pieskovisku chvastajú, či veľký brat vie behať rýchlejšie. Po urputnej výmene názorov, podporenej údermi lopatkou a nervydrásajúcim škriekanim, sa rýchlosti ustanovili nasledovne: Miškov veľký brat prebehne pol femtoparseku za nanostoročie a Jurkov 25 pikoastronomických jednotiek za mikrotýždeň. Čí brat je rýchlejší a o koľko nanošestonedelí prebehne pomalšieho na dráhe dlhej 3 svetelné mikrosekundy?

*Uznané budú výsledky líšiace sa od správnej hodnoty o menej ako 2 %.*

**2** Enke po zaváraní kompótov zvýšilo 20 gramov 80 % roztoku a 80 gramov 20 % roztoku cukrovej vody. Koľko hmotnostných percent bude mať výsledný roztok, keď oba roztoky zleje dokopy?

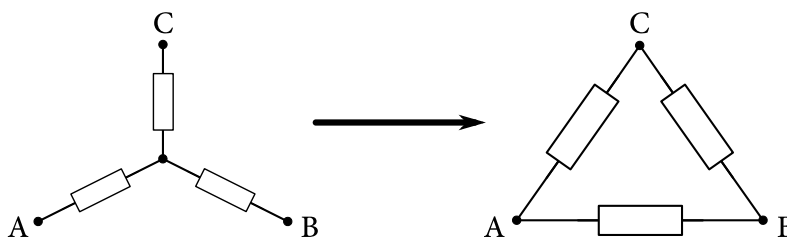
**3** Peter, Pavel a Arthur sa rozhodli zmerať si sily v šprinte na 100 m. Všetci bežia konštantnou rýchlosťou. V momente, keď Arthur pretne cieľovú pásku, Pavlovi zostáva ešte 20 m do cieľa a keď Pavel prebehne cieľom, Petrovi chýba do cieľa tiež ešte 20 m. Ako ďaleko od cieľa bol Peter, keď Arthur pretol cieľovú pásku?

**4** Do prázdneho pohára v tvare valca s polomerom  $R$  vložíme kocku ľadu so stranou  $a$  a s hustotou  $\rho_i$ . Ľad sa začne topiť na vodu s hustotou  $\rho_w > \rho_i$ . Do akej najväčšej výšky vystúpi hladina počas topenia kocky?

**5** Juro bol na rybačke. Na udici sa mu znenazdajky ocitol sumec s hmotnosťou  $m$ . Keď Juro potiahol silou  $F$ , sumec sa začal pohybovať zvislo nahor so zrýchlením  $a$ . Následne sa Juro, povzbudený týmto úspechom, pochlapil a potiahol silou  $2F$ . S akým zrýchlením sa pohyboval sumec potom? Predpokladajte, že sumec na život už rezignoval a nekládol žiaden odpor. Hustota sumca je mierne odlišná od hustoty vody. V oboch prípadoch je sumec stále pod vodou.

*Odpor vody neuvažujte. Výsledok vyjadrite výlučne pomocou veličín uvedených v zadaní.*

**6** Na obrázku máme tri neznáme rezistory zapojené do tvaru hviezdy. Keď zapojíme ohmmeter ku každej dvojici vrcholov (A–B, A–C, B–C), nameriame postupne odpory  $24 \Omega$ ,  $48 \Omega$ ,  $56 \Omega$ . Aké tri výsledné odpory by sme namerali, keby sme rezistory zapojili do tvaru trojuholníka?



**7** Žabu 23. septembra okradli, a tak musel spať v New Yorku v Central Parku na lavičke. Bola tma, vybil sa mu notebook a mobil a cnelo sa mu za slnečnými lúčmi. Kríza nastala o polnoci miestneho času. Začal premýšľať, ako ďaleko je najbližšie miesto na Zemi, odkiaľ by mohol uvidieť slnečný svit. Ozaj, ako ďaleko? New York sa nachádza na  $40^\circ$  severnej zemepisnej šírky.

*Počítajte oblúkovú vzdialenosť po povrchu Zeme. Slnko môžete považovať za bodový zdroj v prakticky nekonečnej vzdialenosti. Výsledok zaokrúhlite na desiatky km.*

**8** Jaro sa rozhodol pre filmovú kariéru. Po natáčaní policajnej naháňačky mestom však zostal sklamaný. Tešil sa, že sa preženie mestom závratnou rýchlosťou. Miesto toho sa však celá scéna natáčala pri rýchlosti 50 km/h. Na dosiahnutie zdanlivej rýchlosti 160 km/h na filmovom plátne sa film premietal vyššou snímkovacou frekvenciou, než akou bol natočený. Na zábere sa však náhodou ocitol aj kvetináč, ktorý vypadol z okna. Aké zdanlivé tiažové zrýchlenie naň vo filme pôsobí?

Výsledok uveďte v násobkoch  $g$ .

**9** Maťo z dlhej chvíle spúšťal po naklonenej rovine kameň. Aký uhol má zvierat rovina so zemou, aby pri pohľade zhora pozoroval čo najväčšie zrýchlenie? Predpokladajte, že kameň sa pohybuje bez trenia.

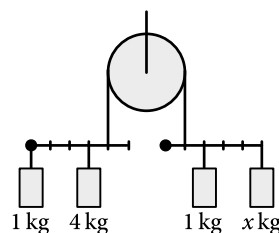
**10** Matúš je starý nezbedník. Minule našiel ideálny konár tvaru „Y“, z ktorého si zostrojil jednoduchý prak. Chcel ho otestovať, a tak začal hľadať vhodný cieľ. Vytipoval si vrabca, ktorý letel okolo neho konštantnou rýchlosťou vo vodorovnom smere. Matúš naň vystrelil kameň rýchlosťou  $v = 40$  m/s. Počas letu nahor kameň vrabca tesne minul, avšak zasiahol ho cestou nadol. Ako rýchlo letel vrabec, ak kameň dosiahol počas svojho letu maximálnu výšku  $H = 20$  m? Odpor vzduchu neuvažujte.

**11** Adam zbadal na stole prázdnu škatuľu od sójového mlieka so štvorcovou podstavou hrany  $a$ , výškou  $h$  a hmotnosťou  $m$ . Začal ju posúvať konštantnou rýchlosťou po stole tak, že v istej výške do nej tlačil prstom. Po krátkej chvíli prišiel na to, že ak tlačí škatuľu dostatočne vysoko, prevráti sa. Ako najvyššie môže tlačiť, aby sa škatuľka ešte neprevrátila? Koeficient šmykového trenia medzi škatuľou a stolom je  $f$ .

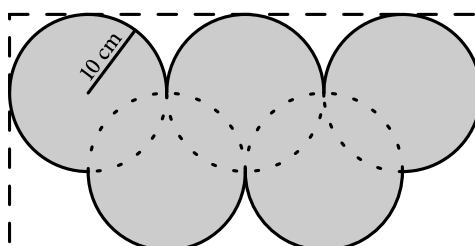
**12** Lukaf sa vybral na potulky po Nórsku. Práve na pravé poludnie 21. decembra sa ocitol na polárnej kružnici. Slnko lenivo svietilo kdesi na južnom obzore. Lukaf si všimol, že vrchol kopca, nachádzajúceho sa od neho vo vzdialenosti 150 km po povrchu Zeme smerom na sever, bol len tesne osvetlený. Aký vysoký je kopec?

Odovzdajte výsledok zaokrúhlený na celé metre.

**13** Nájdite v nasledovnej sústave kladiek a pák hmotnosť  $x$  tak, aby bola sústava v rovnováhe. Krúžky predstavujúce body otáčania pák sú upevnené na stene. Naznačené dieliky majú rovnakú veľkosť.



**14** Fero sa už nevie dočkať nastávajúcích olympijských hier v Pchjongčchangu. V rámci príprav si z plechového obdĺžnika s rozmermi 60 cm  $\times$  30 cm vystrihol olympijské kruhy ako na obrázku. Aká je vzdialenosť ťažiska kruhov od stredu pôvodného obdĺžnika?



**15** Plyn A sa vie premeniť na plyn B podľa reakcie  $A \leftrightarrow B$ . Rýchlosť premeny plynu A na plyn B je daná rovnicou

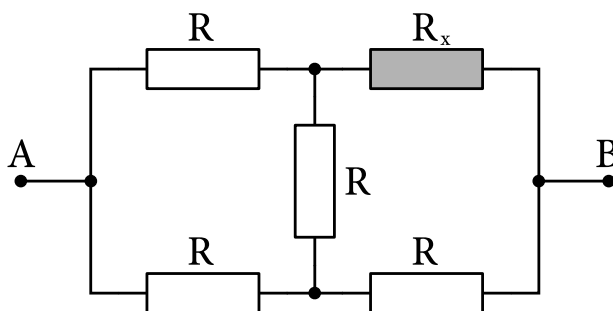
$$v = \frac{\Delta n(A)}{\Delta t} = -k_A n(A),$$

kde  $n(A)$  je látkové množstvo plynu A v nádobe a  $k_A$  je rýchlostná konštanta tejto reakcie. Rýchlosť premeny plynu B na A je daná analogickou rovnicou s rýchlostnou konštantou  $k_B$ . Do nádoby sme vložili  $n_0$  mólov plynu A a nechali sme ustáliť rovnováhu medzi plynmi A a B. Aké látkové množstvo plynu B bude v nádobe po ustálení rovnováhy?

**16** Po rovnjej ceste ide červené auto rýchlosťou  $v$ . Po druhej ceste, kolmej na prvú, ide modré auto rýchlosťou  $w$ . V okamihu, keď modré auto prechádza križovatkou týchto dvoch ciest, je červené auto ešte len vo vzdialenosti  $d$  pred ňou. Aká bude minimálna vzdialenosť áut počas ich celého pohybu?

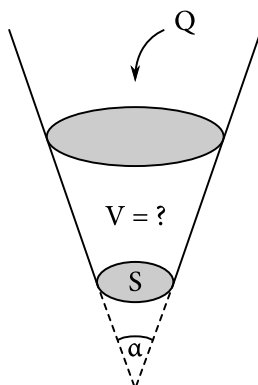
**17** Namakaný požiarnik Fero zlaňuje z vysokej budovy. Na lane istej dĺžky sa vie nohami odraziť do maximálnej vodorovnej vzdialenosti 4 metre od budovy. Keď odvinie lano do dvojnásobnej dĺžky, vie sa odraziť do vzdialenosti 6 metrov. Ako ďaleko sa bude vedieť odraziť na lane desaťnásobnej dĺžky?

**18** Do schémy na obrázku vkladáme na miesto rezistora  $R_x$  rezistory s ľubovoľnou hodnotou a meriame celkový odpor medzi bodmi A a B. Aká bude minimálna a maximálna hodnota celkového odporu, ak ostatné rezistory v schéme majú odpor  $R$ ?

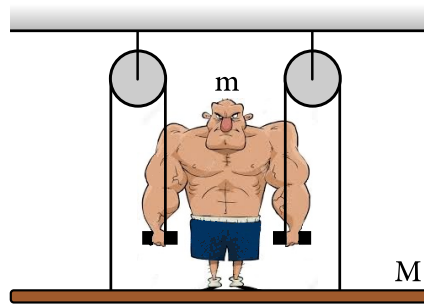


**19** Lievik v tvare zrezaného kužeľa s vrcholovým uhlom  $\alpha = 2 \arctan \frac{1}{2}$  má naspodku kruhový otvor s plochou  $S = \pi \text{ mm}^2$ . Lejeme doň vodu s objemovým prietokom  $Q = 2\pi \text{ ml/s}$ . Aký bude ustálený objem vody  $V$  v lieviku? Zaokrúhlite objem na ml.

*Efekty spôsobené povrchovým napätím a rýchlosť pohybu vody na hladine môžete pokojne zanedbať.*

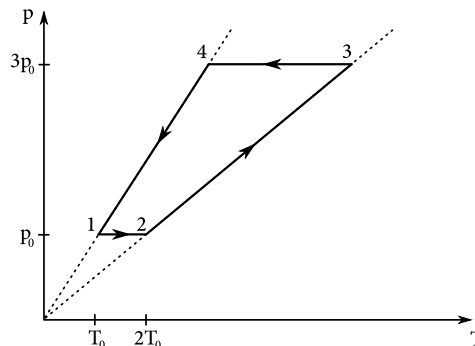


**20** Silák Patricius Ozrutný má hmotnosť  $m$ . Dnes chce v cirkuse predviesť, ako sa iba pomocou kladiek zdvihne spolu s plošinou hmotnosti  $M < m$ , na ktorej stojí. Akou silou musí ťahať za každé lano, aby sa mu to podarilo?

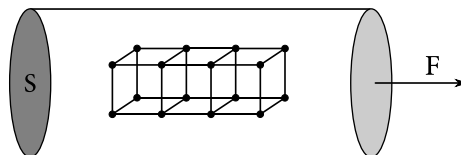


**21** Máme kovovú tehlu s rozmermi  $a \times b \times c$ . Ak ju zovrieme medzi dve dokonale vodivé platne tak, že sa protiľahlé steny dotýkajú platní, postupne nameriame odpory  $12 \Omega$ ,  $27 \Omega$  a  $75 \Omega$ . Aký odpor bude mať najväčšia kocka, akú môžeme vyrezať z tejto tehly, keď ju zovrieme medzi platne?

**22** S ideálnym plynom s počiatočným tlakom  $p_0$ , objemom  $V_0$  a teplotou  $T_0$  sa uskutočnil kruhový dej zobrazený v  $pT$ -diagrame. Prekreslite tento dej do  $VT$ -diagramu. Množstvo pracovného plynu sa počas deja nemenilo. Nezabudnite na osiach vyznačiť všetky podstatné hodnoty.



**23** Kovový prvok má hustotu  $\rho$ , Youngov modul pružnosti  $E$ , mólovú hmotnosť  $M$  a kryštalizuje v kubickej mriežke. Z tohoto kovu sme vyrobili valcovú tyč s prierezom  $S$  tak, že os tyče je kolmá na jednu zo stien kociek mriežky. Tyč sme položili na vodorovný stôl, jeden jej koniec sme upevnili a na druhý koniec sme zapôsobili silou  $F$ . O koľko sa zmenili medziatómové vzdialenosti v materiáli v smere osi tyče?

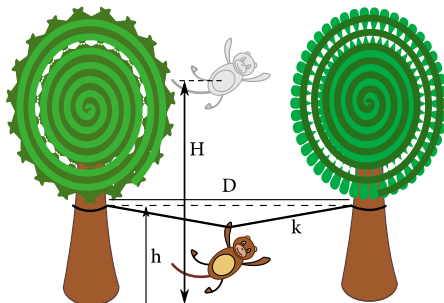


**24** Enka cestuje nočným vlakom. Cez okno na ľavej strane vidí Mesiac, na pravej strane zasa pouličnú lampu. Okná však určitú časť svetla odrážajú, takže na ľavej strane vidí aj zrkadlový odraz lampy a na pravej zase odraz Mesiaca. Žiadne ďalšie odrazy neuvažujte.

