Milí čtenáři,

v ruce držíte sbírku úloh 25. ročníku Fyzikálního Náboje. Ve sbírce se nachází všechny úlohy, se kterými jste se v roce 2022 mohli na soutěži potkat. K úlohám přikládáme i vzorová řešení, ze kterých se můžete mnohé naučit. Pokud byste danému vzorovému řešení nerozuměli, neváhejte sa nám ozvat, vše objasníme.

Fyzikální Náboj pokračuje ve své mezinárodní tradici. V roce 2022 se do Náboje zapojily kromě Bratislavy také Košice, Praha, Ostrava, Budapešť, Gdańsk a Madrid. Výsledky vzájemného souboje si můžete prohlédnout na našich stránkách. Za mezinárodní spolupráci děkujeme lokálním organizátorům: Patrik Rusnák (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Šimon Pajger (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Kamil Żmudziński (Gdańsk) a José Francisco Romero García (Madrid).

Tato sbírka by nikdy nevznikla bez výrazné pomoci mnohých lidí, kteří se konec konců podíleli na celém vývoji Fyzikálního Náboje. Autoři Fyzikálního Náboje jsou studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě a většina z nich se také aktivně podílí na organizování Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS – `https://fks.sk/`). V České Republice s překladem a organizací pomohli převážně studenti Matematicko-fyzikální fakulty, kteří se podílejí na české verzi FKS, tedy FYKOSu.

FYKOS je korespondenční fyzikální soutěž. Přibližně jednou za měsíc zveřejňujeme zajímavé fyzikální úlohy, jejichž řešení nám můžete poslat buď poštou nebo elektronicky. My vám příklady obodujeme, opravíme a pošleme zpět. Ty nejlepší z vás zveme na začátku a na konci školního roku na týdenní zážitkové soustředění. Více informací najdete na stránce `https://fykos.cz/`.

Ve jméně celého organizačního týmu věříme, že jste si v roce 2022 Fyzikální Náboj užili a doufáme, že vás všechny uvidíme i příští rok! Ať už v roli soutěžících, nebo nových organizátorů.

Šimon Pajger – hlavní organizátor v ČR

Jaroslav Valovčan – hlavní organizátor

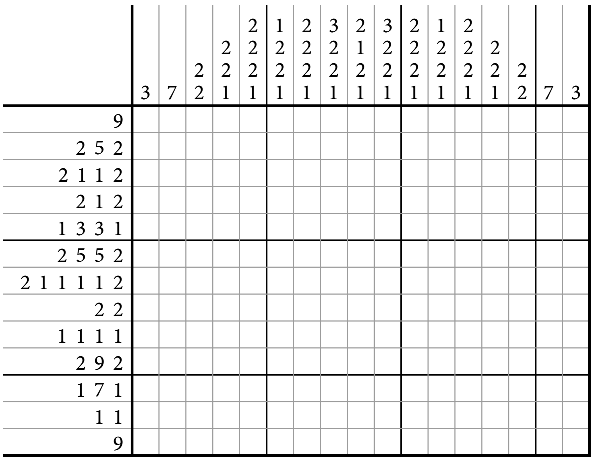
Sbírku sestavili:

Martin ‚Kvík' Baláž
Jozef Csipes
Paulína ‚Jonka' Dujavová
Lucia ‚Želé' Gelenekyová
Jakub Hluško
Dušan Kavický
Jakub ‚Andrej' Kliment
Justína ‚Pľyš' Nováková
Patrik ‚PA3K' Rusnák
Adam Škrlec
Lucia Tóthová
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös

Výsledky soutěže, archiv úloh a další informace najdete na stránce `https://physics.naboj.org/`.

Zadání

1 Babička Justína našla v příloze časopisu Geochimica et Cosmochimica Acta malovanou křížovku. Po jejím úspěšném vyřešení se rozhodla zjistit, kde má výsledný obrázek těžiště. Jaká bude jeho vzdálenost od středu obrázku, kde mají všechny vybarvené čtverečky stejnou hmotnost a a kde všechny nevybarvené čtverečky jsou nehmotné? Délka strany čtverečku je 1.



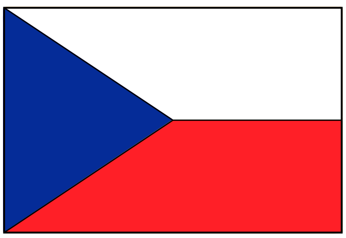
2 Marek se připojil k živému přenosu streamera třicet minut po začátku. Začal proto sledovat video od začátku na 1,75-násobné rychlosti. V jakém čase dožene Marek živý přenos streamera?

Výsledek odevzdávejte ve tvaru `HH:MM:SS`.

3 Český turista šel z Jaloveckej doliny na Baníkov. Celkové převýšení této trasy bylo 1302 metrů, celkově však nastoupal až 1447 metrů. Kolik metrů bude muset dohromady nastoupat, když se bude po stejné trase vracet z Baníkova do Jaloveckej doliny?

4 Na počest nedávného svátku jsme si ze tří jednobarevných kusů stejného plechu poskládali československou vlajku se šířkou 54 cm a výškou 36 cm. Modrý trojúhelník sahal, přirozeně, do poloviny šířky vlajky. Venku na vlajku zasvítilo slunce a každá její část se nahřála na jinou teplotu: bílá na 30 °C, červená na 70 °C a modrá až na 90 °C.

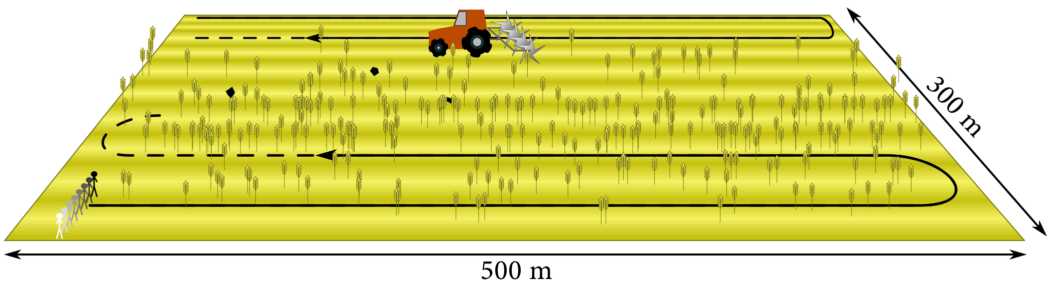
Jaká bude teplota vlajky, pokud ji odizolujeme od okolí a počkáme, dokud se teploty nevyrovnají?



5 Osmičlenný tým FKSáků hledá na poli čerstvě padlý meteorit. Pochodují vedle sebe v rojnici, přičemž každý pokrývá pás široký 2,5 m rychlostí 1 m/s. Vždy, když dojdou na konec pole, se okamžitě přesunou na sousední neprohledaný pás a vydají se směrem zpátky.

Dopadové pole má délku 500 m a šířku 300 m. Ve stejnou dobu, kdy začíná hledání, začíná na druhém konci pole orat traktor. Jeho pluh je široký 10 m, pohybuje se rychlostí 18 km/h a také se po dosažení konce pole okamžitě otáčí. Jaká část pole zůstane **neprohledaná**, pokud hledání musí skončit v okamžiku, kdy se **kterýkoli** z FKSáků setká s traktorem?

Odevzdejte přesný výsledek.



6 Komfort opět převážil nad ekologií… Marcel, Kvík, Paťo a Kubo jedou každý svým vlastním autem na stanici do obce Horná Štubňa. Přes obec jezdí maximální povolenou rychlostí 50 km/h a zabírají tak úsek cesty dlouhý 150 metrů. Pokud budou všichni řídit úplně stejně, jak dlouhý úsek cesty budou zabírat mimo obce, tedy poté, co všichni zrychlí na 90 km/h?

Délky samotných aut zanedbejte.

7 Dano ze své bastlířské skříňky náhodně vytáhnul dva rezistory a zapojil je do obvodu, nejprve sériově a potom paralelně. Když do Danova pelechu večer zabloudila uklízečka, na stole mimo jiné našla papír a na něm napsané dvě hodnoty, 4 Ω a 25 Ω.

Jaké byly odpory jednotlivých rezistorů?

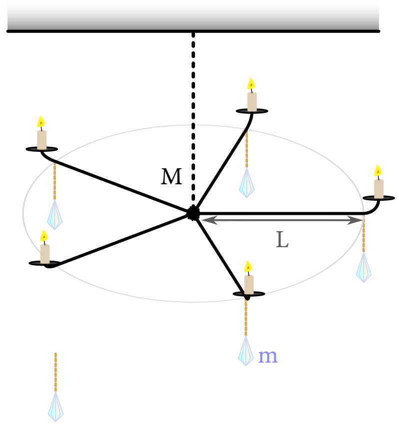
8 Při prohlídce hradu ukazuje kastelán návštěvníkům, jak hluboká je hradní studna. Dokonce si hloubku mohou návštěvníci sami vypočítat. Kastelán hodí kamínek nebo minci a návštěvníci odpočítávají, za jak dlouho dopadne na dno. Potom stačí vynásobit dobu pádu nějakou konstantou k. Samozřejmě konstantu k kastelán nastavil tak, aby hloubka studny na tomto hradě vyšla správně. Vyjádřete, jak lze ze znalosti kastelánovy konstanty k a velikosti tíhového zrychlení g vypočítat hloubku studny.

Rychlost zvuku ve středověké studni považujte za nekonečnou.

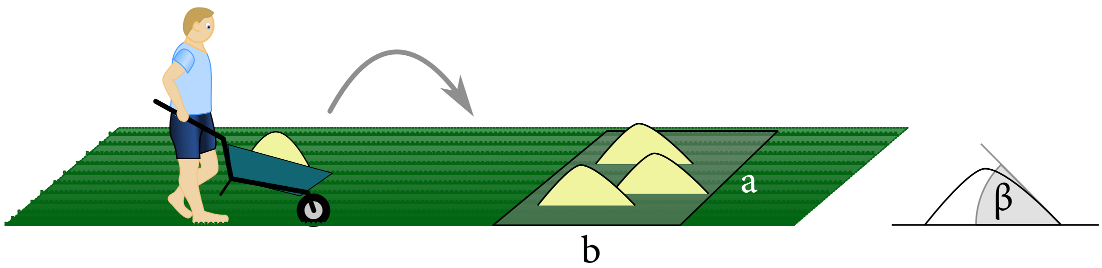
9 Plyš už zase potřebovala umýt ulepené kádinky. Do jedné z nich si připravila roztok acetonu a už si šla navléct rukavice, když se objevil Kvík a zavolal ji na oběd. Roztok ponechaný bez dozoru okamžitě využil příležitosti a začal sa odpařovat. Když se Plyš vrátila, třetina hmotnosti acetonu a desetina hmotnosti vody stihly beze stopy zmizet. Mohla už jen konstatovat, že hmotnostní zlomek acetonu v roztoku klesl o šestinu.

Jakou část hmotnosti původně připraveného roztoku tvořil aceton?

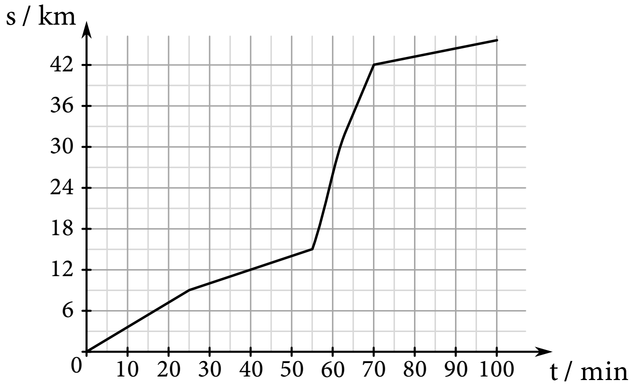
10 Viki má svícen tvořený bodem o hmotnosti M, ze kterého v jedné rovině vystupuje pět lehkých, rovnoměrně rozestavěných ramen délky L, přičemž na každém z nich volně visí ozdoba hmotnosti m. Celý svícen visí ze stropu za středový hmotný bod na dlouhém řetězu. Jaký úhel bude po ustálení svírat rovina ramen svícnu s horizontální rovinou, pokud jedna ozdoba odpadne?



11 Vilo si koupil obdélníkový pozemek s rozměry a a b, přičemž $a \geq b$. Kolik nejvíc písku na něj může nasypat, aby všechen zůstal na jeho pozemku? Sypný úhel písku, měřený od vodorovné roviny, je β.

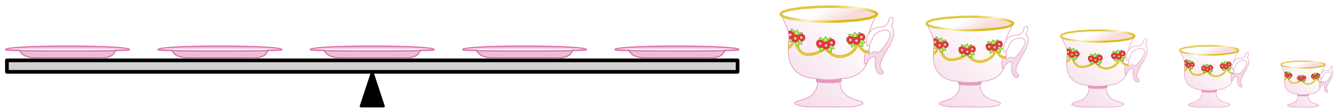


12 Kubo chtěl vyzkoušet novou aplikaci pro nadšence do hromadné dopravy. Aplikace mimo jiné zaznamenává ujetou dráhu a průměrnou rychlost telefonu v km/h, měřené od okamžiku spuštění záznamu. Kubo se vydal na komplikovaný noční výlet bratislavskými autobusy a druhý den si vytvořil graf ujeté dráhy v závislosti na čase, který je uveden níže. Zjistěte, jakou nejvyšší průměrnou rychlost ukazovala aplikace během Kubova výletu.

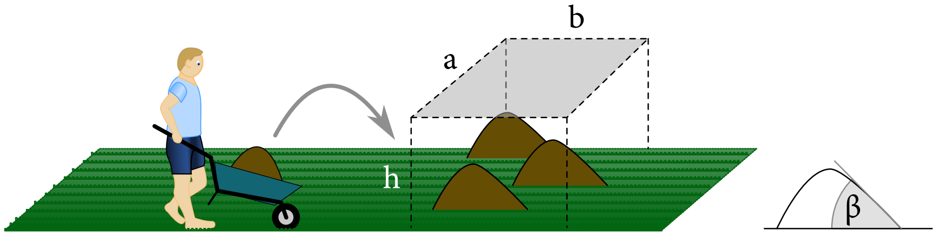


13 Terezka si z Velké Británie přivezla speciální čajovou houpačku. Skládá se z laťky, na které je rovnoměrně rozmístěno pět podšálků, a která je podepřena přímo pod svým středem. K houpačce se následně posadí pět hostů v pořadí podle abecedy a hostitelka přinese čaj. Pět šálků čaje s hmotnostmi v poměru 1 : 2 : 3 : 4 : 5 položí na podšálky tak, aby houpačka byla v rovnováze.

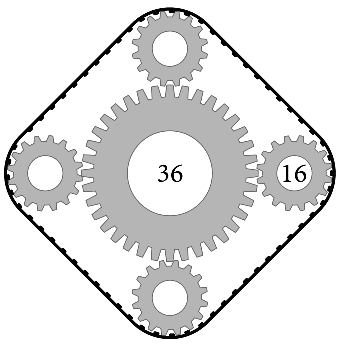
Kolik je různých možností, jak může Terezka rozdělit šálky mezi své hosty?



14 Vilo chce na svém velkém pozemku mimo jiné postavit monument. Základy monumentu bude tvořit velká betonová deska ve tvaru obdélníku s rozměry $a = 10$ m a $b = 7$ m. Musí se nacházet ve výšce $h = 3$ m nad současným povrchem a musí být podepřená pod celou svojí plochou. Kolik nejméně hlíny bude Vilo potřebovat na vytvoření násypu pod základovou deskou, když sypný úhel hlíny je $\beta = 45°$?

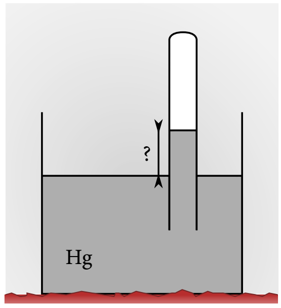


15 Andrej dostal na narozeniny stavebnici. Hned sestrojil speciální přístroj: vzal ozubené kolečko se 36 zuby a kolem něj umístil čtyři menší kolečka se 16 zuby. Kolem celé soustavy napnul pás. Kolikrát musí otočit velkým kolečkem, aby se pás otočil o jednu celou otáčku? Osy všech koleček jsou připevněné k zadní stěně přístroje.

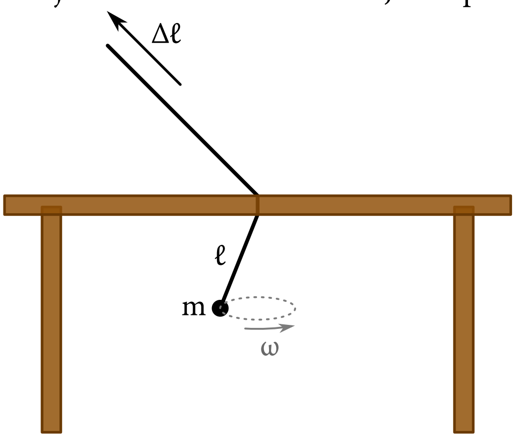


16 Astronaut Tomáš si na výlet na Mars vzal i svůj zděděný rtuťový tlakoměr. Na Zemi ukazoval tradičních 760 mm výšky rtuťového sloupce. Kolik bude ukazovat na Marsu, kde je tlak na povrchu 600 Pa?

Rotaci obou planet zanedbejte.

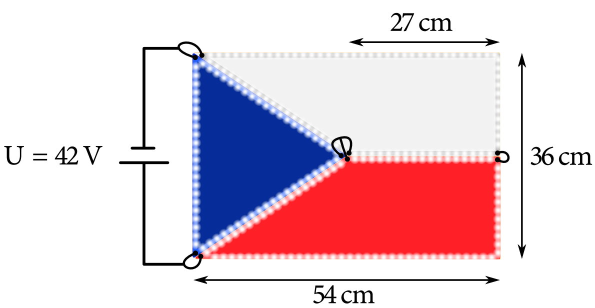


17 Tete provlékla přes děravý stůl provázek tak, aby dole přečnívala jeho část dlouhá ℓ. Potom na něj zavěsila závaží o hmotnosti m a udělila mu takovou rychlost, že teď obíhá po kružnici s úhlovou rychlostí ω. Provázek přitom musí samozřejmě neustále držet v ruce. Jakou práci Tete vykoná, když si provázek přitáhne o malý kousek $\Delta\ell$ k sobě?



18 Plechová vlajka zahřeje nejednoho člověka u srdíčka. Bohužel když se setmí, je takovou vlajku špatně vidět. Proto jsme československou vlajku šířky 54 cm a výšky 36 cm osvětlili pomocí světelných pásek s elektrickým odporem 30 Ω/m tak, že každou barevnou oblast vlajky jsme ohraničili páskou příslušné barvy ze všech stran a ve vrcholcích jednotlivých oblastí jsme pásky pospojovali. Napájecí napětí 42 V jsme přivedli na ty rohy vlajky, kam sahá modrá barva.

Bezpečnostní technik ale z takové vlajky nebyl úplně nadšený. Proto vypnul zdroj, zcela náhodně zvolil bod na svítící pásce, přeřízl ho a na toto místo doplnil pojistku se jmenovitým proudem 2 A. Jaká je pravděpodobnost, že po opětovném zapnutí zdroje pojistka shoří?

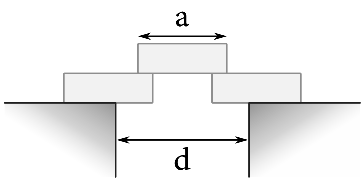


19 Strojvedoucí Lucka spatřila na kolejích před sebou obrovskou kostku ovocného želé. Vzhledem k tomu, že nechce způsobit želé-zniční neštěstí, ihned zatáhla nouzovou brzdu. Brzda je však pneumatická a vzduch z jejího potrubí neunikne okamžitě: lokomotiva sice začne brzdit hned, první vagon však až o sekundu později a každý další vagon ještě o 1 s později jako předcházející.

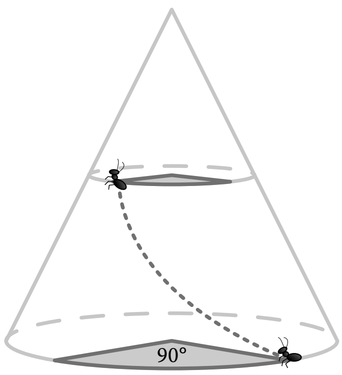
Vlak má pět vagonů, každý o hmotnosti 20 t, lokomotiva má hmotnost 100 t a koeficient tření mezi kolejnicemi a koly je 0,2. Jak dlouhá bude brzdná dráha Lucčina vlaku, pokud jeho počáteční rychlost je 72 km/h?

20 Adam si rád staví mosty. Tentokrát si vzal tři identické kvádry s hranami o délce $a \geq b \geq c$. Chtěl by vědět, jakou nejširší mezeru pomocí nich zvládne přemostit. Tření mezi všemi kvádry i mezi kvádry a podložkou je malé a Adam se na něj nemůže spoléhat.

Přední stěny kvádrů musí ležet v jedné rovině.

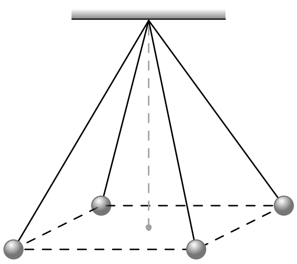


21 Mravenec leze po velké cukrové homoli ve tvaru kužele s poloměrem podstavy 1 m a výškou 2 m. Teď se nachází na úpatí homole přímo na jihovýchod od vrcholu. Jaká je nejkratší vzdálenost, kterou bude muset přelézt, pokud se chce dostat na jihozápadní stranu homole do výšky 1 m?



22 Jonka doma našla čtyři stejné homogenní paličky s hmotností 2 kg a délkou 2 m. Všechny jedním koncem zavěsila ze stropu tak, že visely z jednoho bodu. Na spodní konec každé paličky připojila nehmotný bodový náboj 10^{-4} C, tak že se začaly odpudzovat. Jaký úhel svírají paličky se svislicí, když je soustava v rovnovážné poloze?

Tato úloha nemá analytické řešení. Nebojte se použít kalkulačku. Výsledek odevzdejte s přesnostní na 1°.

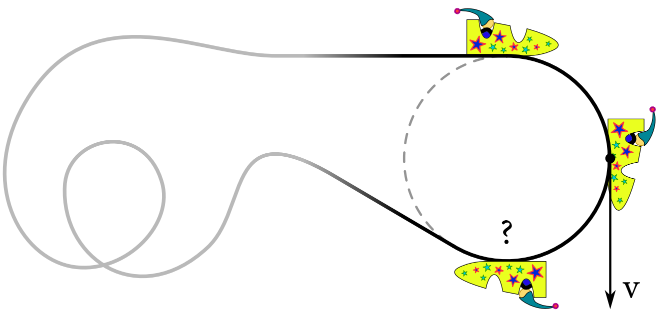


23 Kamion jede po cestě rychlostí 50 km/h. Proti němu letí moucha přesně stejnou rychlostí. Srážka dopadne podle očekávání a moucha se rozpleskne o čelní sklo. O kolik se zvýší teplota toho, co bylo kdysi mouchou, pokud její měrná tepelná kapacita byla 3 kJ/(kg·K)?

Předpokládejte, že čelní sklo je dokonale tuhé a při srážce se vůbec nezahřeje.

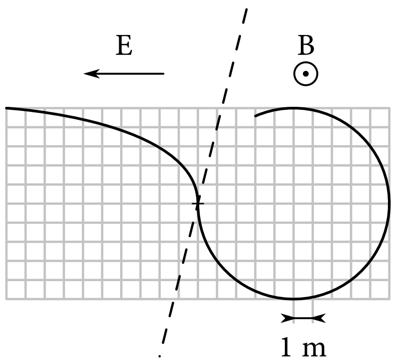
24 Krtko si po úspěšném složení závěrečných zkoušek našel práci v lunaparku. Jeho nejoblíbenější atrakcí je horská dráha se svislým půlkruhovým obloukem. Krtko se posadil do vozíku v nejvyšším bodě oblouku a jemně se odstrčil od zábradlí. Když dorazil k boku smyčky, zrychlil na rychlost v. Jaké přetížení bude Krtko sedící ve vozíku cítit v nejnižším bodě oblouku?

Odpor vzduchu, tření o kolejnice ani další rušivé síly neuvažujte.



25 V Jožkově pokoji ze stropu visí vedle sebe několik stejných pružin s neznámou klidovou délkou. Když se Jožko zavěsí na jednu pružinu, visí ve výšce 50 cm nad zemí. Když se zavěsí na dvě pružiny, které jsou těsně vedle sebe, visí 140 cm nad zemí. Jak vysoko nad zemí bude viset, když se zavěsí na tři pružiny? Strop v Jožkově pokoji je ve výšce 250 cm.

26 Patrik našel zvláštní elektricky nabitou kuličku. Aby se o ní dozvěděl víc, poslal ji na analýzu do moderní elektromagnetické analytické komory. Ta je osvobozená od gravitace a skládá se ze dvou částí: v levé části působí homogenní elektrické pole s intenzitou $E = 0{,}8$ V/m a v pravé zase homogenní magnetické pole s indukcí $B = 0{,}4$ T. Neznámou kuličku hodili do komory a zaznamenali si její trajektorii, která je nakreslená na obrázku. Jaká byla počáteční rychlost kuličky?