Na ľavej strane sa jej Mesiac zdá šesťkrát jasnejší ako odraz lampy, na pravej je zas lampa o polovicu jasnejšia ako odraz Mesiaca. Aký by bol pomer jasností lampy a Mesiaca, ak by v oknách nebolo žiadne sklo? Sklo prepustí 50 % svetla a nejakú časť svetla absorbuje.

**25** Brazílski domorodci si vyrobili šnúru na sušenie bedrových pásov. Zobrali dve veľmi ľahké a pružné liany nulovej pokojovej dĺžky a tuhosti  $k$  a zviazali ich. Šnúru natiahli vo výške  $h$  medzi dvoma stromami, ktoré sú od seba vzdialené  $D$ .

Na šnúru skočila z výšky  $H$  nad zemou drzá opica s hmotnosťou  $M$  a zachytila sa stredú lana. V akej výške nad zemou zastane opica, keď sa šnúra maximálne natiahne?



**26** Na stene visia nehmotné kruhové hodiny polomeru  $r$  upevnené klincom navrchu a v strede. Na ozvláštnenie zavesíme na hodiny dvanásť bodových závaží tak, že na  $k$ -tu hodinu zavesíme závažie hmotnosti  $km$ . Pod takýmto nesmiernym náporom vrchný kliniec nevydrží a hodiny sa začnú otáčať. Aké bude ich počiatočné uhlové zrýchlenie?

**27** Kubo bol na leteckej exhibícii. Akrobatický pilot v rámci svojho vystúpenia pri prelete tesne ponad divákov vypeckoval reproduktory umiestnené na vonkajšej strane lietadla a zhodou okolností pustil Kubovu obľúbenú pieseň. Tón, o ktorom Kubo vedel, že má frekvenciu  $f$ , počul pri približovaní lietadla o pol oktávy vyšší, t. j. s  $\sqrt{2}$ -krát vyššou frekvenciou. S akou frekvenciou počul tento tón, keď sa lietadlo začalo vzdalovať?

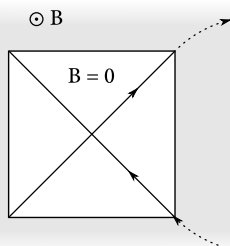
**28** Jožko si ľahol na dno bazéna. Jeho oči sú teraz v hĺbke 2 m pod hladinou a 2 m od okraja bazéna. Hneď na okraji bazéna stojí 2 m vysoký Adam, pričom nohy má na úrovni hladiny. Aký vysoký sa zdá byť Jožkovi, ak je index lomu vody  $n = 1,33$ ?

*Táto úloha nemá analytické riešenie. Odporúčame použiť kalkulačku. Všetky medzivýsledky aj výsledok zaokrúhľujte s presnosťou na aspoň dve desatinné miesta.*

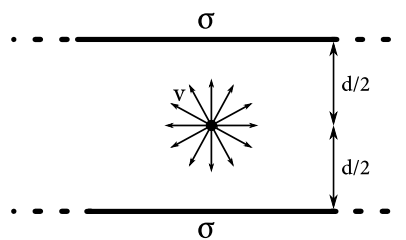
**29** Bežná stowattová žiarovka vyžiari vo viditeľnom svetle iba asi 4 % svojho výkonu. Jano takúto žiarovku dokáže v noci zbadáť na maximálnu vzdialenosť 100 km. Koľko parsekov by musel odletieť od Slnka, aby ho nevidel, ak Slnko vyžaruje 36 % energie vo forme viditeľného svetla?

*Výsledok zaokrúhľte na celé parseky.*

**30** V homogénnom magnetickom poli  $B$  je diera so štvorcovým prierezom (v smere kolmom na pole), v ktorej je pole nulové. Po jej uhlopriečke preletí častica s nábojom  $Q$  za čas  $t$  a po krátkej exkurzii v magnetickom poli preletí aj po druhej uhlopriečke. Aká je jej hmotnosť?

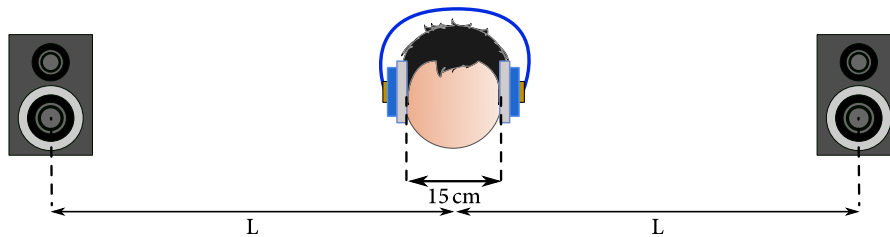


- 31** Vladko má na hlave svoju obľúbenú blšku hmotnosti  $m$ . Chce sa ísť povoziť na reťazovom kolotoči s reťazou dĺžky  $L$  uchytenou vo vzdialenosti  $r$  od osi otáčania. Akou najväčšou uhlovou rýchlosťou sa môže kolotoč otáčať, aby blška určite neodletela bez ohľadu na jej konkrétnu polohu na hlave, ak sa vie držať silou  $F$ ?
- 32** Drzá opica zožrala také množstvo banánov, že je teraz nebezpečné sa k nej priblížiť. Jej aktivita dosahuje  $10^8$  Bq! Priemerný banán dlhý 20 cm totiž obsahuje  $60 \mu\text{g}$  rádioaktívneho draslíka  $^{40}\text{K}$  s polčasom rozpadu 1,25 miliardy rokov. Koľko metrov banánu za sekundu musí teraz zjesť, aby si túto nebezpečnú aktivitu udržala?
- 33** Máme zdroj protónov s nábojom  $+e$  medzi dvomi nekonečnými rovnako kladne nabitými platňami s plošnou hustotou náboja  $\sigma$  vzdialenými  $d$  od seba. Zdroj sa nachádza v strede medzi platňami a produkuje protóny s rýchlosťou  $v$  rovnomerne do všetkých smerov. Nakreslite do obrázku, kam všade sa protóny dostanú. Medzi platňami je vákuum.



- 34** Kvík sedel na poslednej gitarovačke vedľa Jara. Odvtedy je nahluchlý na pravé ucho. Keď si nasadí uzavreté slúchadlá, potrebuje si zvýšiť hlasitosť pravého slúchadla o 3 dB, aby počul zvuk vyvážene. Ak si slúchadlá zloží a prepojí výstup na reproduktory umiestnené po jeho stranách, potrebuje korekciu až 13 dB. Aká je vzdialenosť medzi reproduktormi, ak vzdialenosť medzi Kvíkovými ušami je 15 cm?

Výsledok zaokrúhľte na centimetre. Nezabudnite, že ľavé ucho počuje aj pravý reproduktor a naopak. Efekty hlavy na šírenie zvuku zanedbajte.

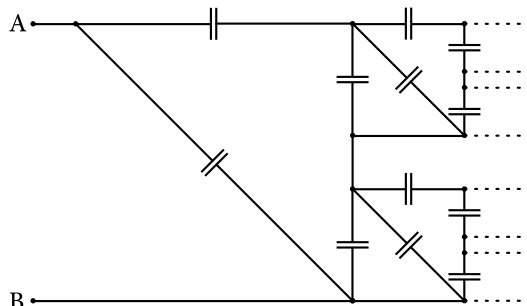


- 35** Kockatý Dušan sa vybral do vesmírneho priestoru. Práve teraz sa vznáša kdesi pri Venuši a je mu hrozne teplo, pretože naňho neustále nemilosrdne pripeká Slnko.

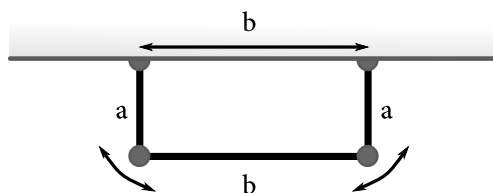
Dušan je dokonale tepelne vodivý, dokáže sa sám natačať ľubovoľným smerom a keďže na Venuši nemajú opaľovací krém, je už dávno opálený úplne dočierna. Aký je pomer najväčšej a najmenej teploty, ktorú môže jeho povrch dosiahnuť?

- 36** Kajka si počas posledného výpadku prúdu povedala, že už viac nebude závislá na komerčných dodávkach a zadovážila si malý fúzny reaktor. Konečným produktom fúzie sú jadrá hélia. Ako vedľajší produkt vzniká beta žiarenie, čo sú vlastne elektróny unikajúce z jadra. Uvažujme jadro hélia s polomerom  $R$ . Elektrón uniknúvší z tohoto jadra bol následne zachytený voľným protónom, ktorého vzdialenosť od stredu jadra hélia je  $r = 11R$ . Akú najmenšiu kinetickú energiu musí mať elektrón v momente, keď opúšťa jadro, aby sa vôbec k danému protónu dostal?

**37** Kvík našiel na povale svojho domu neskutočné množstvo kondenzátorov s kapacitou  $C$ . Bolo ich priam nekonečno, a preto si z nich postupne začal stavať nekonečnú sieť. V prvom kroku zapojil iba 4 kondenzátory, v druhom ďalších 8, v treťom 16 – jednoducho vždy dvakrát viac ako v predchádzajúcom. K akej hodnote sa bude blížiť kapacita takéhoto zapojenia?



**38** Kovový rámček sa skladá z troch hmotných paličiek, dve zvislé majú dĺžku  $a$ , vodorovná má dĺžku  $b$ . Spojenia medzi paličkami a úchyty na stene umožňujú paličkám voľný pohyb. Dĺžková hustota paličiek je  $\lambda$ . Aká je perióda malých kmitov rámčeka, ak kmitá vo svojej rovine?



**39** Planéta s hmotnosťou  $M$  má jediný mesiac s hmotnosťou  $M/10$ , ktorý sa pohybuje po kruhovej dráhe. Zrazu príde Gandalf a magicky zmení hmotnosť planéty tak, že mesiac odletí. Aká najväčšia mohla byť nová hmotnosť planéty?

**40** Na lodi je sťažň výšky  $h$  a na jeho vrchu je pripevnené voľne visiace lano s dĺžkou  $L < h$ . Opica Johnny sa rozbehne po palube a zachytí sa lana, následkom čoho sa vyhupne v rovine kolmej na palubu, v ktorej leží sťažň. Aký uhol zvierá sťažň a lano v okamihu, keď je päta sťažňa namáhaná najväčším momentom sily?

Opica má v okamihu zachytenia horizontálnu rýchlosť  $v$ , ktorá nie je dostatočná na to, aby sa prehupla nad úroveň vrcholu sťažňa.

# Vzorové riešenia

**1** Úloha zjavne nie je fyzikálne náročná, stačí si premeniť zadané jednotky na nejaké konvečnejšie.

Z konštantovníka vieme, že  $1 \text{ pc} \doteq 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$ . Predpona *femto*- znamená, že sa násobí  $10^{-15}$ . Teda pol femtoparseku bude približne 15,43 m.

Jeden rok má 365 dní, pričom každý deň má 24 hodín po 3600 sekundách, čo je 31 536 000 s. Storočie je 100 rokov, predpona *nano*- násobí  $10^{-9}$ , takže jedno nanostoročie je 3,1536 s.

Astronomickú jednotku máme z tabuľky konštánt:  $1 \text{ AU} \doteq 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ . Pikoastronomická jednotka potom bude 0,15 m. Týždeň má sedem dní, čo je 604 800 s, teda mikrotýždeň bude 0,6048 s.

Pomocou kalkulačky teraz už vieme určiť rýchlosť Miškovho brata  $v_M \doteq 4,8929 \text{ ms}^{-1}$  a rýchlosť Jurkovho brata  $v_J \doteq 6,2004 \text{ ms}^{-1}$ . Jurkov brat je teda rýchlejší.

Teraz spočítame dĺžku ich bežeckej dráhy: svetelná mikrosekunda je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo za  $1 \mu\text{s}$ , teda  $s \doteq 3 \cdot 300 \text{ m} = 900 \text{ m}$ .

Z toho vieme vypočítať časy  $t_M \doteq 183,943 \text{ s}$  a  $t_J \doteq 145,152 \text{ s}$  a tiež ich rozdiel 38,791 s. Nakoniec potrebujeme vyjadriť tento čas v šestonedeliach. Ako prezrádza konštantovník, šestonedelie, čiže šesť týždňov, trvá  $10! \text{ s} = 3\,628\,800 \text{ s}$ , a nanošestonedelie je teda približne 3,63 ms. Vydelením zistíme, že Jurkov brat prebehne Miškovho o 10 690 nanošestonedelí.

S použitím presných hodnôt konštánt a po zaokrúhlení na celé číslo by sme získali výsledok 10 614 nanošestonedelí.

**2** Výsledná hmotnosť roztoku je 100 g. Hmotnosť rozpusteného cukru je  $0,8 \cdot 20 \text{ g} + 0,2 \cdot 80 \text{ g} = 32 \text{ g}$ , teda výsledný roztok je 32-percentný.

**3** Označme rýchlosti Arthura, Pavla a Petra postupne  $v_1$ ,  $v_2$  a  $v_3$ . Kým Arthur zabehol celú dráhu, teda 100 m, Pavel stihol zabehnúť 80 m. Pomer ich rýchlostí je preto  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$ . Podobne kým Pavel zabehol 100 m, prebehol Peter 80 m, teda aj pomer rýchlostí je  $\frac{v_2}{v_3} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$ . Pomer rýchlostí Arthura a Petra je

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{v_1}{v_2} \frac{v_2}{v_3} = \frac{25}{16}.$$

Nech Arthur zabehol 100 m za čas  $t$ . Potom Peter za tento čas zabehol

$$v_3 t = \frac{v_3}{v_1} 100 \text{ m} = \frac{16}{25} 100 \text{ m} = 64 \text{ m}.$$

Arthur teda prebehol Petra o  $100 \text{ m} - 64 \text{ m} = 36 \text{ m}$ .

**4** Kocka sa topí a až po istom čase začne plávať vo vode. Počiatočný objem kocky označíme  $V_c = a^3$ , objem zvyšku kocky označíme  $V_i$ , objem vody  $V_w$  a objem ponorenej časti kocky  $V_p$ . Z Archimedovho zákona vieme, že bude vytláčať vodu s objemom  $V_p$ , ktorý zdvihne hladinu. Musíme teda vypočítať objem  $V = V_w + V_p$  a nájsť jeho maximum. Pri maximálnom objeme bude aj výška hladiny maximálna.