27 Na břehu Nilu se sklonem α se ve výši h sluní dva homogenní sféričtí hroši – jeden hladový a jeden najedený. Oba hroši mají kulaté žaludky umístěny přesně ve středu těla a živí se převážně trávou, nilskou vodou a zbloudilými turisty, jejichž hustota je stejná jako hustota samotného hrocha. Navíc víme, že hladový hroch váží o osminu méně než jeho najedený parťák. Až hrochy omrzí slunění se, odvalí se do vody.

Který z nich se dovalí do vody větší rychlostí? A kolikrát bude tato rychlost větší?

Obsah hrošího žaludku naštěstí rotuje spolu se zbytkem hrocha a tření na břehu Nilu je dostatečné, aby hroši neklouzali.

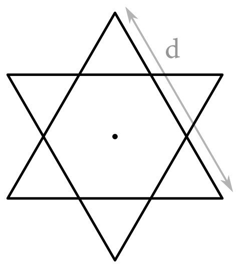
28 Lucy nafoukla plážový míč o hmotnosti 100 g na poloměr 10 cm. Tlak uvnitř byl rovný atmosférickému tlaku p_0. Potom míč začala i se vzduchem pomalu nořit do jezera. Do jaké největší hloubky ho může ponořit, aby se míč určite sám vynořil, pokud je teplota vody v jezeře všude stejná?

29 Z plechu s plošnou hustotou σ jsme vystřihli disk s poloměrem r a čtverec se stranou a. Navlečeme je na svislou tyč tak, aby procházela středem obou tvarů. Potom kruh roztočíme uhlovou rýchlostí ω a přiložíme ke čtverci. Jakou uhlovou rychlostí se bude otáčet celá soustava po ustálení, když se čtverec třením roztočí?

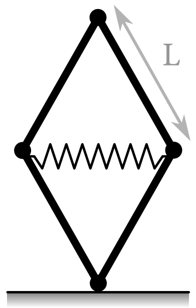
30 Dano si všiml, že se rezistory zahřívají, když jimi protéká elektrický proud. Když připojil jeden rezistor ke zdroji konstantního elektrického napětí, zjistil, že po dlouhé době se jeho teplota ustálila na hodnotě T_1. Pak udělal totéž s druhým rezistorem vyrobeným ze stejného materiálu, který byl však ve všech rozměrech dvakrát větší. V obou případech na rezistory foukal ventilátor, který odváděl ohřátý vzduch z jejich okolí a tím zajistil, že teplota okolí byla vždy T_0. Na jaké hodnotě se po delší době ustálí teplota většího rezistoru?

Zanedbejte přenos tepla sáláním.

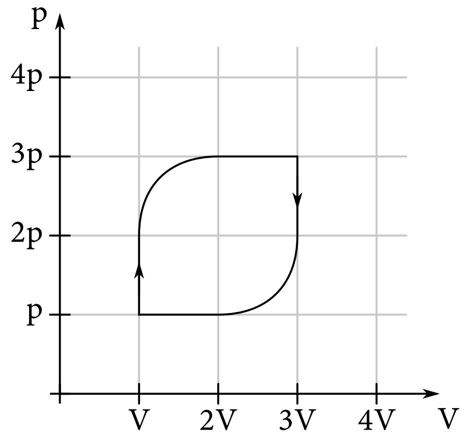
31 Při večerní procházce bratislavskými ulicemi upoutala Sabinku vánoční výzdoba. Nejdřív se divila, proč Vánoce začínají zase na začátku listopadu, ale pak jako správná fyzička obrátila oči k ozdobám ve tvaru šesticípé hvězdy. Hvězda se skládala ze šesti tyčí o délce d a hmotnosti m. Sabinka okamžitě vypočítala moment setrvačnosti takové hvězdy vzhledem k ose, která je kolmá na její rovinu a prochází jejím středem. Kolik jí to vyšlo?



32 Dušan se přes nadějnou kariéru fyzika dal na moderní umění. Vyběhl na půdu a snesl odtam čtyři tyče s hmotností m a délkou L, a k tomu jednu pružinu s nulovou klidovou délkou. Tyče spojil do čtyřúhelníku tak, že se ve spoji mohly volně otáčet, přičemž ale vždy zůstaly v rovině. Dva protilehlé vrcholy spojil pružinou a postavil svůj umělecký výtvor na jeden vrchol tak, aby byla pružina vodorovně. Jaká musí být tuhost pružiny, aby se natáhla na délku L?

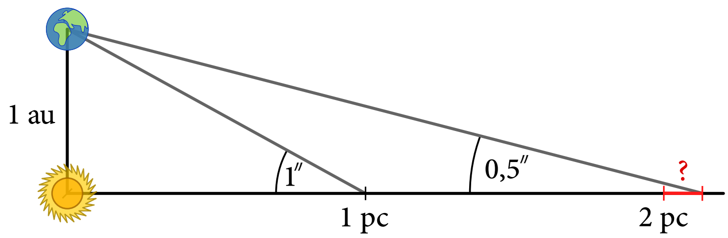


33 V čase vrcholící energetické krize vytáhnul Jaro ze stodoly parní stroj po prapradědovi. Stačilo pár rychlých oprav a fungoval jako nový. Stroj teď funguje podle cyklu zobrazeného na *pV* diagramu. Jaká je jeho účinnost, pokud je pracovní plyn možné považovat za ideální jednoatomový?



34 Jeden parsek byl definován jako vzdálenost, při pohledu z níž by oběžná dráha Země měla zdánlivý poloměr jedné úhlové sekundy (1″). Kvík počítá vzdálenost ke hvězdě, která je vzdálená 2 pc, jako kdyby platilo, že úhlový rozměr poloměru zemské dráhy při pohledu od hvězdy je 0,5″. Jestliže jsou tyto úhly velmi malé, Kvík ví, že i chyba výsledku bude v porovnání s jedním parsekem prakticky zanedbatelná. I tak by ale chtěl vědět: o kolik kilometrů se tato délka liší od skutečné délky 2 pc?

Jestli vám to s kalkulačkou nevychází, může se vám hodit použít Taylorův rozvoj.



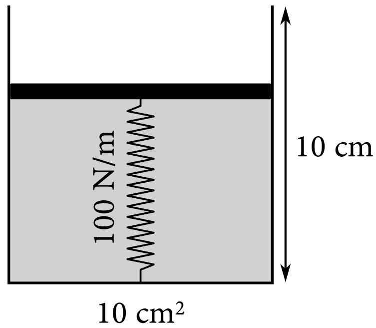
35 Máme dokonale černou kulatou planetu zevnitř ohřívanou vlastním výkonem P. Ponechána napospas svému osudu se ustálí na teplotě T. Nyní ji celou těsně obalíme tenkou zrcadlovou fólií, která odráží 80 % záření zpět k povrchu planety a zbytek absorbuje. Na jaké teplotě se ustálí fólie, jestliže se povrchu planety přímo nedotýká?

36 Tomáš si plánuje sestrojit velký astronomický dalekohled. Aby se nemusel bát, že se mu v něm rozbije zrcadlo, rozhodl se místo skla použít rtuť. Nalil ji do velké ploché mísy a roztočil ji okolo svislé osy úhlovou rychlostí ω.

Jaká je ohnisková vzdálenost zrcadla, pokud je umístěné v tíhovém poli o velikosti g?

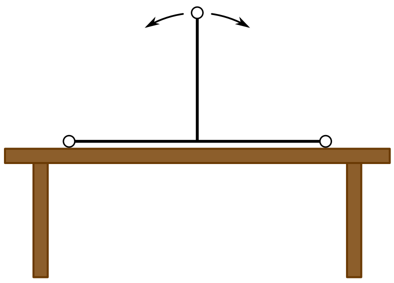
37 Marcel uzavřel pružinu s tuhostí 100 N/m a nulovou klidovou délkou do válcové nádoby s plochou podstavy 10 cm^2 a výškou 10 cm naplněnou ideálním dvojatomovým plynem. Jeden konec pružiny připevnil o dno a druhý o nehmotný píst, který hermeticky uzavřel nádobu. Při dosednutí pístu na válec během uzavírání byl v nádobě standardní atmosférický tlak, který pochopitelně vzrostl, když píst nabyl rovnovážné polohy a teploty.

Jaká bude zdánlivá tuhost takto zakonzervované pružinky při velmi malých prodlouženích?



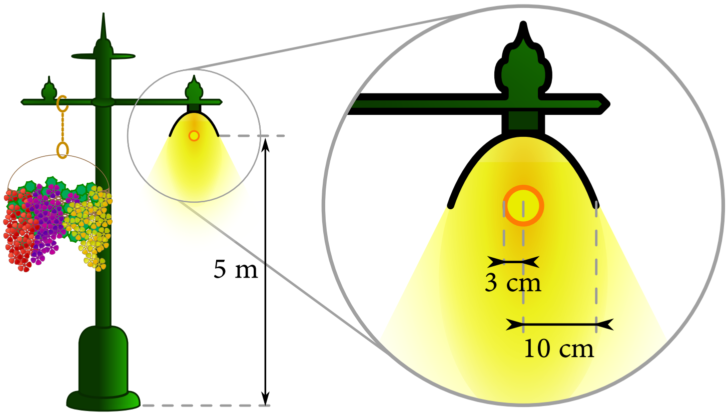
38 Jonka opět skladá z hůlek mechanické soustavy. Tentokrát má tři homogenní hůlky s hmotností 2 kg, délkou 2 m a každá má na jednom konci nehmotný bodový náboj s velikostí 10^{-4} C. Dvě z nich přilepila na vodorovný stůl tak, že byly rovnoběžné a navzájem se dotýkaly konci, na kterých nejsou náboje.

Potom vzala třetí hůlku a připevnila ji pantem do bodu, kde se první dvě hůlky dotýkají, přičemž náboj byl na jejím horním konci. Třetí hůlku se mohla volně otáčet tak, že se všechny tři hůlky vždy nacházeli v jedné vertikální rovině. Potom ji trošku vychýlila ze svislé polohy směrem k jedné z hůlek na stole a pozorovala její malé kmity. Jakou periodu naměřila?



39 Na nábreží stojí lampa vysoká 5 m. Má stínidlo ve tvaru paraboloidu s otvorem o poloměru 10 cm a hloubkou 7 cm, které je zevnitř potážené dokonale odraznou vrstvou. V jeho ohnisku se nachází kulatá žárovka s poloměrem 3 cm, která rovnoměrně do všech směrů vyzařuje světelný tok 10 klm. Jaká bude intenzita osvětlené cesty přímo pod lampou?

Pro malé úhly můžete použít přiblížení $\sin x \approx \tan x \approx x$. *Žárovka není průhledná.*



40 Maťko a Kubko zkoumají měsíční povrch. Maťka z rakety vysadili na severním pólu a Kubko pokračoval až na měsíční rovník. Po pár chvílích Maťko našel velmi zajímavý kámen a chtěl by ho dopravit ke Kubkovi na analýzu. Zajíma ho tedy, jakou nejmenší rychlostí ho musí hodit, aby kámen doletěl až na měsíční rovník. Hmotnost Měsíce je $M_{☾}$ a jeho poloměr je $R_{☾}$.

Vzorová řešení

1 Aby sme našli ťažisko, maľovanú krížovku vôbec nemusíme riešiť: stačí predsa spočítať rozloženie hmoty v dvoch rôznych smeroch a túto informáciu nám legenda na okraji priamo poskytuje. Samozrejme nič nepokazíme, ani keď krížovku vyriešime, ale kto to so súťažením myslí vážne, nebude chcieť strácať čas.

Hneď by sme si mali všimnúť, že krížovka je súmerná okolo zvislej osi, takže horizontálne súradnice ťažiska a stredu budú určite rovnaké. Stačí sa nám teda pozerať na riadky. Tým priradíme váhy zodpovedajúce ich polohám vzhľadom na stred, ktoré sú postupne $-6, -5, \ldots, 5, 6$. Potom už len sčítame čísla v každom riadku, vynásobíme ich váhou riadka a výsledky opäť sčítame.[1] Nakoniec súčet vydelíme počtom všetkých štvorčekov, čiže súčtom všetkých čísel v riadkovej legende, ktorých je presne 100.

Dostaneme tak y-ovú súradnicu ťažiska vzhľadom na stred

$$y = \frac{\sum_{j=-6}^{6}\left(j \cdot \sum_i x_{ij}\right)}{\sum_{j=-6}^{6}\left(\sum_i x_{ij}\right)} - 0{,}5 = \frac{(-6)\cdot 9 + (-5)\cdot(2+5+2) + \ldots + 5\cdot(1+1) + 6\cdot 9}{9 + (2+5+2) + \ldots + (1+1) + 9} = \frac{-17}{100} = -0{,}17. \tag{1.1}$$

Vzdialenosť ťažiska od stredu je teda 0,17 štvorčeka.

2 Marek pozerá stream rýchlosťou v_M, pričom platí, že $v_M = 1{,}75 v_S$, kde v_S je rýchlosť streamera. Keďže rýchlosti streamera a Marekovho videa sa nemenia, môžeme použiť vzorec $v_M = f_M/t_M$, kde f_M je aktuálny čas, na ktorom sa Marek nachádza a t_M je čas meraný od momentu, keď si Marek video zapol. Podobne vieme napísať $v_S = f_S/t_S$.

Keďže Marek chce dobehnúť živý prenos streamera, musí vidieť presne to, čo streamer vysiela naživo. Z toho dostávame podmienku $f_S = f_M$, takže

$$v_S t = v_M t_M. \tag{2.1}$$

Ďalej vieme, že Marek začal pozerať o čas $t_0 = 30$ min neskôr, to znamená, že $t = t_0 + t_M$. Dosadením t_M do predošlej rovnice dostávame

$$v_S t = v_M (t - t_0). \tag{2.2}$$

Marekovu rýchlosť pozerania videa poznáme, je to $1{,}75 v_S$. Dosadíme v_M a vyjadríme čas

$$t = \frac{7}{3} t_0 = 70 \text{ min}, \tag{2.3}$$

čiže po prevedení do šesťdesiatkovej sústavy `01:10:00`.

3 Celkové prevýšenie je rozdiel nastúpanej a zostúpenej výšky. Pri ceste späť nastúpa turista presne výšku, ktorú pred tým zostúpil, čiže 1447 − 1302 = 145 metrov.

[1] Fajnšmekri si všimnú, že prvý a posledný riadok sú rovnaké a teda s nimi takisto nemusíme strácať čas.

4 Ak si odmyslíme, že ide o vlajku, vidíme tri telesá v tepelnom kontakte. Sú vyrobené z rovnakého plechu, takže ich hmotnostná tepelná kapacita c bude rovnaká. A hmotnosť? Tá je predsa priamo úmerná ploche. Jednoduchou geometriou pomocou obsahov zistíme, že ak je hmotnosť celej vlajky M, potom modrá časť má hmotnosť $\frac{M}{4}$ a ostatné dve časti zhodne $\frac{3M}{8}$.

Z toho už môžeme zostaviť kalorimetrickú rovnicu. Ak vieme, že teplota sa ustáli na hodnote T, bude platiť nasledovná rovnica:

$$\frac{3M}{8}c(30\,°\mathrm{C} - T) + \frac{3M}{8}c(70\,°\mathrm{C} - T) + \frac{M}{4}c(90\,°\mathrm{C} - T) = 0. \tag{4.1}$$

Hovorí o tom, že existuje taká teplota T, na ktorú sa zmenia všetky teploty jednotlivých kusov vlajky a vlajka pri tom neprijme žiadne teplo od okolia. Toto môžeme poľahky vydeliť c a M (skutočne, na materiáli, z ktorého je vlajka, ani na hmotnosti celého plechu nezáleží) a ďalej upraviť:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}(30\,°\mathrm{C} - T) + \frac{3}{8}(70\,°\mathrm{C} - T) + \frac{1}{4}(90\,°\mathrm{C} - T) &= 0\,°\mathrm{C}, \\ \frac{3}{8}\cdot 30\,°\mathrm{C} - \frac{3}{8}T + \frac{3}{8}\cdot 70\,°\mathrm{C} - \frac{3}{8}T + \frac{1}{4}\cdot 90\,°\mathrm{C} - \frac{1}{4}T &= 0\,°\mathrm{C}, \\ T &= 60\,°\mathrm{C}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

5 Osem ľudí, ktorí majú záber 2,5 m, vieme nahradiť jedným „človekom“ so záberom 20 m. Pole má šírku 300 m, takže si ho vieme rozdeliť na 30 úsekov šírky 10 m. Keďže máme v zadaní určené rýchlosti, vieme tiež povedať, že za čas $t = 500$ s prejdú FKSáci dva úseky a traktor päť úsekov, pričom o ďalších 500 s začnú na opačnej strane ako pôvodne. Po každom čase t prejdú dokopy sedem úsekov, takže vidíme, že sa stretnú počas piateho časového intervalu dĺžky t.

Vtedy začínajú z rovnakej strany ako na začiatku a ostali im už iba dva úseky. Štyria FKSáci budú mať už v tomto momente smolu, pretože majú rovnakú cestu s traktorom. To znamená, že hľadanie meteoritu skončilo a ničnenájduvší FKSáci sa môžu akurát tak pochváliť tým, že prehľadali plochu

$$S_{\mathrm{FKS}} = 4 \cdot 500\ \mathrm{m} \cdot 2 \cdot 10\ \mathrm{m} = 40\,000\ \mathrm{m}^2. \tag{5.1}$$

Keďže nás zaujíma, akú časť poľa prehľadať nestihli, ostáva nám vyjadriť plochu celého poľa a odčítať

$$\frac{S_{\mathrm{pole}} - S_{\mathrm{FKS}}}{S_{\mathrm{pole}}} = \frac{500\ \mathrm{m}\cdot 300\ \mathrm{m} - 40\,000\ \mathrm{m}^2}{500\ \mathrm{m}\cdot 300\ \mathrm{m}} = \frac{150000 - 40000}{150000} = \frac{11}{15}. \tag{5.2}$$

6 Keďže všetci štyria šoférujú rovnako a dodržiavajú dopravné predpisy, každý z nich začne zrýchľovať presne v momente, keď jeho auto vyjde za hranicu obce. To znamená, že nebudú zrýchľovať súčasne a vzdialenosti medzi ich autami sa preto nezachovajú. Čo sa ale zachová, sú časové intervaly medzi prejazdmi áut ktorýmkoľvek bodom trasy. To platí vďaka tomu, že pohyb každého z áut vyzerá úplne rovnako, iba je nejako posunutý v čase. Nás bude zaujímať iba vzdialenosť prvého a posledného auta (čiže dĺžka úseku cesty, ktorý autá zaberajú).

Keď sa autá ešte pohybujú rýchlosťou $v_0 = 50$ km/h, táto vzdialenosť je $d_0 = 150$ m, takže časový interval medzi prechodom prvého a posledného auta nejakým bodom je $t = \frac{d_0}{v_0}$. Po zrýchlení na rýchlosť $v_1 = 90$ km/h sa tento interval zachová, teda $t = \frac{d_1}{v_1}$, odkiaľ vieme vyjadriť novú vzdialenosť áut ako

$$d_1 = v_1 t = v_1 \frac{d_0}{v_0} = 270\ \text{m}. \tag{6.1}$$

7 Ako prvé sa zamyslíme, ktoré zapojenie zodpovedá ktorej hodnote odporu. Sériové zapojenie má určite väčší odpor, ako paralelné. Celkový odpor R_S je v ňom rovný súčtu jednotlivých odporov, takže

$$R_S = R_1 + R_2 = 25\ \Omega. \tag{7.1}$$

Naopak v prípade paralelného zapojenia je celkový odpor R_P rovný

$$R_P = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\ \Omega. \tag{7.2}$$

Máme teda dve rovnice o dvoch neznámych. Vyjadrime si napríklad R_1 ako $R_1 = 25\ \Omega - R_2$ a dosaďme do rovnice pre R_P. Dostávame tak kvadratickú rovnicu

$$R_2^2 - 25\ \Omega \cdot R_2 + 100\ \Omega^2 = 0\ \Omega^2. \tag{7.3}$$

Obe jej riešenia $R_2 = 5\ \Omega$ a $R_2 = 20\ \Omega$ sú fyzikálne zmysluplné a zodpovedajú jednoduchej zámene rezistorov. Riešením je teda dvojica $5\ \Omega$ a $20\ \Omega$.

8 O hĺbke studne by sme aj bez fyzikálne nepríliš nadaného kastelána vedeli, že

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{8.1}$$

Kastelán nám napovedá vzťah s jeho konštantou k (táto, mimochodom, nie je bezrozmerná) $h = kt$. Z neho vieme pomocou vzťahu pre hĺbku studne vyjadriť konštantu k ako

$$k = \frac{1}{2} g t = \frac{1}{2} g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{hg}{2}}. \tag{8.2}$$

Z tohto vieme vyjadriť h len pomocou k a g ako

$$h = \frac{2k^2}{g}. \tag{8.3}$$

9 Ak na začiatku má Plyš v roztoku hmotnosť m_{A0} acetónu a m_{V0} vody, pôvodný hmotnostný zlomok vypočítame ako

$$X = \frac{m_{\mathrm{A0}}}{m_{\mathrm{A0}} + m_{\mathrm{V0}}}. \tag{9.1}$$

Po obede mala Pľyš v roztoku len m_{A1} acetónu. Keďže vieme, že sa vyparila tretina acetónu a desatina vody, dostávame

$$m_{A1} = \frac{2}{3} m_{A0} \qquad \text{a} \qquad m_{V1} = \frac{9}{10} m_{V0}. \tag{9.2}$$

Pre nový hmotnostný zlomok platí

$$\frac{5}{6} X = \frac{m_{A1}}{m_{A1} + m_{V1}}. \tag{9.3}$$

Z tejto rovnice vyjadríme X, dosadíme do rovnosti s rovnicou 9.1 a využijúc vzťahy z rovnice 9.2 dostávame

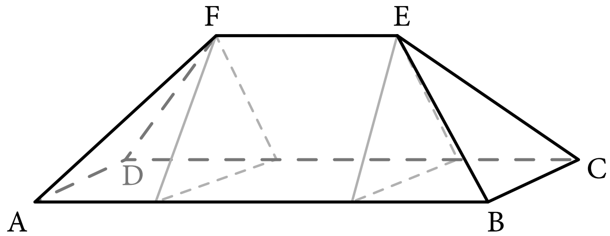
$$\begin{aligned}
\frac{m_{A0}}{m_{A0} + m_{V0}} &= \frac{6}{5} \frac{m_{A1}}{m_{A1} + m_{V1}} \\
\frac{\frac{3}{2} m_{A1}}{\frac{3}{2} m_{A1} + \frac{10}{9} m_{V1}} &= \frac{6}{5} \frac{m_{A1}}{m_{A1} + m_{V1}} \\
\frac{3}{2} {m_{A1}}^2 + \frac{3}{2} m_{A1} m_{V1} &= \frac{6}{5}\frac{3}{2} {m_{A1}}^2 + \frac{6}{5}\frac{10}{9} m_{A1} m_{V1} \\
\frac{3}{2} m_{A1} + \frac{3}{2} m_{V1} &= \frac{6}{5}\frac{3}{2} m_{A1} + \frac{6}{5}\frac{10}{9} m_{V1} \\
m_{A1} &= \frac{5}{9} m_{V1}.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

V predposlednom kroku sme obe strany rovnice vydelili m_{A1}, čo určite nebude nula, takže úpravy sú korektné. Teraz sa už len vrátime k rovnici 9.3, kam dosadíme $m_{A1} = \frac{5}{9} m_{V1}$ a výsledok už je jednoducho

$$\frac{\frac{5}{9} m_{V1}}{\frac{5}{9} m_{V1} + m_{V1}} = \frac{5}{6} X \quad \Rightarrow \quad X = \frac{3}{7} \doteq 42{,}86\ \%. \tag{9.5}$$

10 Kým je na svietniku všetkých päť ozdôb, situácia je symetrická a svietnik visí voľne: je podopretý akurát vo svojom ťažisku a ľubovoľnému otočeniu prislúcha rovnaká potenciálnej energii. Hneď, ako jedna z ozdôb odpadne, sa svietnik otočí tak, aby minimalizoval výšku svojho ťažiska. Prázdne rameno sa pohne tak, aby bolo čo najvyššie, a to nastane vtedy, keď bude rovina svietnika s horizontálnou rovinou zvierať uhol 90°.

11 Ak by sme sypali hlinu na jedno miesto, získali by sme kužeľ so sklonom β. Na obrázku 11.1 môžeme vidieť útvar, ktorý vznikne zjednotením všetkých môžných kužeľov s rôznymi výškami, ktoré by na Vilovom pozemku mohli stáť.