Vztlaková sila bude  $F_{vz} = V_p \rho_w g$ . Kocka pláva, takže platí  $F_g = F_{vz}$ . Z toho dostaneme  $V_p = V_i \frac{\rho_i}{\rho_w}$ . Teraz si vyjadríme objem  $V_w$  ako násobok  $V_i$ . Počiatočná hmotnosť bude  $m = a^3 \rho_i$ . Hmotnosť sa zachováva, teda v každom okamihu platí  $m = m_i + m_w$ .



Objem vody teda vypočítame  $V_w = \frac{m-m_i}{\rho_w}$ , a teda  $V_w = \frac{a^3 \rho_i - V_i \rho_i}{\rho_w}$ . Nakoniec dostaneme objem

$$V = V_w + V_p = \frac{a^3 \rho_i - V_i \rho_i}{\rho_w} + V_i \frac{\rho_i}{\rho_w} = a^3 \frac{\rho_i}{\rho_w}.$$

Z toho vidíme, že výška hladiny vôbec nezávisí od toho, koľko ľadu je roztopeného, pokiaľ kocka pláva na vode. Teoreticky, ak by bola nádoba dostatočne široká, mohla by nastať situácia, kedy ľad nezačne nikdy plávať. V takom prípade sa ľad iba jednoducho natopí na vodu, ktorej objem bude  $V = a^3 \frac{\rho_i}{\rho_w}$ , čo je to isté ako v prvom prípade. Takže pre maximálnu výšku dostávame

$$h = \frac{\rho_i a^3}{\rho_w \pi R^2}.$$

**5** Podľa druhého Newtonovho zákona platí, že zrýchlenie je úmerné výslednej pôsobiacej sile. Aké sily pôsobia na sumca? V prvom rade je to sila, ktorou ťahá Juro udicu, a tá sa udicou prenáša na sumca. No a potom sú tu tiažová a vztlaková sila. Všetky tieto sily pôsobia iba vo vertikálnom smere, takže ich možno jednoducho sčítať. Výsledná sila pôsobí nahor, označme ju  $F'$ .

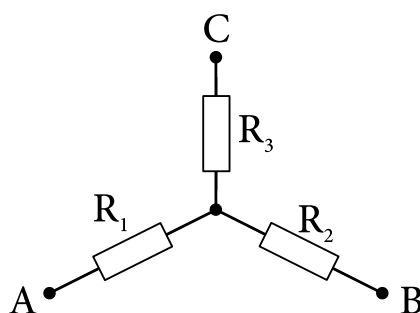
V takom prípade možno písať  $ma = F'$ . Potom Juro zatahne silou  $2F$ , čiže ešte o  $F$  väčšou. To znamená, že celková pôsobiaca sila  $F'$  sa zvýši ešte o  $F$ , takže možno jednoducho písať  $ma' = F + F'$ . Vylúčením sily  $F'$  dostávame  $a' = a + \frac{F}{m}$ .

**6** Označme si namerané odpory ako  $R_{AB} = 24 \Omega$ ,  $R_{AC} = 48 \Omega$  a  $R_{BC} = 56 \Omega$  a odpory jednotlivých rezistorov ako  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ . Rezistor, ktorý sa nachádza pri meraní v nepripojenej vetve, nemá vplyv na výsledný odpor (nebude ním tiecť prúd). Pre namerané odpory vo hviezde teda platia rovnice

$$R_1 + R_2 = R_{AB},$$

$$R_1 + R_3 = R_{AC},$$

$$R_2 + R_3 = R_{BC}.$$



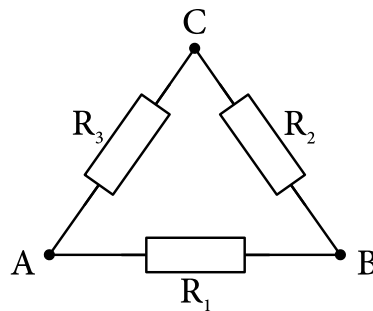
Obrázok 1: Rezistory zapojené do tvaru hviezdy

Jednoduchou úpravou dostaneme  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 16 \Omega$  a  $R_3 = 40 \Omega$ . Keď zapojíme tieto odpory do trojuholníka, medzi vrcholmi dostaneme iba sériovo a paralelne pozapájané rezistory. Výsledné odpory teda jednoducho vyjadríme ako

$$R'_{AB} = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 7 \Omega,$$

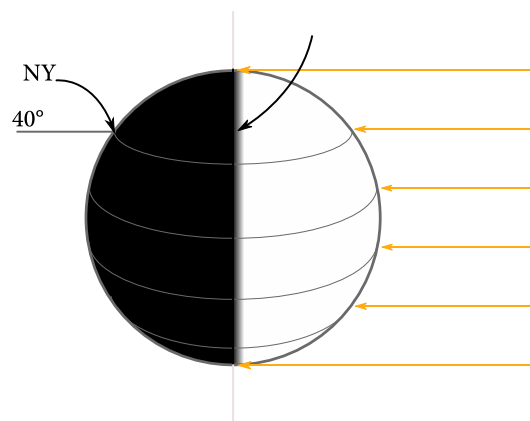
$$R'_{BC} = \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 12 \Omega,$$

$$R'_{AC} = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = 15 \Omega.$$



Obrázok 2: Rezistory zapojené do tvaru trojuholníka

7 V New Yorku je poľnoc počas rovnodennosti, to znamená: Slnko je presne nad rovníkom a na presne opačnom poludníku ako New York. Rozhranie medzi osvetlenou a neosvetlenou časťou Zeme má tvar kružnice a nazýva sa terminátor.



Obrázok 3: Slnčné lúče dopadajúce na Zem v skúmanom okamihu

Je pomerne očividné, že najbližšie miesto od New Yorku k terminátoru je severný pól. Predstavme si, že sa prejdeme po terminátore. Vo všetkých bodoch okrem severného a južného pólu sa od New Yorku vzdalujeme alebo približujeme, pretože smer nášho pohybu nie je kolmý na spojnicu k New Yorku. Tieto body preto nemôžu byť miesta, v ktorých sme najbližšie alebo najďalej od New Yorku. Severný pól je zjavne teda to najbližšie miesto, južný je určite ďalej. Rozdiel zemepisných šírok New Yorku a severného pólu je 50°. Polomer Zeme je  $R = 6378 \text{ km}$ , a teda pre oblúkovú vzdialenosť dostávame

$$d = \frac{5\pi}{18} R \doteq 5566 \text{ km} \doteq 5570 \text{ km}.$$

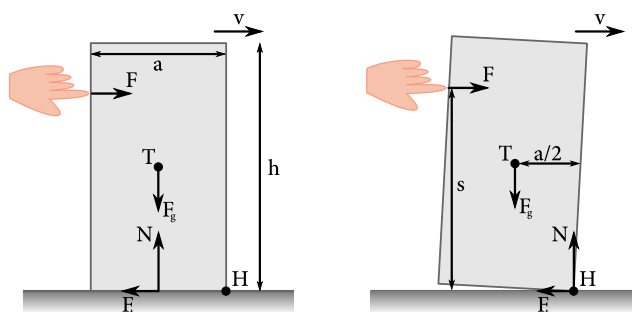
**8** V prvom rade zistíme, aký je pomer medzi snímkovou frekvenciou kamery pri natáčaní a snímkovou frekvenciou filmu pri premietaní. To vieme jednoducho určiť z rýchlostí auta v skutočnosti a vo filme. Stačí, keď si uvedomíme, že auto sa medzi dvomi snímkami posunulo o malú vzdialenosť  $d$ . Ak medzi dvomi snímkami ubehol čas  $\tau$ , zdanlivá rýchlosť je  $v = \frac{d}{\tau} = df$ , kde  $f = \frac{1}{\tau}$  je snímková frekvencia. Vidíme, že zdanlivá rýchlosť je priamo úmerná snímkovej frekvencii. Pomer snímkových frekvencií je potom rovný podielu príslušných rýchlostí  $k = \frac{50 \text{ kmh}^{-1}}{160 \text{ kmh}^{-1}} = \frac{5}{16}$ .

Ako je to ale so zrýchleniami? Uvažujme pád s konštantným zrýchlením z výšky  $h$ . Medzi výškou a dobou pádu je vzťah  $h = \frac{1}{2}gt^2$ . Po zmene snímkovej frekvencie sa trvanie každého deja skráti  $k$ -krát, takže celý pád z rovnakej výšky bude trvať len  $kt$ , čiže možno písať  $h = \frac{1}{2}g'(kt)^2$ , kde  $g'$  je zdanlivé gravitačné zrýchlenie. Predelením týchto dvoch rovníc dostávame  $g' = \frac{g}{k^2} = \left(\frac{5}{16}\right)^{-2} = 3,2^2 = 10,24g$ .

**9** Kameň na naklonenej rovine bez trenia má zrýchlenie  $g \sin \alpha$ , vodorovná zložka tohoto zrýchlenia je  $g \sin \alpha \cos \alpha = g \frac{\sin(2\alpha)}{2}$ . Sínus nadobúda maximum, keď je jeho argument  $90^\circ$ , teda najväčšie vodorovné zrýchlenie vidíme pre  $45^\circ$ .

**10** Nakoľko kameň vrabca zasiahne dvakrát, vieme, že kameň aj vrabec majú rovnakú vodorovnú rýchlosť. Z maximálnej výšky kameňa poznáme jeho zvislú zložku rýchlosti  $v_y = \sqrt{2gH}$ . Vodorovnú zložku vieme dopočítať z Pytagorovej vety ako  $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2}$ , čo je i hľadaná rýchlosť vrabca  $20\sqrt{3} \text{ ms}^{-1} \doteq 35 \text{ ms}^{-1}$ .

**11** Pozrime sa, aké sily pôsobia na škatuľu, keď do nej tlačíme prstom. V prvom rade ide o tiažovú silu  $F_g$ , ktorá pôsobí v ťažisku, ďalej ide o normálovú silu  $N$ , ktorá pôsobí v mieste dotyku podložky so škatuľou, treciu silu  $F_t$ , ktorá pôsobí proti smeru pohybu a silu  $F$ , ktorou na škatuľu pôsobíme my.



Obrázok 4: Prst tlačiaci na škatuľu

Nato, aby sa škatuľa hýbala konštantnou rýchlosťou, musí platiť rovnováha síl vo vodorovnom smere, preto  $F = F_t$ . Taktiež vieme, že škatuľa neprechádza cez stôl, preto musí platiť rovnováha síl aj vo zvislom smere,  $N = F_g$ . Ďalej vieme, že  $F_t = fF_g$ . Keď sa začne škatuľa prevracať okolo svojej dolnej hrany (H), pôsobisko normálovej sily a pôsobisko trecej sily sa presunú na hranu. Momenty síl je výhodné počítať vzhľadom na túto hranu, pretože potom je moment normálovej sily a moment trecej sily nulový. Zostali nám teda už iba moment tiažovej sily a moment sily  $F$ .

Nato, aby sa škatuľa neprevrátila musí platiť, že moment sily, ktorý okolo tejto hrany vyvíjame my silou  $F$ , je menší ako moment sily spôsobený tiažovou silou  $F_g$ . Príslušné rameno tiažovej sily je  $a/2$  (keďže ťažisko sa nachádza vo vodorovnej vzdialenosti  $a/2$  od hrany škatule), rameno prislúchajúce sile  $F$  je  $s$ , čo je kolmá vzdialenosť pôsobiska sily od stola.

Aby sa škatuľa neprevrátila, musí platiť

$$F_g \frac{a}{2} \leq Fs,$$

$$mg \frac{a}{2} \leq fmg s,$$

$$\frac{a}{2f} \leq s,$$

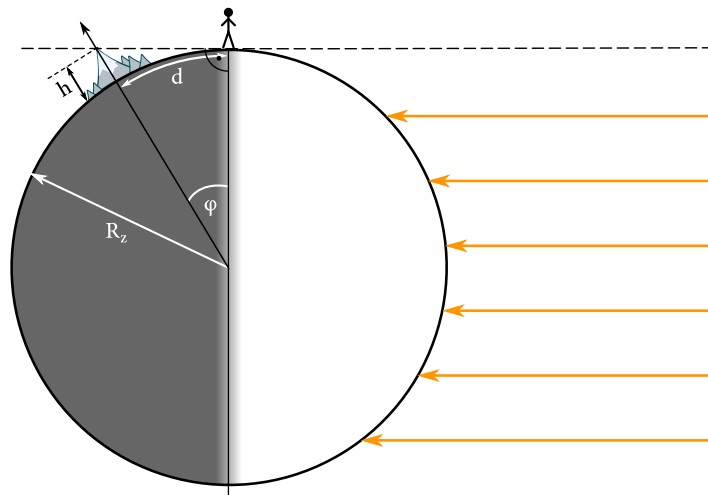
čo dáva pre maximálnu možnú výšku, v ktorej môžeme tlačiť škatuľu, hodnotu  $\frac{a}{2f}$ .

**12** Označme  $\varphi$  rozdiel zemepisných šírok kopca a Lukafa. Potom vieme, že musí platiť rovnosť

$$\varphi R_{\oplus} = d,$$

kde  $R_{\oplus}$  je polomer Zeme. Ak označíme výšku kopca ako  $h$ , z jednoduchej trigonometrie (pozri obrázok) vyplýva

$$\cos \varphi = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}.$$



Obrázok 5: Slné lúče dopadajúce na Zem v skúmanom okamihu

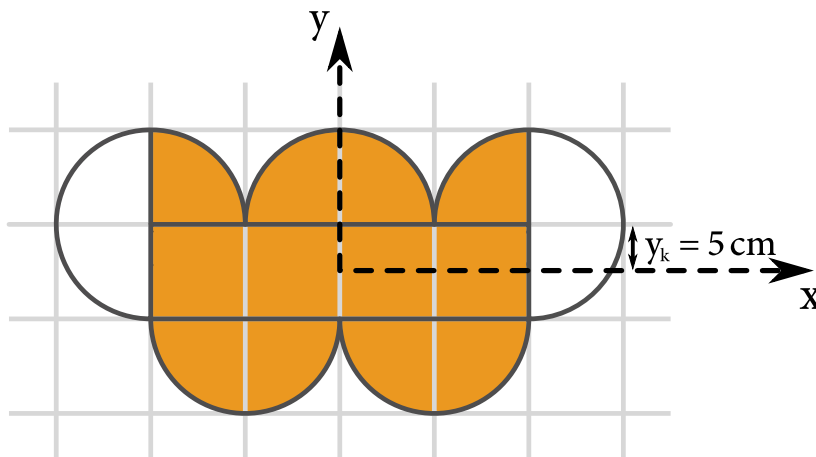
Kombináciou týchto dvoch jednoduchých vzťahov už vieme ľahko vyjadriť výšku kopca

$$h = R_{\oplus} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R_{\oplus}}\right)} - 1 \right) \doteq 1764 \text{ m.}$$

**13** Označme silu, ktorou lano pôsobí na obe páky,  $F$  a gravitačné zrýchlenie  $g$ . Rovnováha momentov síl na ľavej páke je udaná rovnicou  $1 \text{ kg} \cdot g \cdot 0 + 4 \text{ kg} \cdot g \cdot 3 = F \cdot 4$ , teda sila  $F = 3 \text{ kg} \cdot g$ . Obdobným spôsobom z rovnováhy momentov síl na pravej páke ostáva určiť hmotnosť  $x$ .

$$F \cdot 1 = 1 \text{ kg} \cdot g \cdot 2 + x \cdot g \cdot 5 \Rightarrow x = 0,2 \text{ kg.}$$

**14** Novovzniknuté olympijské kruhy si rozdelíme na geometrické útvary, ktoré vieme jednoducho popísať. Ako vidieť na obrázku, náš útvar sa dá zložiť z obdĺžnika  $40\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ , piatich polkruhov a dvoch štvrtkruhov s polomerom  $r = 10\text{ cm}$ .