Obrázek 11.1: *Pohľad zboku*

Je to trojboký hranol, ktorý je na dvoch stranách zrezaný. Tento útvar si môžeme rozdeliť na tri časti, konkrétne trojboký hranol zo stredu a dva odrezky. Najskôr si spočítajme ich výšky. Kolmým rezom cez hranol vznikne rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky b a s dvoma uhlami β. Výška útvarov preto bude

$$h = \frac{b}{2} \tan \beta. \tag{11.1}$$

Z dvoch odrezkov vieme zložiť ihlan. Keďže všetky jeho steny zvierajú uhol β, ide o pravidelný štvorboký ihlan, a teda jeho podstava bude štvorec so stranou b. S touto znalosťou vieme ľahko vydedukovať, že trojboký hranol bude dlhý $d = a - b$ a jeho objem bude

$$V_h = S_p \cdot d = \frac{hb}{2} d = \frac{b^2}{4}(a - b) \tan \beta. \tag{11.2}$$

Objem ihlanu zrátame tiež jednoducho ako

$$V_i = \frac{1}{3} S_p h = \frac{b^3}{6} \tan \beta \tag{11.3}$$

a celkový maximálny objem je teda

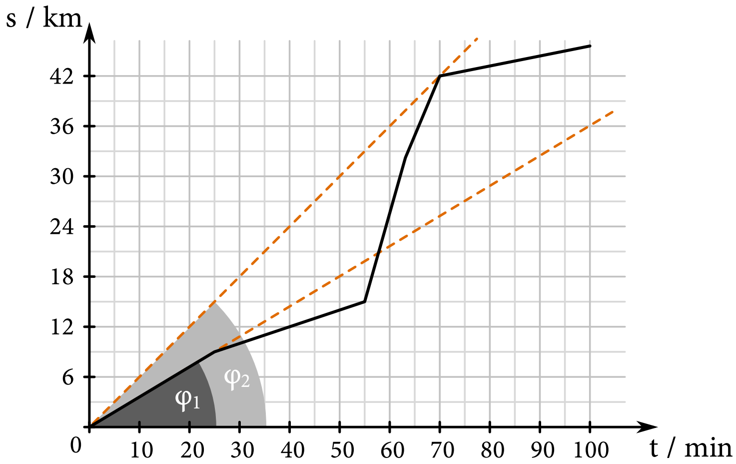
$$V = V_h + V_i = \left(\frac{3a - b}{12}\right) b^2 \tan \beta. \tag{11.4}$$

12 Najprv si ešte raz vysvetlime, čo sa nás v úlohe pýtajú. Potrebujeme zistiť, v akom okamihu je dovtedajšia priemerná rýchlosť najväčšia. Priebežná priemerná rýchlosť $\overline{v}(t)$ sa počíta ako prejdená dráha v tom istom čase t vydelená t, čiže

$$\overline{v}(t) = \frac{s(t)}{t}. \tag{12.1}$$

Inými slovami z grafu si vyberieme ľubovoľný okamih a pozrieme sa, aká prejdená dráha mu prislúcha. Tieto hodnoty potom vložíme do vzorca pre priemernú rýchlosť. Keby sme to urobili pre všetky časy t, vedeli by sme nájsť najväčšie $\overline{v}(t)$. Dá sa to však aj jednoducho vyčítať z grafu na obrázku 12.1. Upravme si vzťah pre $\overline{v}(t)$ tak, aby bola naša nezávislá premenná t, teda na

$$s(t) = \overline{v}(t) t. \tag{12.2}$$



Obrázek 12.1: *Uhol φ_1 je menší ako φ_2, to znamená, že pre rýchlosti platí $\overline{v}(t_1) < \overline{v}(t_2)$.*

Teraz vidíme, že $\overline{v}(t)$ nám udáva sklon priamky. Ak teda potrebujeme nájsť najväčšie $\overline{v}(t)$, stačí, ak nájdeme priamku s najväčším sklonom, čiže s najväčším uhlom od osi x, ktorá prechádza bodom $[0;0]$. Z grafu vyplýva, že hľadaná priemerná rýchlosť je v čase $t = 70$ min, čiže

$$\overline{v}(t) = \frac{42}{70}\ \mathrm{km/min} = 36\ \mathrm{km/h}. \tag{12.3}$$

$\boxed{13}$ Hostí zjavne vieme rozlíšiť, takže budeme musieť overiť až $5! = 120$ rôznych možností ako šálky rozmiestniť. Našťastie vieme toto číslo po krátkom zamyslení radikálne znížiť.

Ak má byť hojdačka v rovnováhe, musia byť na obidvoch stranách rovnako veľké momenty síl. Označme si jednotlivé polohy k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_{+1} a k_{+2} a poďme im priradiť v nejakom poradí hodnoty 1, 2, 3, 4 a 5. Ak je vzdialenosť medzi dvomi podšálkami w a hmotnosť najľahšej z nich m, v rovnici pre momenty síl

$$k_{-2}mg2w + k_{-1}mgw = k_{+1}mgw + k_{+2}mg2w \tag{13.1}$$

sa nám konštanty w, m a g vykrátia a ostane iba

$$2k_{-2} + k_{-1} = k_{+1} + 2k_{+2}. \tag{13.2}$$

Ďalej musí platiť, že vo vzdialenosti w od stredu musia mať hmotnosti šálok rovnakú paritu – ak je k_{-1} nepárne, potom aj k_{+1} musí byť nepárne a naopak; inak by sme na jednej strane určite dostali moment sily v hodnote nepárneho násobku mgw a na druhej strane by nutne ostal násobok párny, čo by riešenie pokazilo. Nakoniec si uvedomme, že ku každému riešeniu vieme jednoznačne priradiť jeho zrkadlový obraz.

Tak teda prejdime na samotné riešenie. Ak začneme najťažšou šálkou, stačí nám overiť tri prípady:

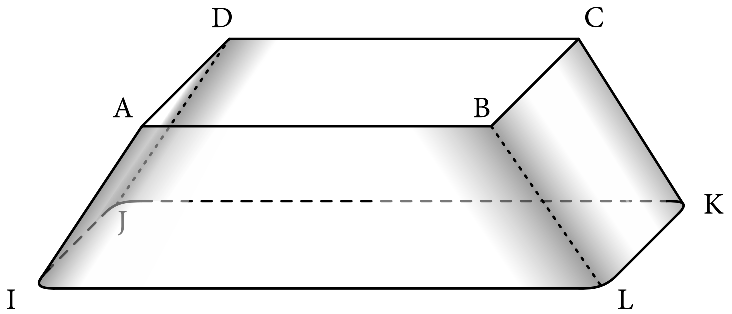
- Ak ju položíme do polohy k_{-2}, do k_{+2} musíme umiestniť šálku s hmotnosťou $4m$ – inak to už určite nijak nevyvážime. Z podmienky o parite vychádza, že na pozície $k_{\pm1}$ musíme položiť šálky s hmotnosťami m a $3m$, čo vyjde jednoznačne a dostaneme prvú dvojicu riešení, 5 : 1 : 2 : 3 : 4 a 4 : 3 : 2 : 1 : 5.
- Ak položíme najťažšiu šálku na pozíciu k_{-1}, z podmienky parity musí byť na opačnej pozícii šálka s hmotnosťou nepárneho násobku m. Máme dve možnosti,

  - ak tam umiestnime šálku s hmotnosťou m, rozdiel hmotností šálok na pozíciách $k_{\pm 2}$ musí byť $2m$, čo nám jednoznačne určuje riešenie 2 : 5 : 3 : 1 : 4, resp. 4 : 1 : 3 : 5 : 2;
  - alebo ak tam položíme šálku s hmotnosťou $3m$, rozdiel hmotností na krajných pozíciách $k_{\pm 2}$ musí byť m, čo jednoznačne určuje riešenie 1 : 5 : 4 : 3 : 2, resp. 2 : 3 : 4 : 5 : 1.

- Nakoniec ak najťažšiu šálku položíme do stredu, kvôli parite ostáva overiť dve možnosti,
  - teda keď na pozície $k_{\pm 1}$ umiestnime šálky s hmotnosťami párnych násobkov m, lenže potom zvyšné dve šálky na krajných polohách určite ostanú nevyvážené;
  - alebo s hmotnosťami nepárnych násobkov m, čo opäť vyvážiť nevieme.

Takto sme teda rozanalyzovali všetkých 120 možností. Odpoveďou je, že šálky sa dajú rozmiestniť šiestimi rôznymi spôsobmi.

14 Ak by sme sypali hlinu na jedno miesto, získali by sme kužeľ so sklonom β. Na obrázku 14.1 môžeme vidieť útvar, ktorý vznikne zjednotením všetkých kužeľov.



Obrázek 14.1: *Pohľad zhora*

Keďže je všade sklon β, pri pohľade zhora bude vzdialenosť s od okraju ku priemetu horného obdĺžnika na zem všade rovnaká. Vieme ju ľahko vyjadriť pomocou vzťahu

$$\cot\beta = \frac{s}{h} \quad\Rightarrow\quad s = h\cot\beta. \tag{14.1}$$

Teraz si treba uvedomiť, že si náš útvar vieme rozdeliť na niekoľko častí. V rohoch vidíme štyri štvrťkužele, z ktorých vytvoríme jeden kužeľ s polomerom s a výškou h. Potom nájdeme jeden kváder rozmerov $a\cdot b\cdot h$ a nakoniec štyri trojboké hranoly, ktoré vieme spojiť do jedného dlhého hranola. Tento hranol má výšku $2a + 2b$ a ako podstavu pravouhlý trojuholník s odvesnami h a s. Ich objemy sú

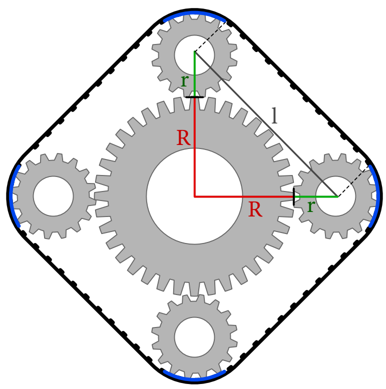
$$\begin{aligned} V_{\text{kužeľ}} &= \frac{1}{3}\pi s^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3\cot^2\beta, \\ V_{\text{kváder}} &= abh, \\ V_{\text{hranoly}} &= S_p(2a+2b) = \frac{hs}{2}(2a+2b) = \frac{h^2}{2}(2a+2b)\cot\beta. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Výsledný objem je teda

$$V = V_{\text{kužeľ}} + V_{\text{kváder}} + V_{\text{hranoly}} = \frac{1}{3}\pi h^3 \cot^2\beta + abh + h^2(a+b)\cot\beta. \tag{14.3}$$

Po dosadení hodnôt zo zadania zistíme, že Vilo bude potrebovať približne 391 m^3 hliny.

$\boxed{15}$ Ak do seba dve susediace ozubené kolesá zapadajú, pri pohybe musia mať v bode dotyku rovnakú obvodovú rýchlosť a navzájom opačný smer otáčania. To znamená, že všetky štyri menšie kolieska budú mať rovnakú obvodovú rýchlosť (zhodnú s obvodovou rýchlosťou veľkého kolesa) a budú sa otáčať rovnakým smerom. Rovnakou rýchlosťou sa bude preto pohybovať aj pás. Táto rýchlosť bude konkrétne 36 zubov za jednu otáčku veľkého kolesa. Ak si teda označíme šírku jedného zubu ako d, jednému otočeniu veľkého kolesa bude zodpovedať posunutie pásu o $36d$. Teraz nás ale ešte zaujíma, aký dlhý je celý pás.



Obrázek 15.1: *Geometria pásu*

Z obrázku si môžeme všimnúť, že je tvorený štyrmi štvrťkružnicami, ktorých zložením dostaneme obvod menšieho kolieska, teda $16d$. Zvyškom pásu sú štyri úsečky dĺžky l, čo je práve vzdialenosť stredov dvoch susedných malých koliesok. Tú vieme spočítať ako uhlopriečku štvorca so stranou $R + r$, kde R je polomer veľkého kolesa $R = \frac{36d}{2\pi}$ a r je polomer menšieho kolieska $r = \frac{16d}{2\pi}$. Každá z daných štyroch úsečiek bude mať teda dĺžku

$$\sqrt{2}(R + r) = \frac{26\sqrt{2}}{\pi}d. \tag{15.1}$$

Ak má teda pás dĺžku $\left(16 + 104\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)d$ a za jednu otáčku veľkého kolesa sa otočí o $36d$, o celú svoju dĺžku sa otočí za

$$\frac{\left(16 + 104\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)d}{36d} = \frac{4}{9} + \frac{26\sqrt{2}}{9\pi} \doteq 1{,}745 \tag{15.2}$$

otáčok veľkého kolesa.

Poznamenajme, že ak má pás na vnútornej strane zuby, musí byť jeho dĺžka celočíselným násobkom šírky jedného zuba. Navyše ak chceme, aby boli všetky súčiastky stroja opotrebúvané rovnomerne, musí byť tento násobok deliteľný štyrmi. V takom prípade dostaneme, že dĺžka pásu musí byť $64d$, čiže veľké koleso sa otočí $\frac{64d}{36d} \doteq 1{,}78$-krát.

16 Tlak na povrchu Marsu je omnoho menší ako na Zemi a tlakomer by teda mal ukázať výrazne nižšiu hodnotu. Nesmieme však zabudnúť, že ortuťový tlakomer dáva do pomeru vonkajší tlak s hydrostatickým tlakom ortuti vnútri – a ten zas závisí aj od tiažového zrýchlenia, ktoré je na Marse iné.