Obrázok 6: Útvar rozdelený na jednoduchšie geometrické útvary

Zavedme si kartézsku súradnicovú sústavu s počiatkom v ťažisku pôvodného obdĺžnika. Uľahčí nám to počítanie, najmä preto, že vzdialenosť ťažísk, na ktorú sa pýta otázka, bude práve veľkosť polohového vektora nového ťažiska.

Keďže sú olympijské kruhy symetrické podľa vertikálnej osi,  $x$ -ová zložka polohového vektora ťažiska sa nemení, bude jednoducho nulová. Zložku v  $y$ -ovom smere už však treba vypočítať. Tú však vieme vypočítať z polôh ťažísk jednotlivých útvarov ako vážený priemer, pretože ťažisko je bod, ktorý reprezentuje efektívne pôsobisko gravitačnej sily telesa. Matematicky zapísané

$$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}.$$

Naše kruhy si však vieme rozdeliť na útvar zložený z obdĺžnika, troch polkruhov a dvoch štvrtkruhov (farebne vyznačených na obrázku), ktorých výsledná  $y$ -ová poloha ťažiska je nulová, a dva polkruhy, ktoré majú ťažisko v  $y_k = 5\text{ cm}$ . Ak si označíme plošnú hustotu plechu  $\sigma$ , ktorá nám aj tak vypadne, dostaneme pre polohu ťažiska

$$y_T = \frac{2\sigma \frac{\pi r^2}{2} \frac{r}{2}}{\sigma 4r^2 + \sigma 3\pi r^2} = \frac{5\pi}{3\pi + 4} \text{ cm} \doteq 1,17 \text{ cm}.$$

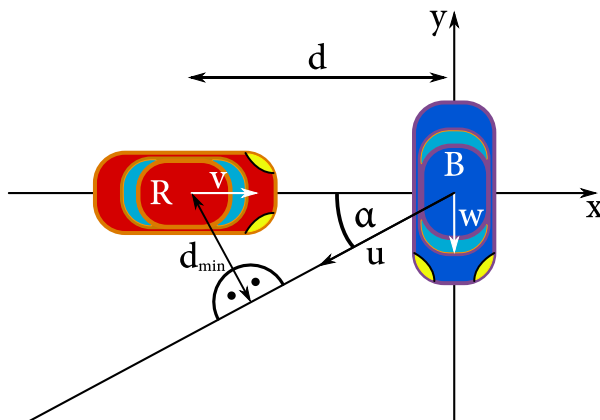
**15** Rovnováha nastane, keď bude rýchlosť premien plynov rovnaká. Ak rovnovážne látkové množstvá plynov A a B označíme  $n_A^{eq}$  a  $n_B^{eq}$ , potom pre ne musí platiť

$$k_A n_A^{eq} = k_B n_B^{eq}.$$

Celkové látkové množstvo plynov sa musí zachovávať kvôli stechiometrii reakcie, teda  $n_A + n_B = n_0$ . Výsledné látkové množstvo plynu B je

$$n_B = \frac{k_A}{k_A + k_B} n_0.$$

**16** Máme dve autá pohybujúce sa po vzájomne kolmých cestách. Cestu červeného auta označme  $x$  a modrého  $y$ . Treba zistiť vzájomnú vzdialenosť, čo nás hneď navádza k zmene vzťažnej sústavy. Pozrieme sa na celý príklad v sústave červeného auta. To znamená, že modré auto sa pohybuje šikmo rýchlosťou  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ .



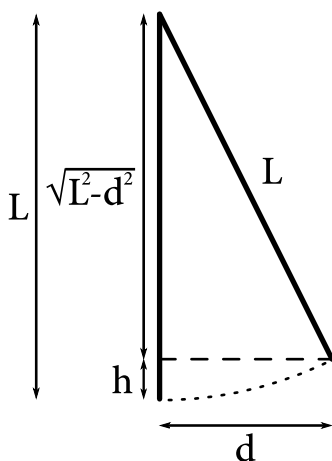
Obrázok 7: Pohybujúce sa autá

Uvažujme moment, keď modré auto prešlo križovatkou, ako počiatkový. Zistíme uhol vektora rýchlosti  $\vec{u}$  s osou  $x$ . Vieme, že vektor  $\vec{u}$  rozložíme nasledovne:  $v = u \cos \alpha$  a  $w = u \sin \alpha$ . Z toho po úpravách dostaneme  $\tan \alpha = \frac{w}{v}$ .

V sústave červeného auta bude zvierat trajektória modrého auta s osou  $x$  uhol  $\alpha$ . Najkratšia vzdialenosť medzi autami bude kolmica od červeného auta na trajektóriu modrého auta. Vieme, že červené auto je  $d$  od križovatky a poznáme uhol trajektórie. Kolmá vzdialenosť bude

$$d_{min} = d \sin \left( \arctan \left( \frac{w}{v} \right) \right) = d \frac{w}{\sqrt{v^2 + w^2}}.$$

**17** Označme dĺžku lana  $L$  a  $v$  rýchlosť, ktorou sa vie požiarnik odraziť. Zo zákona zachovania energie je jasné, že keď sa vždy odráža najväčšou možnou rýchlosťou, vždy sa vyzdvihne o tú istú výšku  $h$ :



Obrázok 8: Požiarnik na lane

Porovnajme teda výšky, do ktorých sa odrazil, pre prvý a druhý prípad:

$$L - \sqrt{L^2 - 4^2 \text{ m}^2} = 2L - \sqrt{4L^2 - 6^2 \text{ m}^2}.$$

Z tejto rovnice potrebujeme dostať dĺžku  $L$ . Osamostatnime posledný člen a celú rovnicu umocníme.

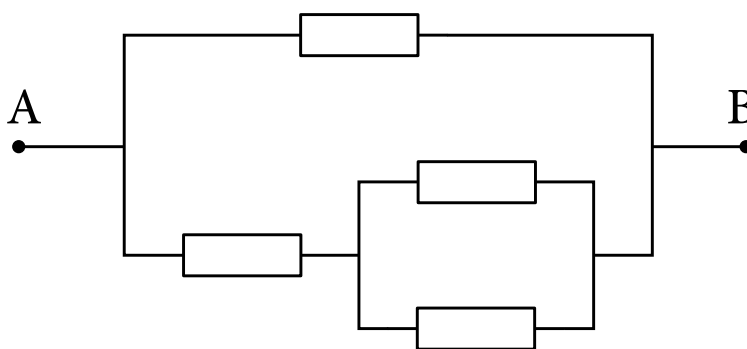
$$\begin{aligned} L - \sqrt{L^2 - 16 \text{ m}^2} &= 2L - \sqrt{4L^2 - 36 \text{ m}^2} \\ \sqrt{4L^2 - 36 \text{ m}^2} &= L + \sqrt{L^2 - 16 \text{ m}^2} \quad / \quad ()^2 \\ L^2 - 10 \text{ m}^2 &= L\sqrt{L^2 - 16 \text{ m}^2} \quad / \quad ()^2 \\ L^2 &= 25 \text{ m}^2 \Rightarrow L = 5 \text{ m} \end{aligned}$$

Výška, do ktorej sa vie požiarnik odraziť, je  $h = 5 \text{ m} - \sqrt{5^2 \text{ m}^2 - 4^2 \text{ m}^2} = 2 \text{ m}$ . V poslednom prípade sa teda požiarnik odrazí do vzdialenosti  $d_3$ :

$$2 \text{ m} = 50 \text{ m} - \sqrt{2500 \text{ m}^2 - d_3^2} \Rightarrow d_3 = 14 \text{ m}.$$

**18** Na miesto rezistora  $R_x$  vieme vložiť rezistor s ľubovoľným odporom. To znamená, že ho vieme spojitomeniť od  $0$  po  $\infty \Omega$ . Keďže nás zaujíma interval výsledného odporu, ktorý sa mení tiež spojitomeniť, stačí vypočítať iba výsledné odpory v hraničných prípadoch.

Keď zvolíme  $R_x = 0 \Omega$ , náš odpor sa správa ako ideálny vodič. Keďže ideálny vodič nemá žiaden odpor, možno jeho dĺžku ľubovoľne meniť, takže uzly, ktoré spája, možno beztrastne stiahnuť do jediného uzla. Tým pádom možno schému prekresliť nasledovne:

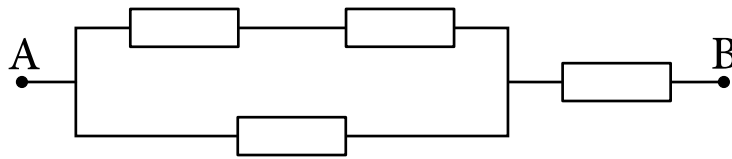


Obrázok 9: Schéma s  $R_x = 0 \Omega$

Tu dostávame čisto sériovo a paralelne zapojené rezistory. Dva paralelne zapojené rezistory v spodnej vetve majú odpor  $\frac{R}{2}$ , takže výsledný odpor je v tomto prípade

$$R_0 = \frac{R \cdot \frac{3}{2}R}{R + \frac{3}{2}R} = \frac{3}{5}R.$$

Keď zvolíme  $R_x = \infty \Omega$ , odpor sa správa rovnako, ako keby tam bol dokonalý izolant, čiže vákuum. A teda túto odporovú vetvu môžeme v schéme beztriestne odstrániť. Dostaneme teda schému:



Obrázok 10: Schéma s  $R_x = \infty \Omega$

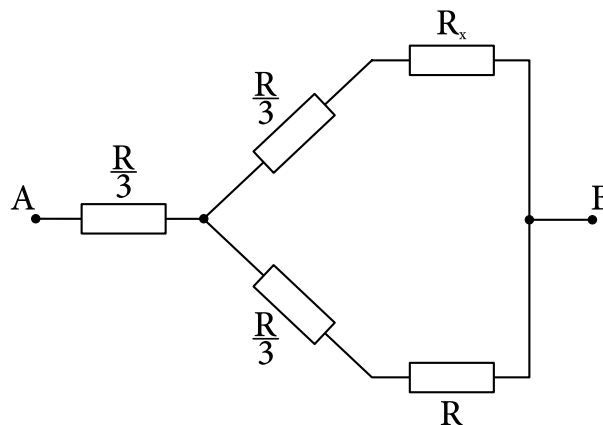
Odpor paralelne zapojených rezistorov je  $\frac{2}{3}R$ , čiže odpor celej schémy je

$$R_\infty = \frac{5}{3}R.$$

Odpor schémy sa môže nachádzať v intervale  $[\frac{3}{5}R; \frac{5}{3}R]$ .

Niektorí čitatelia tohto vzorového riešenia by mohli namietať, že nevieme, akú hodnotu má celkový odpor pre všeobecné  $R_x$ . Veď ak je funkcia spojitá, neznamená to, že je monotónna, a extrémny by mohla nadobúdať aj mimo hraničných prípadov. Preto teraz v skratke ukážeme, ako vypočítať celkový odpor zapojenia  $R_\Sigma$  pre všeobecné  $R_x$ .

Zamerajme sa najprv iba na tri rezistory s odporom  $R$ , ktoré tvoria ľavú časť zapojenia. Tie sú zapojené do tvaru trojuholníka. Keby sme merali odpor medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi, vždy by sme našli presne  $\frac{2}{3}R$ . Odpor týchto rezistorov je nemenný a teda medzi tri uzly, medzi ktorými sa nachádzajú, by sme mohli umiestniť čokoľvek, čo nám dá rovnaký výsledok. A aj tak urobíme. Pôvodné zapojenie nahradíme zapojením troch rezistorov s odporom  $\frac{R}{3}$  v tvare hviezdy. Takáto transformácia sa nazýva trojuholník–hviezda. To, že je to ekvivalentné zapojenie, si už overte sami.



Obrázok 11: Transformovaná schéma

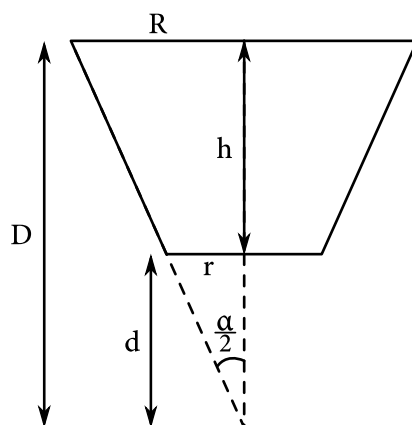
Teraz už výsledná schéma pozostáva naozaj iba zo sériovo a paralelne zapojených rezistorov, takže pre celkový odpor po troche matematických úprav dostávame výraz

$$R_\Sigma(R_x) = \frac{R}{3} + \frac{\frac{4}{3}R\left(\frac{R}{3} + R_x\right)}{\frac{5}{3}R + R_x}.$$

Toto je na intervale  $[0; \infty]$  monotónna funkcia a náš pôvodný výsledok je teda správny.



**19** Ustálenú výšku dosiahneme, keď je výtok z nádoby rovnaký ako prítok  $Q$ . Výtok vieme z Torricelliho vzťahu:  $Q = \sqrt{2hg}S$ , kde  $h$  je výška vody v nádobe. Výpočtom vyjde  $h = 20$  cm. Teraz už stačí dopočítať geometriu na určenie objemu:



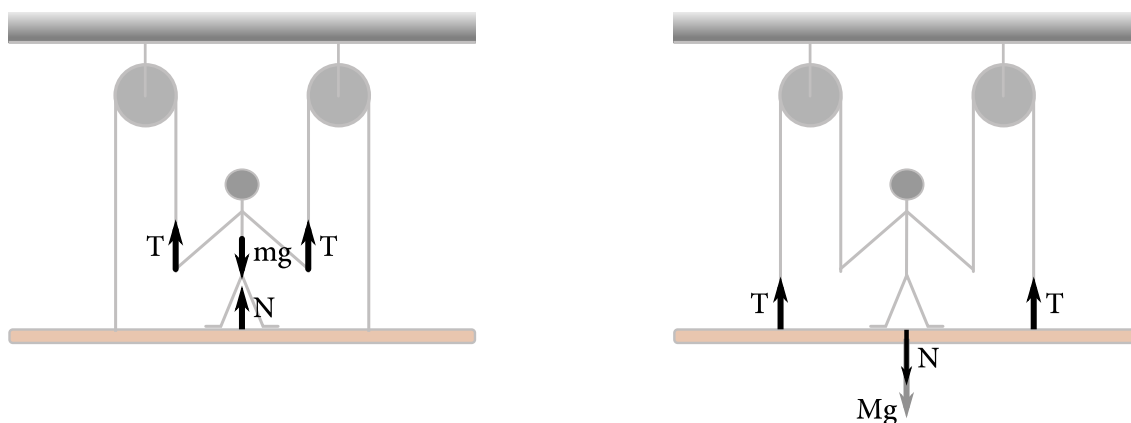
Obrázok 12: Prierez lievikom

Malý polomer je  $r = 1$  mm, výška malého kužeľa  $d = 2$  mm. Výška veľkého kužeľa  $D$  je o  $h$  väčšia:  $D = d + h = 202$  mm, veľký polomer je  $R = 101$  mm. Objem vody je teda  $2158$  cm<sup>3</sup>.

**20** Ak silák na laná pôsobí dostatočne veľkou silou, hýbe sa spolu s plošinou smerom nahor. Nás však zaujíma práve tá sila, ktorá je potrebná na udržanie celého systému v rovnováhe. Stačilo by, aby bola čo i len o kúsok väčšia, a už by sa silák zdvíhal. Takže ide o statickú úlohu, v ktorej treba najprv zanalyzovať všetky pôsobiace sily.

Označme si  $T$  silu, ktorou pôsobí silák na každé z lán. Keďže laná aj kladky pokladáme za dokonalé, táto napätová sila bude pôsobiť pozdĺž celého lana, to znamená, aj na jeho opačnom konci. Pozrime sa ešte, aké sily pôsobia na siláka a plošinu.

Keďže silák pôsobí na každé z lán silou  $T$ , podľa tretieho Newtonovho zákona pôsobia laná na siláka silou  $2T$  smerom nahor. Okrem toho pôsobí tiažová sila  $mg$  a normálová sila  $N$  od plošiny. Na plošinu pôsobia ťahové sily  $2T$  od lán (taktiež smerom nahor), tiažová sila  $Mg$  a normálová sila od siláka  $N$  smerom nadol.



Obrázok 13: Vľavo sily pôsobiace na siláka, vpravo sily pôsobiace na plošinu

Keďže je systém v rovnováhe, súčet týchto síl je nulový. Matematicky zapísané

$$2T - mg + N = 0,$$

$$2T - Mg - N = 0.$$

Vylúčením normálovej sily  $N$  z rovníc dostaneme

$$T = \frac{(m + M)g}{4},$$

čo je presne sila, ktorú sme hľadali.

**21** Odpor kvádra s rezistivitou  $\rho$ , dĺžkou  $x$  a prierezom  $S$  je  $R = \rho \frac{x}{S}$ . Vidíme, že odpor kvádra meraný ako v zadaní je najmenší vtedy, keď je na vodivé platne priložená najväčšia stena a najkratšia hrana tvorí vzdialenosť medzi platňami. Najkratšiu hranu označme  $a$ . To je zároveň hrana najväčšej kocky, ktorú z kvádra vieme vyrezať. Jej odpor potom bude

$$R_k = \rho \frac{a}{a^2} = \frac{\rho}{a}.$$

Všimnime si, čo dva väčšie odpory,  $R_b = \rho \frac{b}{ac}$  a  $R_c = \rho \frac{c}{ab}$ , dávajú po vynásobení a následnom odmocnení:

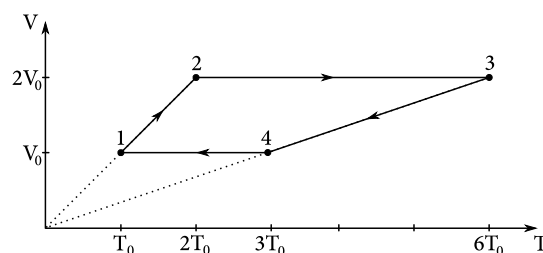
$$\sqrt{R_b R_c} = \sqrt{\rho \frac{b}{ac} \rho \frac{c}{ab}} = \rho \frac{1}{a} = \rho \frac{a}{a^2}.$$

Toto je práve hľadaný odpor najväčšej kocky, ktorú vieme vyrezať. Dosadením hodnôt získame výsledok  $\sqrt{R_b R_c} = \sqrt{27 \Omega \cdot 75 \Omega} = 45 \Omega$ .

**22** Prv než začneme prekresľovať  $pT$ -diagram na  $VT$ -diagram, je nutné zistiť, aké termodynamické deje v plyne prebiehajú a aké objemy a teploty má plyn v jednotlivých fázach deja. Na to všetko nám bude stačiť rovnica ideálneho plynu  $pV = NkT$ , pričom  $N$  je nemenný počet častíc.

Pri prechode  $1 \rightarrow 2$  v plyne prebieha zjavne izobarický dej, pričom sa zdvojnásobí teplota, takže sa zmení objem z  $V_0 = \frac{NkT_0}{p_0}$  na  $2V_0$ . Pri prechode  $2 \rightarrow 3$  tlak stúpa priamo úmerne s teplotou, takže dej, ktorý v plyne prebieha, musí byť izochorický, keďže pomer  $\frac{p}{T} = \frac{Nk}{V}$  je konštantný. Tlak sa strojnásobil, plyn bude mať v bode 3 teplotu  $6T_0$  a objem  $2V_0$ . Prechod  $3 \rightarrow 4$  je izobarický a  $4 \rightarrow 1$  opäť izochorický. To znamená, že v bode 4 je objem  $V_0$  a teplota  $3T_0$ .

Pri prekresľovaní na  $VT$ -diagram nebudeme mať žiadne problémy s nakreslením izochorického deja. Graf izobarického deja vo  $VT$ -diagrame bude vyzeráť veľmi podobne ako graf izochorického v  $pT$ -diagrame: pomer  $\frac{V}{T} = \frac{Nk}{p}$  je konštantný, teda opäť je to lineárna funkcia prechádzajúca počiatkom. Prekreslený cyklus do  $VT$ -diagramu vyzerá nasledovne:



Obrázok 14: Cyklus prekreslený do  $VT$ -diagramu

**23** Z Hookeovho zákona poznáme relatívne predĺženie tyče  $\varepsilon = \frac{F}{SE}$ . Relatívne predĺženie tyče je aj relatívnym predĺžením medziatómových vzdialeností  $a$ . Hodnotu  $a$  na začiatku určíme z hustoty tyče. Opakujúcim sa vzorom, tvoriacim celý kryštál, je napríklad jeden atóm so šiestimi väzbami v kocke s hranou  $a$ . Atóm má hmotnosť  $\frac{M}{N_A}$ , kde  $N_A$  je Avogadrova konštanta, teda hustota materiálu je

$$\rho = \frac{M}{N_A a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho}}$$

a hľadané predĺženie je

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho} \frac{F}{SE}}$$

**24** Na ľavej strane vidíme Mesiac s jasnosťou  $\frac{I_M}{2}$ , kde  $I_M$  je vonkajšia jasnosť Mesiaca, a lampu s jasnosťou  $r \frac{I_L}{2}$ , kde  $r$  je neznámy zlomok odrazeného svetla. Zadanie nám poskytuje medzi zdanlivými jasnosťami na ľavej strane vzťah

$$\frac{I_M}{2} = 6r \frac{I_L}{2}$$

Na pravej strane postupujeme podobne a dostávame vzťah

$$\frac{I_L}{2} = \frac{3}{2} r \frac{I_M}{2}$$

Keďže nás zaujíma pomer  $\frac{I_L}{I_M}$ , môžeme si všimnúť, že nám stačí predeliť jednu rovnicu druhou, aby nám ostal len žiadaný pomer, ktorý pre názornosť označíme  $p$ . Dá sa pobaďať, že informácia o prepustení 50 % svetla je vo výpočte úplne nepodstatná. Dôvodom je to, že všetky jasnosti, ktoré porovnávame, sú jasnosti svetla už do vlaku vniknuvšieho, čo nám zabezpečuje neporušenosť ich pomerov. Takisto sa zbavíme neznámeho parametra  $r$ . Po predelení rovnice pre pravú stranu tou pre ľavú dostávame

$$p = \frac{3}{12} \frac{1}{p}$$

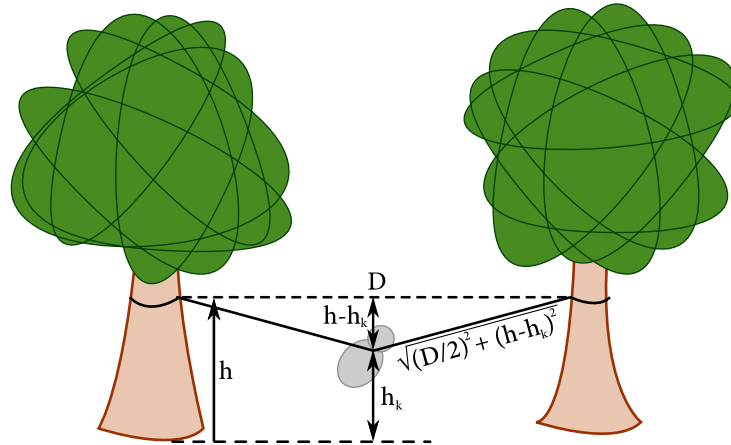
a po pramálo záživnom vyriešení sa dostávame k výsledku

$$p = \frac{1}{2}$$

**25** Úlohu vyriešime zákonom zachovania energie. Stačí si spomenúť, že potenciálna energia pružinky je  $\frac{1}{2}k(\Delta L)^2$ , kde  $\Delta L$  je jej predĺženie oproti jej pokojovej dĺžke. Na začiatku mali pružné laná nulovú pokojovú dĺžku, potom, ako ich domorodci natiahli pomedzi stromy, mala každá pružina dĺžku  $D/2$ . Preto potenciálna energia jednej pružiny, prv ako na ňu skočila opica, bola  $\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2$  a potenciálna energia oboch pružín teda  $k\left(\frac{D}{2}\right)^2$ .

Na začiatku má drzá opica nulovú kinetickú energiu a potenciálnu energiu  $MgH$ .

Označme  $h_k$  výšku nad zemou, v ktorej nakoniec skončí opica s natiahnutým lanom. Pri maximálnom možnom natiahnutí pružín má opica nulovú rýchlosť a potenciálnu energiu  $Mgh_k$ . Energia  $Mg(H - h_k)$  sa uložila do potenciálnej energie pružín.



Obrázok 15: Opica v najnižšom bode

Po troške geometrie prídeme na to, že pružiny majú teraz dĺžku  $\sqrt{(h-h_k)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}$ . Uvedomeli všetkých múdrych pozorovaní sa môžeme smelo pustiť do napísania zákona zachovania energie:

$$Mg(H-h_k) + 2\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2}k\left(\sqrt{(h-h_k)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}\right)^2,$$

$$Mg(H-h_k) + 2\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2}k\left((h-h_k)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right),$$

$$Mg(H-h_k) = k(h-h_k)^2.$$

Dostali sme sa ku kvadratickej rovnici, ktorej riešenia sú

$$h_k = h - \frac{Mg}{2k} \pm \frac{1}{2k} \sqrt{M^2g^2 + 4kMg(H-h)}.$$

Ako zistíme, ktoré z nich je fyzikálne to správne? Stačí, ak sa pozrieme na nejaký špeciálny prípad, napríklad  $H = h$ . Pôvodná rovnica a jej riešenie sa potom zredukuje na

$$Mg(h-h_k) = k(h-h_k)^2 \Rightarrow h_k = h - \frac{Mg}{k}.$$

Toto riešenie dostaneme z riešenia kvadratickej rovnice, ak si vyberieme to riešenie spomedzi dvoch, pri ktorom je znamienko mínus.