Tiažové zrýchlenie je dané vzťahom

$$g_{♂} = \frac{GM_{♂}}{R_{♂}^2}, \tag{16.1}$$

pre hydrostatický tlak na malých škálach zase platí

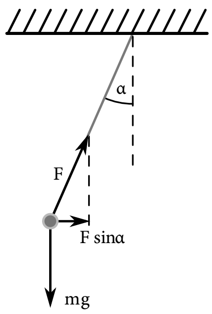
$$p = \rho g h, \tag{16.2}$$

a teda môžeme vyjadriť

$$h = \frac{pR_{♂}^2}{\rho G M_{♂}}. \tag{16.3}$$

Po dosadení hodnôt z tabuľky konštánt alebo iného zdroja vidíme, že je to rovné približne 12 mm.

17 Na tu, aby sme vypočítali prácu, potrebujeme v prvom rade poznať silu F, ktorou je lanko napínané. Preto si nakreslíme obrázok 17.1. Lanko nech je od zvislého smeru vychýlené o uhol α. Na hmotný bod pôsobia dve sily – sila $\vec{F}$ od lanka a tiažová sila s veľkosťou mg. Bod sa pohybuje uhlovou rýchlosťou ω po kružnici s polomerom $\ell \sin\alpha$. Navyše naň musí pôsobiť dostredivá sila $m\omega^2\ell\sin\alpha$. Jediná sila pôsobiaca na bod, ktorá má horizontálnu zložku, je sila F.



Obrázek 17.1: *Sily pôsobiace na hmotný bod.*

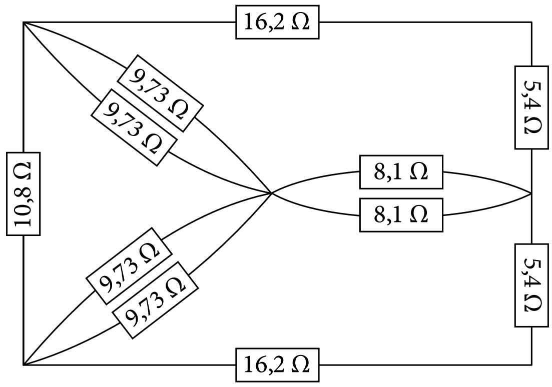
Musí teda platiť

$$F\sin\alpha = m\omega^2\ell\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F = m\omega^2\ell. \tag{17.1}$$

Práca, ktorú Tete vykoná, ak lano potiahne o malú vzdialenosť $\Delta\ell$, bude potom jednoducho

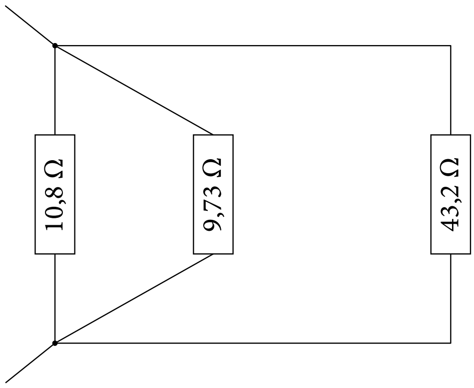
$$\Delta W = m\omega^2\ell\,\Delta\ell. \tag{17.2}$$

18 Najskôr si môžeme vypočítať dĺžky a z nich odpory jednotlivých svetelných pásikov. K zisteniu dĺžok nepoužijeme nič zložitejšie než Pytagorovu vetu; dĺžky zas pomocou dĺžkového odporu 30 Ω/m ľahko prevedieme na elektrické odpory. Výsledné hodnoty vidno na obrázku.



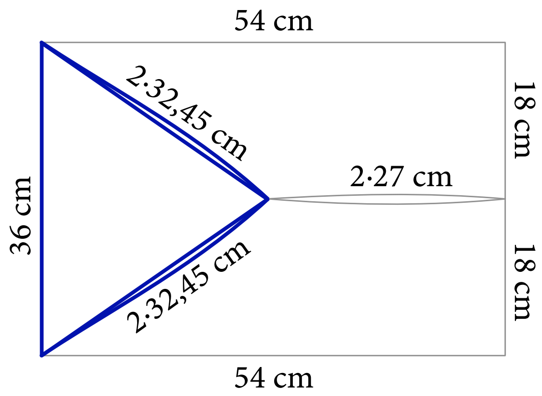
Obrázek 18.1: *Svetelné pásiky ako rezistory.*

Dvojica pásikov medzi bielou a červenou časťou vlajky má zaujímavú vlastnosť – na ich oboch koncoch je rovnaký potenciál. Prísť k tomu môžeme napríklad trikom, pri ktorom celú odporovú schému zrkadlovo preklopíme tak, že prívody sa zobrazia na seba navzájom. Body, ktoré sa zobrazia samy na seba, majú potom rovnaký potenciál; to znamená, že i keby medzi nimi bol vodič, týmto nepotečie žiaden elektrický prúd. To prakticky znamená, že týmito dvoma svetelnými pásikmi nepotečie žiaden prúd, a teda nebudú svietiť. Ak ich odstránime z obvodu, nič sa nezmení.



Obrázek 18.2: *Vetvy, ktorými tečie prúd, po vypočítaní ich odporu.*

V takom prípade nám zostane už iba kombinácia sériového a paralelného zapojenia rezistorov! Napäťový úbytok na každej z vetiev bude rovnaký, rovný napájaciemu napätiu 42 V. Ich odpory poznáme, znamená to teda, že prúd každou z vetiev vypočítame z Ohmovho zákona ako $I = \frac{U}{R}$. Vetva s odporom 9,73 Ω je však zložená z dvoch rovnakých paralelných vetiev, každou z nich teda potečie polovičný prúd. Zľava doprava sú teda prúdy vo vetvách postupne 3,89, 2,16, 2,16 a 0,97 A. Prúdy vyššie ako 2 A, teda také, ktoré prerazia poistku, tečú len tými vetvami, ktoré sú hrubo vyznačené na nasledovnom obrázku.



Obrázek 18.3: *Dĺžky jednotlivých pásikov; hrubo sú vyznačené miesta, ktorými tečie viac ako 2 A.*

Aká je pravdepodobnosť, že technik preštikne svetelný pásik niekde v týchto miestach? Vypočítame ju ako pomer súčtu dĺžok týchto pásikov k dĺžke všetkých pásikov, čiže

$$P \approx \frac{165{,}8 \text{ cm}}{363{,}8 \text{ cm}} \approx 0{,}456 \doteq 46 \text{ \%}. \tag{18.1}$$

19 Núdzová brzda by mala brzdiť tak silno, ako je to len možné – a to je určené práve koeficientom šmykového trenia. Hmotnosť vlaku je stále rovnaká, konkrétne $m = 100 \text{ t} + 5 \cdot 20 \text{ t} = 200 \text{ t}$, brzdiaca trecia sila však bude pôsobiť iba na tie vozidlá, ktorých brzdy sú už aktívne. Bude rovná $F = \mu m' g$, kde m' je celková hmotnosť brzdiacich vozidiel a μ koeficient šmykového trenia. Spomalenie vlaku je potom

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\mu m' g}{m}. \tag{19.1}$$

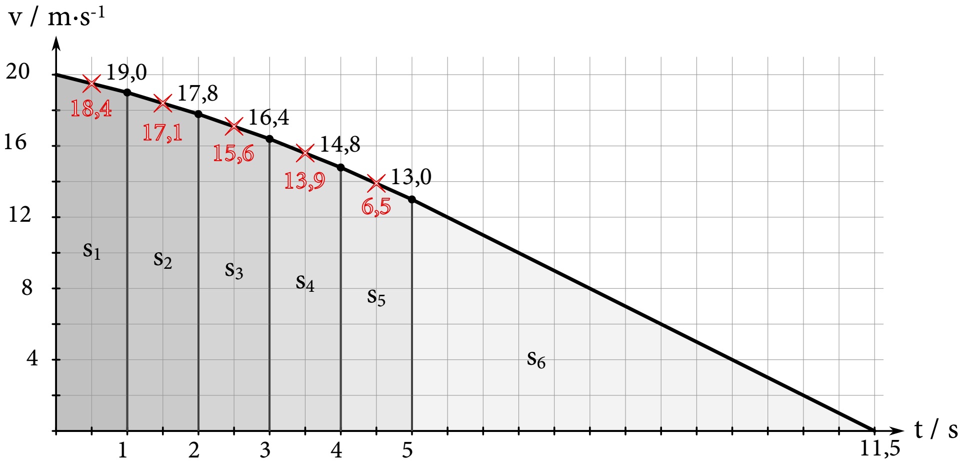
Keď Lucka aktivuje brzdy, vlak začne spomaľovať so spomalením

$$a_0 = \frac{10^5 \text{ kg}}{2 \cdot 10^5 \text{ kg}} \cdot 0{,}2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2. \tag{19.2}$$

Spomalenie potom každú sekundu skokovo narastie o ďalších

$$\Delta a = 0{,}2 \cdot \frac{20 \text{ t}}{200 \text{ t}} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 0{,}2 \text{ m/s}^2 \tag{19.3}$$

až po maximálnu hodnotu $a_{\max} = a_0 + 5\,\Delta a = 2 \text{ m/s}^2$, a s takýmto spomalením vlak dobrzdí až do zastavenia. Toto môžeme vyjadriť aj vzorcami, počas Náboja však bude jednoduchšie a rýchlejšie si to nakresliť do obrázka 19.1 a rozpísať do tabuľky 19.1.



Obrázek 19.1: *Graf rýchlosti vlaku v závislosti od času*

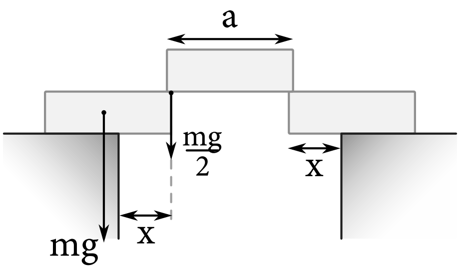
V každom intervale vlak spomaľuje rovnomerne z rýchlosti v_i na rýchlosť $w_i = v_i - a_i\,\Delta t_i$, takže jeho priemernú rýchlosť v danom intervale môžeme spočítať ako aritmetický priemer rýchlostí na začiatku a konci úseku. Navyše platí $v_{i+1} = w_i$, keďže rýchlosť sa musí meniť spojito. Posledný úsek je špeciálny: brzdia všetky vozidlá a vlak bude spomaľovať, až kým nezastane. To mu pri spomaľovaní 2 m/s^2 z rýchlosti $v_5 = 13$ m/s potrvá 6,5 s a prejdená dráha bude $s_5 = \frac{169}{4}$ m = 42,25 m. Nakoniec spočítame prejdenú dráhu ako priemernú rýchlosť vynásobenú dĺžkou intervalu, $s_i = \overline{v}_i \cdot \Delta t_i$.

Tabulka 19.1: Hodnoty okamžitého spomalenia a im zodpovedajúce dráhy.

počet brzdiacich vozňov	Δt_i / s	F_i / kN	a_i / m/s^2	v_i / m/s	w_i / m/s	$\overline{v}_i$ / m/s	s_i / m
0	1	200	1,0	20,0	19,0	19,5	19,50
1	1	240	1,2	19,0	17,8	18,4	18,40
2	1	280	1,4	17,8	16,4	17,1	17,10
3	1	320	1,6	16,4	14,8	15,6	15,60
4	1	360	1,8	14,8	13,0	13,9	13,90
5	6,5	400	2	13,0	0,0	6,5	42,25

Ostáva nám jednotlivé dráhy sčítať a dozvieme sa, že celková brzdná dráha bude 126,75 m.

20 Najskôr si uvedomme, že kvádre musia byť orientované vodorovne, pretože ak by sa niektorý kváder naklonil, potom by sa v dôsledku nulového trenia zošmykol do diery. Riešenie bude teda vyzerať tak, že dva kvádre budú položené na podložkách takým spôsobom, že budú pretŕčať o vzdialenosť x, a na týchto dvoch kvádroch bude položený tretí tak, že sa hranami bude opierať o hrany spodných kvádrov (pozri obrázok 20.1).



Obrázek 20.1: *Most s maximálnym možným rozpätím.*

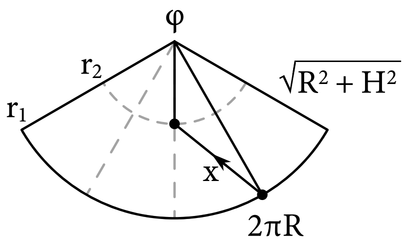
Potrebujeme teda zistiť maximálnu vzdialenosť x, o ktorú spodné kvádre môžu pretŕčať ponad medzeru. K tomu, aby sa kvádre nezrútili, musí byť celkový moment síl pôsobiacich na spodné kvádre nulový. Zoberme si teda jeden z týchto kvádrov a za os otáčania si zvoľme kraj medzery. Tiažová sila pôsobí v ťažisku, teda vo vzdialenosti $a/2 - x$ od osi, a vrchný kváder pôsobí silou $mg/2$ vo vzdialenosti x. Potom platí

$$mg\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{mg}{2}x. \tag{20.1}$$

Z toho dostaneme $x = a/3$, takže maximálne rozpätie mosta sa blíži k hodnote

$$d = 2x + a = \frac{5}{3}a. \tag{20.2}$$

21 Hľadať minimálnu vzdialenosť medzi dvomi bodmi na kuželi vôbec nevyzerá jednoducho, ale opak je pravdou. Stačí si nakresliť jeho sieť. Podstava kužeľa v tejto úlohe nie je podstatná, takže na obrázku je len rozvinutý plášť kužeľa do roviny.