Preto správny výsledok je

$$h - \frac{Mg}{2k} - \sqrt{\left(\frac{Mg}{2k}\right)^2 + \frac{Mg}{k}(H-h)}$$

alebo aj

$$h - \frac{Mg}{2k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k}{Mg}(H-h)}\right).$$

**26** Nieto v tomto príklade žiadneho zbytočného pôvabu, treba nám akurát spočítať momenty zotrvačnosti a síl. Vďaka bodovosti všetkých závaží dostávame moment zotrvačnosti sústavy pomerne svižne ako:

$$I = mr^2 + 2mr^2 + \dots + 12mr^2 = 78mr^2.$$

Ostáva popočítať momenty síl (onakvejší fyzici si samotný výpočet môžu ešte zjednodušiť, avšak nevelmi):

$$N = \left( 12 \cdot 0 + 11 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} \right) mgr,$$

$$N = 6(2 + \sqrt{3}) mgr.$$

Výsledok je teda

$$\varepsilon = \frac{N}{I} = \frac{2 + \sqrt{3}}{13} \frac{g}{r}.$$

**27** Naša fyzikálna intuícia nám hovorí, že dôvodom zmeny frekvencie zvuku je Dopplerov efekt. Pripomeňme si teda vzťah, ktorý túto zmenu popisuje:

$$f' = \frac{c \pm v_r}{c \mp v_s} f,$$

kde  $c$  je rýchlosť vlnenia,  $v_r$  rýchlosť pozorovateľa a  $v_s$  rýchlosť zdroja. Znamienka vyberáme podľa toho, či sa zdroj, resp. pozorovateľ, približuje alebo vzdaluje. V našom prípade vieme, že pri približovaní lietadla je počutý tón o pol oktávy vyšší, teda

$$\sqrt{2}f = \frac{c}{c - v} f,$$

kde  $v$  je rýchlosť lietadla. Odtiaľ dostávame

$$v = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} c.$$

V momente, keď sa lietadlo začne vzdalovať, platí

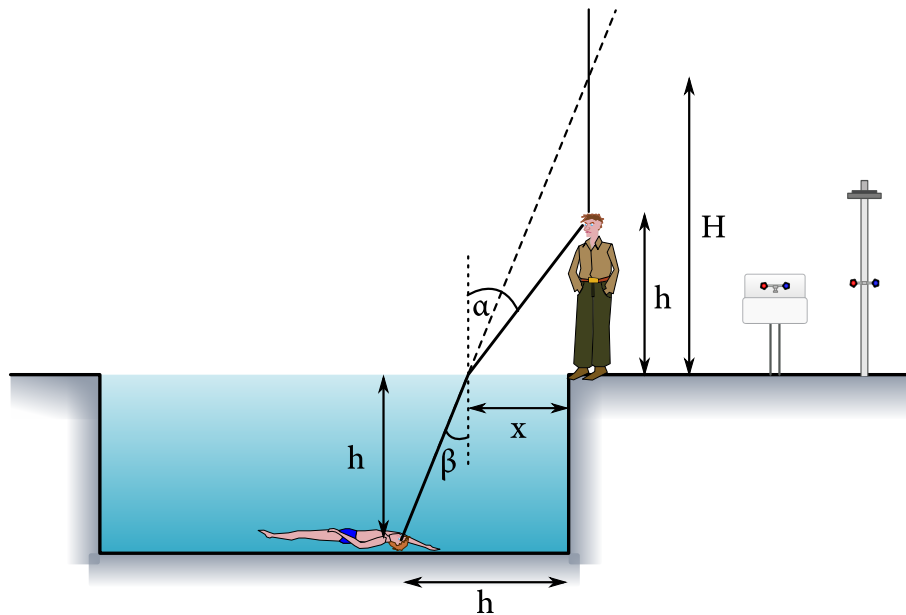
$$f' = \frac{c}{c + v} f$$

a po dosadení rýchlosti lietadla

$$f' = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} f.$$

**28** Označme jedinú vzdialenosť zo zadania ako  $h$  a nakreslime si obrázok. Pozrime sa na lúč, ktorý prichádza od hlavy Adama a smeruje do Jožkových očí. Ten sa zlomí vo vzdialenosti  $x$  od okraja bazéna. Ak nájdeme túto vzdialenosť, zdanlivú výšku Adama  $H$  už nájdeme ľahko z jednoduchej podobnosti trojuholníkov

$$H = h \frac{x}{h - x}.$$



Obrázok 16: Analýza situácie

Ako však nájsť vzdialenosť  $x$ ? Môžeme buď využiť Snellov zákon alebo Fermatov princíp extrémálneho času.

### Snellov zákon

Ak si zvolíme cestu Snellovho zákona, dostaneme sa k rovnici

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = n \frac{(h-x)}{\sqrt{(h-x)^2 + h^2}},$$

$$\frac{x^2}{x^2 + h^2} = n^2 \frac{(h-x)^2}{(h-x)^2 + h^2},$$

⋮

$$0 = (n^2 - 1)(2x^2h^2 - 2x^3h + x^4) + n^2(h^4 - 2xh^3).$$

Túto rovnicu nevieme riešiť, pretože je až štvrtého stupňa, avšak môžeme sa pokúsiť riešiť ju numericky. Azda najjednoduchšia metóda, akú môžeme použiť, je *binárne vyhľadávanie*. Nemusíte sa báť, nie je to nič strašné. Najprv si však z rovnice urobíme funkciu  $f(x) = (n^2 - 1)(2x^2h^2 - 2x^3h + x^4) + n^2(h^4 - 2xh^3)$ . Teraz sa budeme pozeráť, ako sa mení znamienko tejto funkcie na nejakom intervale.

Ak sa totiž zmení znamienko na našom intervale, určite tam bude ležať koreň.<sup>1</sup> Celá myšlienka je založená na rozumnom zmenšení tohto intervalu, napríklad tak, aby sa hodnoty  $x$  vypočítané zo začiatočného a konečného bodu intervalu príliš nelíšili.

- Na začiatku si tipneme, v akom intervale  $[l; r]$  bude ležať riešenie. V našom prípade to je ľahké, riešenie určite leží medzi 0 a  $h = 2$  m (prvotný tip).

<sup>1</sup>Toto tvrdenie v skutočnosti platí iba pre spojité funkcie – také, ktorých graf sa dá „nakresliť jedným ťahom“.

- Následne sa pozrieme na hodnotu funkcie  $f(x)$  v bode  $\alpha = \frac{l+r}{2}$ . Podľa toho, aké je znamienko funkcie v tomto bode, si v ďalšom kroku zoberieme znovu taký interval, na ktorom sa mení znamienko funkcie. Čiže zmeníme buď  $l$  alebo  $r$  na terajší stred.
- Postup opakujeme, pokiaľ interval nie je dostatočne malý, v našom prípade pokiaľ sa vypočítané hodnoty  $x$  nelíšia viac ako na prvom desatinnom mieste.

Po niekoľkých iteráciách sa dostaneme k hodnote  $x = 1,18$  m, čomu zodpovedá hodnota  $H$  v intervale od 2,8 m po 3,0 m (v závislosti od toho, ako presne zaokrúhlime v priebežných výpočtoch).

### Fermatov princíp

Ako nájsť riešenie inak? Môžeme skúsiť využiť Fermatov princíp, teda fakt, že svetlo sa šíri po dráhe, ktorú prejde za extrémálny čas. V tom prípade chceme optimalizovať čas, za ktorý prejde svetlo nasledujúcu spomínanú dráhu, čiže funkciu

$$t(x) = \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{n}{c} \sqrt{(h-x)^2 + h^2}.$$

Tu nám pomôže skúsiť si načrtnúť graf, resp. vypočítať si hodnotu funkcie  $\frac{1}{c} \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{n}{c} \sqrt{(h-x)^2 + h^2}$  v intervale  $x \in [0 \text{ m}; 2 \text{ m}]$  každých 0,2 m, nájsť interval, kde je čas najmenší a potom postup zopakovať na tomto intervale. Po troche práce sa opäť dostaneme k hodnote  $x = 1,18$  m, čomu zodpovedá hodnota  $H$  v intervale od 2,8 m po 3,0 m (v závislosti od toho, ako presne zaokrúhlime v priebežných výpočtoch).

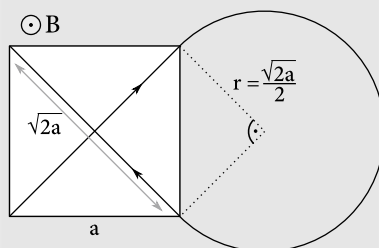
- 29** Najmenší tok svetla, ktorý Jano ešte rozozná, vieme určiť z údajov o žiarovke:

$$F_{\min} = \frac{0,04 \cdot 100 \text{ W}}{4\pi (100\,000 \text{ m})^2} = \frac{1}{\pi} \times 10^{-10} \text{ W m}^{-2}.$$

Solárna konštanta  $F_{\odot}$  udáva tok slnečnej energie vo vzdialenosti  $R_{\oplus} = 1 \text{ AU} \doteq 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \doteq 4,86 \times 10^{-6} \text{ pc}$ . Výkon viditeľného slnečného žiarenia je potom  $0,36 \cdot F_{\odot} 4\pi R_{\oplus}^2$ , čiže tok viditeľného svetla zo Slnka vo vzdialenosti  $D$  je  $F = 0,36 \cdot F_{\odot} \frac{R_{\oplus}^2}{D^2}$ . My hľadáme presne takú vzdialenosť, kedy tento tok bude rovný práve  $F_{\min}$ . Jednoduchým výpočtom zistíme, že je to približne 19 pc.

- 30** Vieme, že nabité častice v homogénnom magnetickom poli opisujú kruhové dráhy. Z rovnosti dostredivej a magnetickej sily dostávame polomer ich dráhy  $r = \frac{mv}{QB}$ , kde  $m$  je hmotnosť a  $v$  rýchlosť pohybu častice.

Uhlopriečky štvorca so stranami dĺžky  $a$  museli byť dotyčnicami ku kruhovej trajektórii častice, teda jej polomer je  $\frac{\sqrt{2}a}{2}$  ako na obrázku.



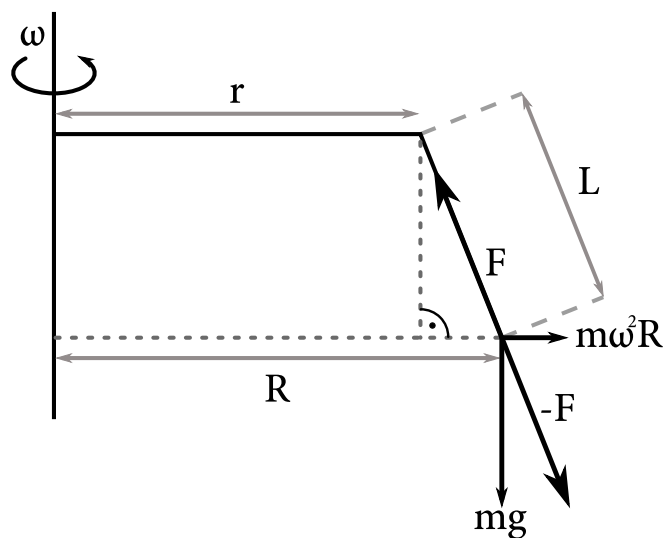
Obrázok 17: Trajektória častice

Čas  $t$  dáva do súvisu rýchlosť a dĺžku uhlopriečky  $\sqrt{2}a$ :  $v = \frac{\sqrt{2}a}{t}$ . Po dosadení dostávame

$$m = \frac{QBr}{v} = \frac{QB\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{\sqrt{2}a}{t}} = \frac{QBt}{2}.$$

**31** V hraničnom prípade musí blcha použiť svoju plnú silu  $F$  na vykompenzovanie pôsobenia síl v rotujúcej sústave, t. j. odstredivej a gravitačnej sily. Vladko sa musí nachádzať v podobnej silovej rovnováhe, i keď na rozdiel od blychy má na nesenie svojho bremena reťaz. To nám zaručuje rovnosť pomerov (je to podobnosť pomyselných trojuholníkov, viď obrázok)

$$\frac{R-r}{L} = \frac{m\omega^2 R}{F}.$$



Obrázok 18: Situácia so zakreslenými pôsobiacimi silami

Zároveň vďaka kolmosti odstredivej a gravitačnej sily platí

$$m\omega^2 R = \sqrt{F^2 - m^2 g^2}.$$

To nám umožňuje odstrániť z prvej rovnice všetky  $R$ , čím dostávame

$$\frac{\sqrt{F^2 - m^2 g^2}}{m\omega^2} - r = \frac{\sqrt{F^2 - m^2 g^2}}{F}.$$

Ostáva nám málo slastný, ale konceptom nenáročný úkon vyjadrenia hraničnej uhlovej rýchlosti, čo vyústi do výsledku, ktorého jeden z možných tvarov je

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2} - g^2}}{r + L\sqrt{1 - \frac{m^2 g^2}{F^2}}}.$$

**32** Uvedomme si, že ak si má opica udržiavať konštantnú mieru aktivity, musí rozpadnuté atómy draslíka priebežne dopĺňať. Vieme, že jej aktivita je  $A = 10^8$  Bq, čo znamená, že každú sekundu príde práve o  $10^8$



atómov rádioaktívneho draslíka  $^{40}\text{K}$ . Tie musí doplniť skonsumovaním banánu. Jeden banán obsahuje  $N = \frac{mN_A}{M_m}$  atómov rádioaktívneho draslíka, kde  $M_m \approx 40 \text{ g mol}^{-1}$  je molová hmotnosť  $^{40}\text{K}$ .

Aby bola opica v stave dynamickej rovnováhy, počet rozpadnutých atómov musí byť rovný počtu prijatých atómov, z čoho vyplýva  $A \stackrel{!}{=} fN$ , kde  $f$  je frekvencia jedenia banánov. Dĺžková rýchlosť jedenia banánov je potom  $v = Lf = \frac{L A M_m}{m N_A}$ , kde  $L = 20 \text{ cm}$  je dĺžka banánu.

Dosadením číselných hodnôt získame výsledok  $v \doteq 2,2 \times 10^{-11} \text{ m/s} = 22 \text{ pm/s}$ .

**33** Vieme, že nabitá platňa produkuje homogénne elektrické pole okolo nej s veľkosťou  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  v smere od platne. Pre dve rovnakým nábojom nabité platne sa ale tieto polia presne vynušia. Výsledná sila pôsobiaca na protóny bude teda nulová. Protóny sa preto po čase dostanú do všetkých bodov priestoru medzi platňami.

**34** Na začiatok si pripomeňme, ako je definovaná intenzita zvuku a hladina intenzity zvuku. Pre intenzitu zvuku platí  $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ , kde  $P$  je výkon zdroja a  $r$  je vzdialenosť od zdroja. Hladina intenzity zvuku je  $L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$ , kde  $I_0$  je referenčná hodnota. Čo to pre Kvíka znamená?

Keď Kvík počúva hudbu zo slúchadiel, pravé ucho počuje iba pravé slúchadlo a ľavé ucho iba ľavé slúchadlo. A teda ak zvýši výkon pravého slúchadla, respektíve intenzitu dopadajúcu na pravé ucho, neovplyvní to ľavé ucho. Z toho, že si Kvík musel zosilniť pravé slúchadlo o +3 dB teda vyplýva, že výkon, respektíve intenzita pravého slúchadla, je  $10^{\frac{3}{10}}$ -krát väčšia ako ľavého. A teda intenzita dopadajúca do pravého ucha je potláčaná faktorom  $k = 10^{-\frac{3}{10}} \doteq 0,5$ .

Pri reproduktoroch je to trochu komplikovanejšie, keďže každé ucho počuje zvuk z oboch reproduktorov. Kvík potrebuje na pravý reproduktor korekciu +13 dB, to znamená, že pomer intenzít, respektíve výkonov, pravého a ľavého reproduktora je  $q = 10^{\frac{13}{10}}$ . Ak si teraz označíme vzdialenosť reproduktorov ako  $2L$  a šírku hlavy ako  $2x = 15 \text{ cm}$ , intenzity zvuku vnímané ľavým a pravým uchom sú postupne

$$I_L = \frac{P}{4\pi(L-x)^2} + \frac{qP}{4\pi(L+x)^2},$$

$$I_R = k \left( \frac{P}{4\pi(L+x)^2} + \frac{qP}{4\pi(L-x)^2} \right).$$

Výkony reproduktorov a slúchadiel sú však nastavené tak, aby tieto hodnoty boli rovnaké. Odčítaním týchto rovníc dostaneme ľahko riešiteľnú kvadratickú rovnicu pre  $L$ :

$$\frac{P - kqP}{4\pi(L-x)^2} = \frac{kP - qP}{4\pi(L+x)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}} = \frac{L+x}{L-x}.$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť  $L$ :

$$L = \frac{1 + \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}}}{1 - \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}}} x,$$

$$L = \frac{(1+k)(1-q) + 2\sqrt{(1-kq)(k-q)}}{(k-1)(1+q)} x.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame pre vzdialenosť reproduktorov  $2L \doteq 79 \text{ cm}$ .

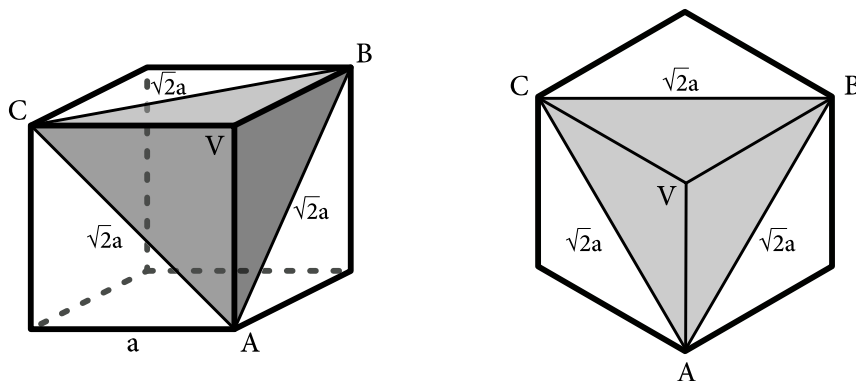
**35** Označme si pracovne Dušanovu hranu  $a$ . Ako sa nám zadanie snaží napovedať, treba sa naňho pozeráť ako na dokonale čierne teleso. Takéto teleso pohlcuje všetko žiarenie, ktoré naň dopadá, a pre jeho vyžarovanie platí Stefan-Boltzmannov zákon. Ten hovorí, že celkový výkon žiarenia vyžarovaného na všetkých vlnových dĺžkach je úmerný ploche, cez ktorú vyžarovanie prebieha, a štvrtej mocniny teploty telesa.

V stave tepelnej rovnováhy musí platiť, že výkon žiarenia dopadajúceho zo Slnka musí byť rovný výkonu, ktorý Dušan vyžiari. Nech je natočený akokoľvek, vyžaruje vždy rovnaký výkon – vyžarovanie totiž prebieha cez celú plochu plášťa kocky. Celkový vyžiarený výkon tepelného žiarenia je preto  $\sigma 6a^2 T^4$ , kde  $\sigma$  je Stefan-Boltzmannova konštanta a  $T$  je povrchová teplota kocky.

To, či dosiahne malú alebo veľkú teplotu, je dané tým, koľko žiarenia zo Slnka naňho dopadne. Množstvo žiarenia je úmerné ploche priemetu kocky pri pohľade zo Slnka, ktorú označíme  $S$ . Teplotu, na ktorej sa Dušan ustáli v stave termodynamicknej rovnováhy, potom nájdeme jednoducho položením absorbovaného a vyžiareného výkonu do rovnosti. Nech  $F$  je tok<sup>2</sup> žiarenia zo Slnka. Potom

$$FS = \sigma 6a^2 T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{FS}{\sigma 6a^2}}$$

Najmenšiu možnú plochu zjavne dosiahneme, ak sa Dušan natočí tak, že jedna jeho stena je kolmá na spojnicu jeho stredu a Slnka. Potom je jeho priemetom štvorec s hranou  $a$ , čomu prislúcha plocha  $a^2$ .



Obrázok 19: Kocka natočená k Slnku najväčšou možnou plochou

Najväčšiu možnú plochu priemetu dosiahneme, ak kocku natočíme smerom k Slnku jednou z telesových uhlopriečok. Inak povedané, rovina daná bodmi A, B a C je kolmá na spojnicu stredu kocky a Slnka. Vtedy kocku zo Slnka vidíme ako pravidelný šesťuholník, ktorému je vpísaný rovnostranný trojuholník A, B a C s hranou  $\sqrt{2}a$ .

Obsah pravidelného šesťuholníka je rovný dvojnásobku obsahu vpísaného rovnostranného trojuholníka (pozri obrázok). Pomocou trochy geometrie a Pytagorovej vety zistíme, že výška nášho rovnostranného trojuholníka je rovná  $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a$ . Obsah trojuholníka je potom rovný  $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a\right)\sqrt{2}a$  a obsah šesťuholníka je  $\sqrt{3}a^2$ .

<sup>2</sup>výkon žiarenia na jednotku plochy

Najmenšia a najväčšia teplota, ktorú môže Dušan dosiahnuť, je teda

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{Fa^2}{\sigma 6a^2}},$$

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{F\sqrt{3}a^2}{\sigma 6a^2}}.$$

Odtiaľ

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \sqrt[8]{3}.$$

### Poznámka k ploche priemetu kocky

Punktičkársky čitateľ akiste zatúžil po dôkaze, že plocha priemetu kocky naozaj nadobúda minimálnu hodnotu pri natočení stenou a maximálnu hodnotu pri natočení k zdroju telesovou uhlopriečkou.

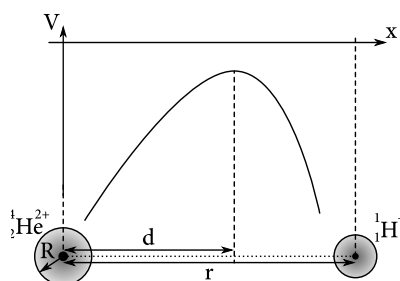
Priemet jednej steny kocky – čiže štvorca – jednotkovej veľkosti môžeme vyjadriť ako skalárny súčin jednotkového normálového vektora a jednotkového vektora v smere projekčného lúča. Z ľubovoľného smeru môžeme naraz vidieť najviac tri steny kocky, ktorých normálové vektory sú na seba kolmé (označme ich  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  a  $\hat{z}$ ). Celková plocha priemetu pri pohľade zo všeobecného smeru  $(x, y, z)$  bude súčtom priemetov jednotlivých stien a jej veľkosť bude

$$(|x|, |y|, |z|) \cdot (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) = |x| + |y| + |z|.$$

Zo symetrie kocky by sme mali vidieť, že stačí uvažovať ľubovoľný oktant, napríklad prvý (kde rovno platí  $x, y, z > 0$ ). Pôvodnú úlohu teda dokážeme previesť na hľadanie minima, resp. maxima funkcie  $\varphi(x, y, z) = x + y + z$  za podmienky  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , keďže veľkosť nášho vektora  $(x, y, z)$  musí byť rovná jednej. Táto funkcia dosahuje

- minimum, keď je jedna zo súradníc rovná 1 a zvyšné dve súradnice sú rovné nule, čo zodpovedá pohľadu kolmo na niektorú stenu
- maximum pre  $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , čo zodpovedá pohľadu pozdĺž telesovej uhlopriečky.

**36** Elektrón v blízkosti jadra hélia sa nachádza v potenciálovej jame. V okolí protónu sa taktiež nachádza potenciálová jama. Zaujímá nás, akú najmenšiu energiu musí mať elektrón, aby unikol z potenciálovej jamy hélia, t. j. aby prekonal potenciálovú bariéru medzi jamami.



Obrázok 20: Priebeh potenciálu

Ako prvé si zrátajme polohu maxima potenciálovej bariéry  $d$ . V momente, keď ho elektrón dosiahne, je naň výsledná pôsobiacia sila nulová, teda elektrostatická sila od hélia je rovná elektrostatickej sile od protónu. Ma-

tematicky vyjadrené

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(r-d)^2}.$$

Odtiaľ dostávame polohu maxima

$$d = (2 - \sqrt{2})r.$$

Nájďme teraz priebeh potenciálu na spojnici jadra hélia a protónu. Nech  $x$  označuje vzdialenosť od stredu jadra hélia. Potom výsledný potenciál je superpozíciou potenciálov od jadra a protónu

$$V(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e}{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r-x} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 x} \frac{2r-x}{r-x}.$$

Konečne môžeme určiť energiu, ktorú musí mať elektrón, aby unikol z dosahu jadra, ako rozdiel potenciálnej energie elektrónu na vrchole potenciálovej bariéry a potenciálnej energie na povrchu jadra,

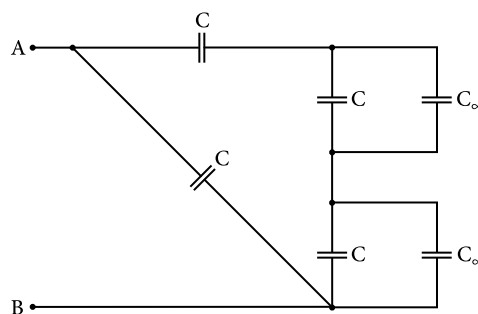
$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2r-R}{R(r-R)} - \frac{\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)r} \right).$$

S využitím  $r = 11R$  dostávame

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{201 - 20\sqrt{2}}{110R} \right).$$

**37** Nekonečne veľa kondenzátorov by na prvý pohľad mohlo vyzerať na nekonečne veľa práce, no stačí si uvedomiť pár vecí a riešenie tohto príkladu sa výrazne zjednoduší. Jednak Kvík v každom kroku pripájal do obvodu rovnakú súčiastku zloženú zo štyroch kondenzátorov, dvak Kvíkovu nekonečnú schému vieme zložiť z dvoch ďalších nekonečných schém, ktoré pripojíme k základnej súčiastke. Čaro nekonečien. Ak sa vám to nezdá, skúste chvíľku kontemplanovať a možno vás osvieti.

Ak si označíme výslednú kapacitu schémy  $C_\infty$ , vieme si ju prekresliť nasledovne:



Obrázok 21: Prekreslená schéma

To už máme iba sériové a paralelné zapojenia kondenzátorov. Kapacity paralelných kondenzátorov sa sčítavajú a pri sériovo zapojených kondenzátoroch sa sčítavajú ich prevrátané hodnoty. Dostaneme teda rovnicu

$$C_\infty = \frac{C^2 + CC_\infty}{3C + C_\infty} + C.$$

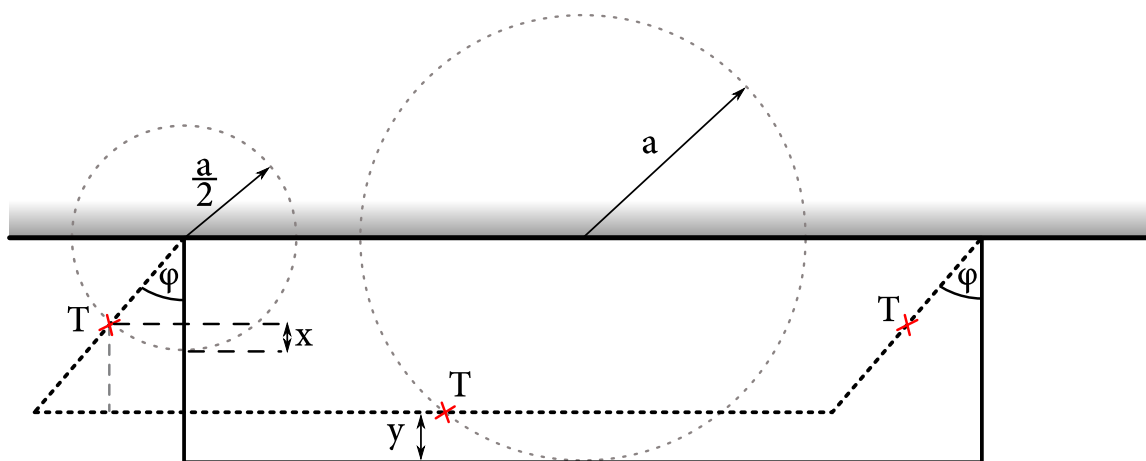
Po úprave a vyriešení kvadratickej rovnice pre  $C_\infty$  dostaneme

$$C_\infty = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 16C^2}}{2}.$$

Keďže výsledná kapacita nemôže byť záporná, správny výsledok je

$$C_\infty = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} C.$$

**38** Nato, aby sme vypočítali periódu malých kmitov rámčeka, je potrebné popísať pohyb jednotlivých častí rámčeka, respektíve pohyb ich ťažísk. Krátke tyčky dĺžky  $a$  zavesené na stene budú vykonávať otáčavý pohyb okolo ich závesov, a teda aj ich ťažiská sa budú pohybovať po kružniciach s polomerom  $\frac{a}{2}$ . Ťažisko tyče dĺžky  $b$  sa bude pohybovať po kružnici s polomerom  $a$  ako na obrázku.



Obrázok 22: Vychýlená sústava. Uhol  $\varphi$  je kvôli prehľadnosti prehnaný.

Počítať všetky sily a momenty síl je v takomto prípade veľmi náročné, preto periódu kmitov vypočítame pomocou energií. Začneme kinetickou energiou. Moment zotrvačnosti tyče dĺžky  $l$  okolo konca je vo všeobecnosti  $\frac{1}{3}ml^2$ , čiže kinetická energia krátkej tyčky je

$$E_{kin}^a = \frac{1}{2}I_a\omega^2 = \frac{1}{6}\lambda a^3\omega^2,$$

kde  $\omega$  je uhlová rýchlosť tyčiek. Počítať otáčavý pohyb dlhej tyče, by bolo neskutočne komplikované, no stačí si uvedomiť, že všetky kúsky dlhej tyče sa musia pohybovať rovnakou rýchlosťou a to takou, aká je obvodová rýchlosť koncov krátkych tyčiek. Čiže kinetická energia dlhej tyče je

$$E_{kin}^b = \frac{1}{2}m_b v^2 = \frac{1}{2}\lambda b a^2 \omega^2,$$

a teda celková kinetická energia rámčeka je

$$E_{kin} = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)\lambda a^2 \omega^2.$$

Zostáva ešte potenciálna energia, respektíve zmena potenciálnej energie pri vychýlení o uhol  $\varphi$ . Ťažisko krátkych tyčiek sa zdvihne o  $x = \frac{a}{2}(1 - \cos \varphi)$  a dlhšej tyče o  $y = a(1 - \cos \varphi)$ . To znamená, že celková potenciálna energia rámčeka je pri vychýlení o uhol  $\varphi$

$$E_{pot} = 2\lambda a gx + \lambda bgy = \lambda a(a + b)g(1 - \cos \varphi).$$

Tento výsledok však nie je finálny. Pri malých kmitoch oscilátora sme zvyknutí, že potenciálna energia závisí kvadraticky od výchylky, vďaka čomu dostávame jednoducho riešiteľné rovnice. Preto aj v tomto prípade urobíme Taylorov rozvoj  $1 - \cos \varphi$  do druhého rádu okolo minima a dostaneme

$$E_{pot} \approx \lambda a(a + b)g \frac{\varphi^2}{2}.$$

Teraz by sme mohli z týchto energií odvodiť pohybové rovnice, no stačí si všimnúť, že fyzikálne kyvadlo vykonáva harmonické kmity, preto možno využiť analógiu s harmonickým oscilátorom. Pre harmonický oscilátor platí  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$  a perióda oscilátora je  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . Analogicky teda nájdeme vzťah pre periódu hojdačky pomocou príslušných výrazov stojacich vo vyjadreniach energií pred  $\omega^2$ , resp.  $\varphi^2$ . Dostávame

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)\lambda a^2}{\frac{1}{2}\lambda a(a + b)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}a + b\right)a}{(a + b)g}}.$$

**39** Uvažujme planétu hmotnosti  $M$  a jej mesiac hmotnosti  $m = \frac{M}{10}$  vo vzájomnej vzdialenosti  $R$ . Hmotnosti týchto dvoch objektov sú porovnateľné, preto musíme uvažovať, že obiehajú okolo spoločného ťažiska.