Obrázek 21.1: *Plášť kužeľa rozvinutý do roviny.*

Podstava polomeru R spôsobuje, že kružnicová časť obvodu plášťa má dĺžku $2\pi R$. Polomer tejto kružnice je $\sqrt{R^2 + H^2}$, pretože to je prepona pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesnami sú polomer podstavy R a výška kužeľa H. Preto je na rozvinutom plášti pri vrchole uhol $\varphi = \frac{2\pi R}{\sqrt{R^2+H^2}}$. Ignorujúc zmenu výšky, mravec chce prejsť od juhovýchodu k juhozápad, teda štvrtinu uhla φ.

Keď na obrázku máme vyznačené body, medzi ktorými mravec ide, najkratšia cesta je rovná cesta, pretože sa bavíme o plášti rozvinutom do roviny. A keď tieto dva body spojíme s vrcholom kužeľa, vznikne nám trojuholník, na ktorý môžeme aplikovať kosínusovú vetu. Uhol pri vrchole kužeľa poznáme, ešte chceme poznať aj dĺžky spojníc medzi vrcholom a obomi bodmi, medzi ktorými mravec prejde. Vzdialenosť od vrchola k spodnému bodu je samozrejme $r_1 = \sqrt{R^2 + H^2}$ a vzdialenosť od vrchola k hornému bodu je $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + H^2}$, pretože mravec lezie do polovice výšky kužeľa.

Ak označíme našu hľadanú vzdialenosť x, podľa kosínusovej vety

$$x^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\frac{\varphi}{4}, \tag{21.1}$$

čo po dosadení za r_1, r_2 a φ a úpravách dáva

$$x = \sqrt{R^2+H^2}\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\frac{\pi R}{2\sqrt{R^2+H^2}}}. \tag{21.2}$$

Pre hodnoty zo zadania je táto vzdialenosť $x \doteq 1{,}56$ m.

22 Načrtnime si náš plán. Palička sa nehýbe, ak súčet síl a momentov síl na ňu pôsobiacich je nulový. Na paličku pôsobí gravitačná sila smerom nadol a elektrické sily od zvyšných nábojov v rôznych vodorovných smeroch, a nakoniec je tam strop, ktorý celú sústavu určite udrží. Momenty síl bude najprirodzenejšie počítať vzhľadom na bod na strope. V takom prípade na každú paličku pôsobí iba moment od tiažovej sily a od ostatných paličiek. Takže potrebujeme zistiť, o aký uhol sa palička musí vychýliť, aby bol ich súčet nulový.

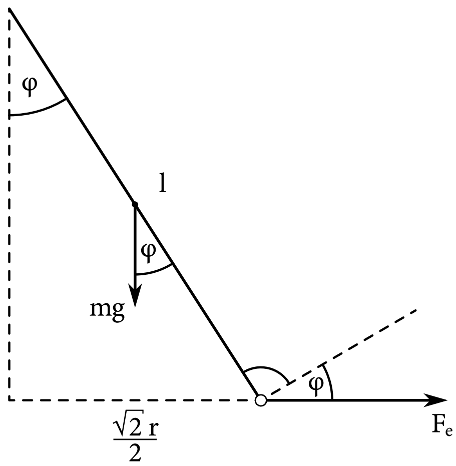
Budeme počítať so všeobecnými hodnotami, takže si označíme náboj q, hmotnosť paličky m a jej dĺžku d. Zo symetrie je jasné, že v rovnovážnej polohe tvoria bodové náboje vrcholy štvorca a stačí nám pozerať sa len na momenty síl pôsobiacich na jednu paličku. Nech má štvorec dĺžky strán r, čiže jeho uhlopriečka má dĺžku $\sqrt{2}r$. Vyberme si jednu paličku. Na náboj na nej pôsobia elektrické sily od susedných nábojov. Obe majú veľkosť

$$F_{e1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{22.1}$$

a sú navzájom kolmé. Preto keď ich vektorovo zložíme, dostaneme silu veľkosti $\sqrt{2}F_{e1}$ so smerom od stredu štvorca k náboju na našej paličke. Sila od náboja, ktorý leží uhlopriečne od nášho, má veľkosť

$$F_{e2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}r)^2} \tag{22.2}$$

a smer má tiež od stredu k nášmu náboju. Na náboj na našej paličke teda pôsobí celková elektrická sila veľkosti $F_e = \sqrt{2}F_{e1} + F_{e2}$ smerujúca od stredu štvorca. Gravitačná sila pôsobí samozrejme nadol a pôsobí v ťažisku paličky. Na obrázku 22.1 to celé vyzerá nasledovne:



Obrázek 22.1: *Sily pôsobiace na jednu paličku.*

Spodná strana trojuholníka je polovica uhlopriečky štvorca, preto je jej dĺžka $\frac{\sqrt{2}r}{2}$. A takisto z trojuholníka vidíme, že $r = \frac{2}{\sqrt{2}} d \sin\varphi$. Rovnica rovnosti momentov síl je teda

$$mg\frac{d}{2}\sin\varphi = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)d\cos\varphi$$
$$mg\frac{d}{2}\sin\varphi = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{2}{\sqrt{2}}d\sin\varphi\right)^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)d\cos\varphi \tag{22.3}$$
$$\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right).$$

V tomto momente sa dostávame k tomu, že táto úloha nemá analytické riešenie, teda že nevieme vyjadriť, čomu sa rovná uhol φ. Musíme teda zobrať kalkulačku a s rozumom vyskúšať pár hodnôt φ. Dostatočne presný výsledok nájdeme napríklad binárnym vyhľadávaním. Výsledkom pre hodnoty zo zadania je $\varphi \doteq 68°$.

23 Označme hmotnosť kamióna M a hmotnosť muchy m. Rýchlosť kamióna nech je v, rýchlosť muchy $-v$ a ich spoločná rýchlosť po zrážke u. Zo zákona zachovania hybnosti platí

$$Mv - mv = (M+m)u \quad\Rightarrow\quad u = \frac{M-m}{M+m}v. \tag{23.1}$$

Ide o nepružnú zrážku, takže energia sa nezachováva. Rozdiel medzi energiou pred a po zrážke zodpovedá teplu, ktoré sa pri zrážke vygeneruje,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}M\left(v^2-u^2\right) + \frac{1}{2}m\left((-v)^2-u^2\right) \\ &= 2\frac{Mm}{M+m}v^2. \end{aligned} \tag{23.2}$$

Hmotnosť kamióna je zrejme ďaleko väčšia než hmotnosť muchy, preto možno v menovateli zanedbať m voči M a dostaneme

$$Q \approx 2mv^2. \tag{23.3}$$

Podľa zadania sa má všetko teplo spotrebovať na zahriatie pozostatkov muchy, teda

$$Q = mc\,\Delta t. \tag{23.4}$$

Z rovností posledných dvoch rovníc konečne dostávame

$$\Delta T \approx \frac{2v^2}{c} \approx 0{,}13\ °\mathrm{C}. \tag{23.5}$$

24 Ak má na začiatku Krtko nulovú rýchlosť, jeho kinetická energia musí byť takisto nulová. Kým príde do miesta na boku slučky, jeho potenciálna energia klesne o mgr, a keďže trenie ani odpor vzduchu neuvažujeme, jeho kinetická energia musí presne o toľko vzrásť. Jeho rýchlosť poznáme, takže dokážeme vyjadriť polomer,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v^2}{2g}. \tag{24.1}$$

Kým zíde do najspodnejšieho bodu slučky, jeho kinetická energia musí opäť narásť o mgr, takže bude rovná $mv^2 = 2mgr$. Nová rýchlosť (označme si ju w) bude teda ešte $\sqrt{2}$-krát vyššia. Z toho už vieme vyjadriť veľkosť dostredivého zrýchlenia

$$a_c = \frac{w^2}{r} = \frac{2v^2}{r} = \frac{2v^2 \cdot 2g}{v^2} = 4g. \tag{24.2}$$

Všetko sa teda pokrátilo a vidíme, že výsledné zrýchlenie nezávisí od rozmerov slučky, a teda ani od veľkosti rýchlosti v. Krtka však viac zaujíma *preťaženie*, teda výslednica všetkých síl, ktoré naňho pôsobia zvonku priamym kontaktom. Keď pokojne sedí na vrchu dráhy, preťaženie stále cíti: gravitačná sila totiž pôsobí na všetky jeho častice rovnako a teda ju nevníma, vníma však reakciu sedadla na gravitačnú silu. Tá pôsobí po celý čas – vždy s rovnakým smerom aj veľkosťou, totiž $1g$ smerom nahor. A keďže naspodu slučky aj dostredivá sila pôsobí rovnakým smerom, preťaženie, ktoré tu bude bude Krtko cítiť, bude až $5g$.

25 Na úvod si ukážme, ako sa správajú pružinky, ak ich zapojíme paralelne. Výsledná sila od pružiniek je súčtom síl od jednotlivých pružín. Zároveň vyžadujeme, aby bolo ich predĺženie rovnaké ako predĺženie celej sústavy, a teda dostávame

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ k \cdot \Delta x &= k_1 \cdot \Delta x + k_2 \cdot \Delta x \\ k &= k_1 + k_2. \end{aligned} \tag{25.1}$$

Vidíme, že ak máme dve identické pružiny, v paralelnom zapojení sa správajú ako dvakrát tuhšia pružina, a ak máme pružín n, ako n-krát tuhšia pružina.

Zo zadania vieme, že každá pružina má neznámu pokojovú dĺžku. Označme si ju s. Potom vieme, že keď sa Jožko zavesí na jednu pružinu, bude od zeme vzdialený 50 cm, čo znamená, že predĺženie pružiny Δx_1 spolu s pokojovou dĺžkou s budú dokopy 200 cm. Ak sa zavesí na dve pružiny, bude predĺženie pružiny Δx_2 spolu s pokojovou dĺžkou s dokopy 110 cm, pretože je 140 cm nad zemou. No a ak sa zavesí na tri pružiny, bude predĺženie pružiny Δx_3 spolu s pokojovou dĺžkou s rovné hľadanej dĺžke, ktorú si môžeme označiť ψ.

S týmto označením dostávame rovnice rovnosti síl

$$\begin{aligned} F = mg = \quad k\,\Delta x_1 &= 2k\,\Delta x_2 = 3k\,\Delta x_3, \\ \Delta x_1 &= 2\,\Delta x_2 = 3\,\Delta x_3, \\ 200\text{ cm} - s &= 2(110\text{ cm} - s) = 3(\psi - s). \end{aligned} \tag{25.2}$$

Z toho už ľahko vieme vypočítať pokojovú dĺžku

$$200\text{ cm} - s = 220\text{ cm} - 2s \quad \Rightarrow \quad s = 20\text{ cm}. \tag{25.3}$$

Keď už máme s, vyrátať vzdialenosť od stropu ψ je triviálne,

$$3\psi - 3s = 200\ \text{cm} - s \quad \Rightarrow \quad \psi = 80\ \text{cm}. \tag{25.4}$$

Zadanie sa ale pýta na Jožkovu vzdialenosť od zeme, nie od stropu, takže výsledok je 250 cm − ψ = 170 cm.

26 Pripomeňme si, aká sila pôsobí na nabitý objekt v elektrickom a magnetickom poli. V elektrickom poli je to elektrická sila

$$\vec{F_e} = Q\vec{E}, \tag{26.1}$$

kde Q je náboj objektu; v magnetickom poli je to magnetická sila

$$\vec{F_m} = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{26.2}$$

kde $\vec{v}$ je rýchlosť objektu. Elektrická sila pôsobí v smere alebo proti smeru elektrického poľa, v závislosti na náboji objektu, magnetická sila v smere kolmom na magnetické pole a rýchlosť objektu. To znamená, že elektrická sila mení rýchlosť častice a magnetická sila jej smer, t. j. je dostredivou silou.