Ako prvé si nájdime vzdialenosti objektov od ťažiska. Označme vzdialenosť mesiaca od ťažiska  $r$ . Potom

$$r = \frac{M}{M + m}R, \quad R - r = \frac{m}{M + m}R.$$

Teraz nájdime rýchlosti planéty a mesiaca. Z rovnosti dostredivej a gravitačnej sily pre mesiac dostávame

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_0^2}{r} \quad \longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{G}{R(M + m)}}M$$

a pre planétu

$$G\frac{Mm}{R^2} = M\frac{V_0^2}{R - r} \quad \longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{\frac{G}{R(M + m)}}m.$$

Teraz príde Gandalf a zmení hmotnosť planéty, pričom jej rýchlosť zostáva nezmenená. Máme teda planétu hmotnosti  $M'$  pohybujúcu sa rýchlosťou  $V_0$  a mesiac hmotnosti  $m$  pohybujúci sa opačným smerom rýchlosťou  $v_0$ . Energia tejto sústavy je

$$E = \frac{1}{2}M'V_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M'm}{R} = \frac{1}{2}M'\frac{Gm^2}{R(M + m)} + \frac{1}{2}m\frac{GM^2}{R(M + m)} - G\frac{M'm}{R}.$$

Pozrime sa na sústavu ako na jeden celok. Keďže na ňu nepôsobia vonkajšie sily, musí sa zachovávať hybnosť sústavy, čo implikuje, že rýchlosť pohybu ťažiska sa nemení. Nájdime teda rýchlosť pohybu ťažiska

$$v_T = \frac{mv_0 - M'V_0}{M' + m} = \sqrt{\frac{G}{R(M + m)}}\frac{m(M - M')}{M' + m}.$$

Teraz sa zamyslime, čo je podmienkou uniknutia mesiaca z dosahu gravitačného pôsobenia planéty. Štandardne sa požaduje, ak uvažujeme nehybnú planétu, aby kinetická energia mesiaca v nekonečne bola nulová. Ak však máme hýbucu sa planétu a mesiac zastane, kvôli pohybu planéty sa bude meniť potenciálna energia sústavy, takže zastavenie mesiaca nebude zodpovedať minimu energie a mesiac začne opäť zrýchľovať. Podmienkou uniknutia mesiaca musí teda byť, aby v nekonečnej vzdialenosti boli rýchlosti mesiaca a planéty rovnaké. Potenciálna energia pri nekonečnej vzájomnej vzdialenosti bude nulová, takže sústava bude mať iba kinetickú energiu. Vieme však, že rýchlosť ťažiska sa nemá meniť, preto je energia sústavy

$$E = \frac{1}{2} (M' + m) v_T^2 = \frac{Gm^2 (M - M')^2}{2R (M + m) (M' + m)}.$$

Zo zákona zachovania energie platí

$$\frac{1}{2} M' \frac{Gm^2}{R (M + m)} + \frac{1}{2} m \frac{GM^2}{R (M + m)} - G \frac{M'm}{R} = \frac{Gm^2 (M - M')^2}{2R (M + m) (M' + m)}.$$

Odtiaľ sa postupnými úpravami dostaneme k výsledku

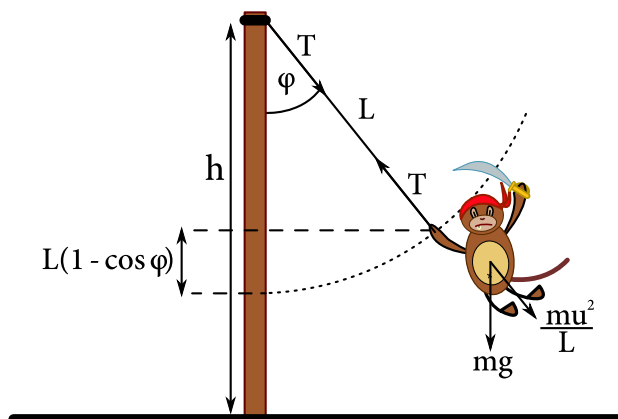
$$M' = \frac{M - m}{2}.$$

Pre  $m = \frac{M}{10}$  potom dostávame

$$M' = \frac{9}{20} M.$$

**40** Na začiatok sa zamyslime, aká sila pôsobí na sťažň a snaží sa ho otočiť okolo jeho päty. V mieste upevnenia lana k sťažňu pôsobí napäťová sila lana  $T$ . Tá musí v každom okamihu udržať Johnnyho na opačnom konci lana na kružnici s polomerom  $L$ , preto musí kompenzovať zložku tiažovej sily  $mg \cos \varphi$  a celú odstredivú silu (vo vzťažnej sústave spojenjej s Johnnyho)  $mu^2/L$ , kde  $u$  je aktuálna Johnnyho rýchlosť. Preto

$$T = mg \cos \varphi + \frac{mu^2}{L}.$$



Obrázok 23: Situácia so zakreslenými silami

Aktuálnu rýchlosť Johnnyho určíme zo zákona zachovania energie. Nulovú hladinu potenciálnej energie pre jednoduchosť položíme na miesto, kde lano voľne visí zo sťažňa. Ak vychýlime Johnnyho držiaceho sa lana

o uhol  $\varphi$ , potenciálna energia sa zvýši o  $mgL(1 - \cos \varphi)$ . Na začiatku mal potom Johnny nulovú potenciálnu energiu a nenulovú kinetickú energiu  $mv^2/2$ . Zo zákona zachovania energie platí

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + mgL(1 - \cos \varphi),$$

$$mu^2 = mv^2 - 2mgL(1 - \cos \varphi),$$

Moment sily pôsobiaci na päť sťažňa ako funkcia uhla  $\varphi$  je potom

$$M(\varphi) = Th \sin \varphi = h \left( mg \cos \varphi + \frac{mv^2 - 2mgL(1 - \cos \varphi)}{L} \right) \sin \varphi,$$

$$M(\varphi) = \frac{h}{L} (mgL \cos \varphi + mv^2 - 2mgL(1 - \cos \varphi)) \sin \varphi,$$

$$M(\varphi) = \frac{h}{L} (mv^2 - 2mgL + 3mgL \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Na to, aby sme našli maximum predchádzajúcej funkcie, sa nevyhneme derivovaniu. Derivovaním prechádzajúcej funkcie získame výraz

$$\frac{dM(\varphi)}{d\varphi} = \frac{h}{L} ((mv^2 - 2mgL) \cos \varphi + 3mgL(-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)),$$

využitím trigonometrickej identity  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  prepíšeme celú deriváciu tak, že sa v nej nachádzajú iba mocniny  $\cos \varphi$ ,

$$\frac{dM(\varphi)}{d\varphi} = \frac{h}{L} ((mv^2 - 2mgL) \cos \varphi + 3mgL(-1 + 2\cos^2 \varphi)),$$

V maxime musí byť prvá derivácia nulová, čím sa dostávame k riešeniu nasledujúcej kvadratickej rovnice pre  $\cos \varphi$ ,

$$\frac{h}{L} ((mv^2 - 2mgL) \cos \varphi - 3mgL + 6mgL \cos^2 \varphi) = 0,$$

$$(v^2 - 2gL) \cos \varphi - 3gL + 6gL \cos^2 \varphi = 0.$$

Jej riešením získame dve riešenia

$$\cos \varphi = -\frac{v^2 - 2gL}{12gL} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{12gL}{v^2 - 2gL} \right)^2} \right).$$

Zo zadania vieme, že opica nemá v okamihu zachytenia sa dostatočnú rýchlosť na to, aby sa prehupla cez vrchol sťažňa, teda platí  $v^2 < 2gL$ . Uvedomujúc si tento fakt možno riešenia zapísať ako

$$\cos \varphi = \frac{2gL - v^2}{12gL} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{12gL}{v^2 - 2gL} \right)^2} \right).$$



Ako vidíme, dostali sme dve riešenia. Na to, aby išlo skutočne o maximum, musí byť druhá derivácia pôvodnej funkcie záporná v mieste, kde je prvá derivácia danej funkcie nulová. Po ďalšom zderivovaní a dosadení riešení zistíme, že maximum nastáva pre riešenie so znamienkom plus. Preto je päta sťažňa namáhaná najväčším momentom napäťovej sily pri uhle

$$\varphi = \arccos \left( \frac{2gL - v^2}{12gL} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{12gL}{v^2 - 2gL} \right)^2} \right) \right).$$

Výsledok možno zapísať taktiež v tvare

$$\varphi = \arccos \left( \frac{2gL - v^2}{12gL} + \sqrt{\left( \frac{2gL - v^2}{12gL} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{2gL - v^2}{12gL}} \right).$$

## Výsledky

**1** Jurkov brat je rýchlejší a predbehne Miškovho o 10 690 nanošestonedelí.

*Uznávajúte výsledky v intervale [10 401; 10 827] nanošestonedelí.*

**2** 32 %

**3** 36 m

**4**  $\frac{\rho_t a^3}{\rho_w \pi R^2}$

**5**  $a + \frac{F}{m}$

**6** 7  $\Omega$ , 12  $\Omega$  a 15  $\Omega$ . *Uznajte, iba ak sú všetky tri správne.*

**7** 5570 km

**8** 10,24 g =  $\frac{256}{25}$  g

**9** 45°

**10**  $20\sqrt{3} \text{ ms}^{-1} \doteq 35 \text{ ms}^{-1}$

**11**  $\frac{a}{2f}$

**12** 1764 m

**13** 0,2 kg

14  $\frac{5\pi}{3\pi+4} \text{ cm} \doteq 1,17 \text{ cm}$

15  $\frac{k_A}{k_A+k_B} n_0$

16  $d \sin \left( \arctan \left( \frac{w}{v} \right) \right) = d \frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}}$

17 14 m

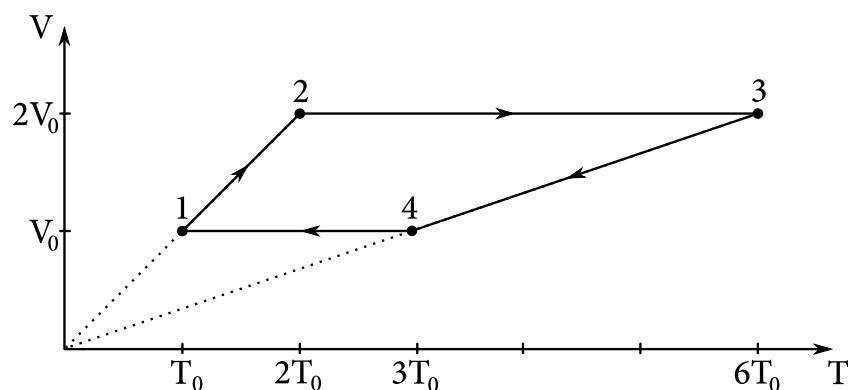
18 Odpor schémy sa môže nachádzať v intervale  $\left[ \frac{3}{5}R; \frac{5}{3}R \right]$ .

19  $2158 \text{ cm}^3$ . Uznávajte aj výsledok  $2284 \text{ cm}^3$ , ktorý dostaneme pri použití  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

20  $\frac{(m+M)g}{4}$

21  $45 \Omega$

22 Dbajte na to, aby odovzdané grafy mali vyznačené všetky dôležité hodnoty na osiach, šípky popisujúce priebeh deja mali správny smer a izobary ležali na priamkach prechádzajúcich cez počiatok.



23  $\sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho} \frac{F}{SE}}$

24  $\frac{1}{2}$

25  $h - \frac{Mg}{2k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4k}{Mg}(H-h)} \right) = h - \frac{Mg}{2k} - \sqrt{\left( \frac{Mg}{2k} \right)^2 + \frac{Mg}{k}(H-h)}$

26  $\frac{2+\sqrt{3}}{13} \frac{g}{r} \doteq 0,287 \frac{g}{r}$

27  $\frac{4+\sqrt{2}}{7} f = \frac{2}{4-\sqrt{2}} f \doteq 0,77 f$

28 Akceptujte výsledky v rozsahu 2,8 – 3,0 m.

29 19 pc

30  $\frac{QBt}{2}$

$$31 \quad \sqrt{\frac{F}{m} \frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2} - g^2}}{rF + L\sqrt{F^2 - m^2g^2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2} - g^2}}{r + L\sqrt{1 - \frac{m^2g^2}{F^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{r}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2} - g^2}} + \frac{mL}{F}}}$$

$$32 \quad 22 \text{ pm/s} = 2,2 \times 10^{-11} \text{ m/s}$$

33 Celý priestor medzi platňami.

$$34 \quad 79 \text{ cm}$$

$$35 \quad \sqrt[8]{3}$$

$$36 \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{201 - 20\sqrt{2}}{110R} \right) \doteq 0,125 \frac{e^2}{\epsilon_0 R} \doteq \frac{3,62 \times 10^{-28} \text{ J}}{R} \doteq \frac{2,26 \text{ neV}}{R}$$

$$37 \quad \left( \sqrt{\frac{17}{4}} - \frac{1}{2} \right) C \doteq 1,56 \text{ C}$$

$$38 \quad 2\pi \sqrt{\frac{(\frac{2}{3}a+b)a}{(a+b)g}} = 2\pi \sqrt{\frac{(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b)a}{\frac{1}{2}(a+b)g}}$$

$$39 \quad \frac{9}{20} M$$

$$40 \quad \arccos \left( \frac{2gL - v^2}{12gL} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{12gL}{v^2 - 2gL} \right)^2} \right) \right) = \arccos \left( \frac{2gL - v^2}{12gL} + \sqrt{\left( \frac{v^2 - 2gL}{12gL} \right)^2 + \frac{1}{2}} \right)$$