Poďme si teraz rozanalyzovať pohyb guľky. Označme si vodorovnú súradnicu x a zvislú y. Na obrázku máme vyznačenú trajektóriu guľky, no nemáme tam vyznačený smer pohybu. Ten však vieme určiť pomerne jednoducho. Predpokladajme, že guľka najskôr prechádza magnetickým a potom elektrickým poľom. Zo smeru zakrivenia pohybu v magnetickom poli vieme povedať, že guľka má kladný náboj. Keď potom guľka prejde do elektrického poľa, elektrická sila má smer zhodný s intenzitou, preto ju bude urýchľovať smerom doľava, čo naozaj pozorujeme, keďže rovnakej zmene y-ovej súradnice prislúcha čoraz väčšia zmena x-ovej súradnice. Keby sa guľka pohybovala v opačnom smere, z trajektórie pohybu v elektrickom poli by sme usudzovali, že spomaľuje, preto by musela mať kladný náboj, no to by znamenalo, že po prechode do magnetického poľa by musela zatáčať do opačnej strany.

Nech je veľkosť rýchlosti guľky v. Magnetické pole má smer kolmý na rovinu pohybu, preto bude vždy kolmé na vektor rýchlosti, a teda veľkosť magnetickej sily je

$$F_m = QvB. \tag{26.3}$$

Magnetická sila je dostredivou silou, teda

$$QvB = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{m} = \frac{v}{Br}, \tag{26.4}$$

kde m je hmotnosť guľky, a keďže má konštantnú veľkosť, guľka sa bude pohybovať po kružnici. Z obrázka vieme odčítať jej polomer $r = 5$ m. Na základe smeru zakrivenia vieme zase povedať, že guľka má kladný náboj.

Guľka prechádza plynulo z magnetického do elektrického poľa. V mieste prechodu nesmie byť žiadna ostrá zmena smeru ani veľkosti rýchlosti, nakoľko by to znamenalo nekonečnú silu v tomto bode. Z obrázka vidíme, že v momente, keď guľka vstupuje do elektrického poľa, pohybuje sa v y-ovom smere rýchlosťou, ktorou vyšla z magnetického poľa, teda v. Nech guľka pobudne v elektrickom poli po dobu t. Za tento čas prejde v y-ovom smere vzdialenosť $\Delta y = 5$ m a v x-ovom smere $\Delta x = 10$ m. V y-ovom smere nepôsobí žiadna sila, preto

$$\Delta y = vt; \tag{26.5}$$

v x-ovom smere pôsobí sila veľkosti

$$F_e = QE, \tag{26.6}$$

takže guľka sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením

$$a = \frac{QE}{m} \tag{26.7}$$

a s nulovou počiatočnou rýchlosťou, teda

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{QE}{m}t^2. \tag{26.8}$$

Vylúčením času z rovníc dostávame

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\left(\frac{\Delta y}{v}\right)^2, \tag{26.9}$$

v čom spoznávame rovnicu paraboly.

Dosadením za $\frac{Q}{m}$ dostávame

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{v}{Br}E\left(\frac{\Delta y}{v}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\frac{E}{B}\frac{(\Delta y)^2}{r\,\Delta x}. \tag{26.10}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania a odčítané z obrázku dostávame $v = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$.

27 Najedený hroch je homogénna guľa s polomerom r a hmotnosťou m. Moment zotrvačnosti takéhoto telesa možno poznáte aj spamäti, ak nie, pomôžu tabuľky. Je to

$$I_1 = \frac{2}{5}mr^2. \tag{27.1}$$

To bolo ľahké! Ako je to ale s hladným hrochom? Ten má tvar gule, z ktorej stredu je vyrezaná menšia guľa s polovičným polomerom. Moment zotrvačnosti takéhoto telesa vypočítame tak, že od momentu zotrvačnosti najedeného hrocha odčítame moment zotrvačnosti žalúdka. Žalúdok je guľa s hmotnosťou $m/8$, a teda s polomerom $r/2$, takže moment zotrvačnosti hladného hrocha je

$$I_2 = \frac{2}{5}mr^2 - \frac{2}{5}\frac{m}{8}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{31}{80}mr^2. \tag{27.2}$$

Teraz si spomeňme na zákon zachovania energie. Nech sa hrochy nachádzajú vo výške h nad Nílom, a teda počas valenia klesnú práve o túto výšku. Najedenému hrochovi klesne jeho potenciálna energia o mgh. Táto energia sa premení na rotačnú a translačnú zložku kinetickej energie hrocha. Navyše pre uhlovú rýchlosť valenia sa hrocha platí $\omega = v/r$, pretože hroch neprešmykuje. Preto pre najedeného hrocha môžeme písať

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}I_1\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{1}{5}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{7}{10}mv_1^2, \end{aligned} \tag{27.3}$$

odkiaľ úpravou dostaneme

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gh}. \tag{27.4}$$

Teraz rovnako spočítame aj rýchlosť hladného hrocha. Nesmieme ale zabudnúť, že tento hroch má hmotnosť len $\frac{7}{8}m$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{7}{8}mgh &= \frac{1}{2}I_2\left(\frac{v_2}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{7}{8}mv_2^2 \\ &= \frac{31}{160}mv_2^2 + \frac{7}{16}mv_2^2 \\ &= \frac{101}{160}mv_2^2 \end{aligned} \tag{27.5}$$

a odtiaľ

$$v_2 = \sqrt{\frac{140}{101}gh}. \tag{27.6}$$

Teraz nám už len stačí dať do pomeru tieto dve rýchlosti

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{202}}{14} \tag{27.7}$$

a zistíme, že najedený hroch sa dokotúľa do vody vyššou rýchlosťou.

28 Pri ponáraní lopty postupne narastá hydrostatický tlak a tým sa zmenšuje objem plynu v nej. Keď sa objem lopty zmenší natoľko, že jej priemerná hustota presiahne hustotu vody, tiažová sila definitívne vyhrá nad vztlakovou a lopta sa už sama nevynorí.

Označme si $m = 0{,}1$ kg hmotnosť prázdnej lopty, R_0 jej polomer a $V_0 = \frac{4\pi}{3}R_0^3 \approx 0{,}0042\ \mathrm{m}^3$ jej objem pred ponorením. Keď Lucy naplní loptu vzduchom, jej hmotnosť narastie o hmotnosť vzduchu a celkovo teda bude mať hmotnosť

$$M = m + V_0\rho_a, \tag{28.1}$$

kde ρ_a je hustota vzduchu pri štandardnej teplote a tlaku. Pretože Lucy ponára loptu veľmi pomaly, teplota plynu v nej ostane počas celého procesu rovná teplote vody a pôjde teda o izotermický dej. Vieme, že v izotermickom deji platí $pV =$ konšt., takže aj súčin tlaku a objemu vzduchu v lopte ostáva počas ponárania rovnaký.

Tlak na hladine vody je jednoducho len atmosférický tlak p_0. V hĺbke h k nemu pribúda hydrostatický tlak $\rho_w gh$, kde ρ_w je hustota vody. Objem lopty v hĺbke h označme V. Potom platí

$$p_0V_0 = (p_0 + \rho_w gh)V. \tag{28.2}$$

Z tejto rovnice už jednoducho vyjadríme objem lopty v hĺbke h

$$V = V_0\frac{p_0}{p_0 + \rho_w gh}. \tag{28.3}$$

Aby sme našli hraničnú hĺbku, potrebujeme zaručiť, aby hustota lopty bola rovná hustote vody, teda

$$\frac{M}{V} = \rho_w. \tag{28.4}$$

Teraz nám stačí len dosadiť hmotnosť M z rovnice 28.1 a objem V lopty z rovnice 28.3 a dostaneme

$$\frac{m + V_0\rho_a}{V_0\frac{p_0}{p_0+\rho_w gh}} = \rho_w \tag{28.5}$$

a vyjadriť hĺbku h. Výsledok je

$$h = \frac{p_0}{\rho_w g}\left(\frac{4\pi R_0^3\rho_w}{3m + 4\pi R_0^3\rho_a} - 1\right) \approx 392\ \mathrm{m}. \tag{28.6}$$

29 Keďže na sústavu nepôsobia žiadne vonkajšie momenty síl, jej celkový moment hybnosti sa musí zachovať. Naopak energia sa nezachováva, pretože v nej pôsobí trenie a nejaká časť kinetickej energie sa preto premení na teplo. Ak I_1 je moment zotrvačnosti disku, počiatočný moment hybnosti sústavy je $L = I_1\omega$.

Po roztočení štvorca s momentom zotrvačnosti I_2 sa celkový moment zotrvačnosti zvýši na $I_1 + I_2$ a uhlová rýchlosť sa zníži na ω'. Moment hybnosti bude teda $L = (I_1+I_2)\omega'$. Zo zákona zachovania momentu hybnosti potom už vieme jednoducho vyjadriť hľadanú uhlovú rýchlosť ako

$$\omega' = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega. \tag{29.1}$$

Zostáva nám ešte vyjadriť jednotlivé momenty zotrvačnosti. Moment zotrvačnosti homogénneho disku rotujúceho okolo jeho osi je $I_1 = \frac{1}{2}m_1r^2$, v našom prípade teda $I_1 = \frac{\pi}{2}\sigma r^4$. Moment zotrvačnosti homogénneho štvorca s osou prechádzajúcou jeho stredom vieme určiť za pomoci Steinerovej vety a vlastnosti, že takýto štvorec vieme vyskladať zo štyroch menších štvorcov s polovičnou dĺžkou strany a s osou prechádzajúcou jedným z ich vrcholov. Vyjadrime si moment zotrvačnosti celého štvorca ako $I_2 = Km_2a^2 = K\sigma a^4$ s nejakou neznámou konštantou K. Ide o aditívnu veličinu, takže sa bude rovnať jednoducho súčtu momentov zotrvačnosti spomínaných štyroch menších štvorcov. Tie budú mať štvrtinovú hmotnosť, polovičnú dĺžku strany a os budú mať vo vzdialenosti $l = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ od ich ťažiska. Konštantu K budú mať ale stále rovnakú. Preto

$$\begin{aligned}
Km_2a^2 &= 4\left(K\frac{m_2}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{4}l^2\right),\\
K\sigma a^4 &= 4\left(K\sigma\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \sigma\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2\right),\\
\frac{3}{4}K\sigma a^4 &= \frac{1}{8}\sigma a^4,\\
K &= \frac{1}{6}.
\end{aligned} \tag{29.2}$$

Moment zotrvačnosti veľkého štvorca bude teda $I_2 = \frac{1}{6}\sigma a^4$ a hľadaná uhlová rýchlosť

$$\omega' = \frac{\frac{\pi}{2}\sigma r^4}{\frac{\pi}{2}\sigma r^4 + \frac{1}{6}\sigma a^4}\omega = \frac{3\pi r^4}{3\pi r^4 + a^4}\omega. \tag{29.3}$$

30 Rezistor kladie elektrickému prúdu odpor a vzniká v ňom Joulovo teplo. Zároveň ale nejaké teplo aj stráca, pretože je v kontakte s okolitým vzduchom, a vieme, že stratené teplo je úmerné rozdielu teplôt rezistora a okolia. Výkon, ktorým teplo v rezistore vzniká, je

$$P_+ = UI = \frac{U^2}{R}. \tag{30.1}$$

a výkon, ktorým teplo z rezistora odchádza, je

$$P_- = kS\,\Delta T, \tag{30.2}$$

kde S je plocha povrchu rezistora, ΔT je rozdiel teplôt rezistora a okolia a k je nejaká konštanta závislá od tvaru a materiálu rezistora.

Teplota rezistora sa ustáli, keď prijíma práve toľko tepla, koľko ho aj odovzdáva, teda $P_+ = P_-$, čiže

$$\frac{U^2}{R} = kS\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{U^2}{RkS}. \tag{30.3}$$

Odpor vodiča s dĺžkou ℓ a plochou prierezu S počítame ako

$$R = \rho\frac{\ell}{S}, \tag{30.4}$$

kde ρ je rezistivita materiálu. Ak α-krát zväčšíme každý rozmer vodiča, ℓ sa zväčší α-krát a S sa zväčší α^2-krát. A platí to pre ľubovoľný vodič, pretože aj ak má v rôznych miestach rôznu plochu prierezu, každý z nich sa zväčší α^2-krát. Rezistor je vlastne len nedokonalý „vodič“, a teda ak α-krát zväčšíme jeho rozmery, jeho odpor sa zmenší α-krát.

Rezistor α-krát väčší sa ustáli na inej teplote T_2 a rozdiel jeho teploty oproti okoliu bude $\Delta T_2 = T_2 - T_0$. Súc vyzbrojení touto vedomosťou sa môžeme vrhnúť na rovnicu 30.3, z ktorej sa stane

$$\Delta T_2 = \frac{U^2}{\frac{R}{\alpha}k\alpha^2 S} = \frac{1}{\alpha}\frac{U^2}{RkS} = \frac{1}{\alpha}\Delta T \tag{30.5}$$

Zo zadania je v tejto úlohe $\alpha = 2$, a preto $\Delta T_2 = \frac{1}{2}\Delta T$. Pre malý rezistor je rozdiel teplôt $\Delta T = T_1 - T_0$, pre veľký to je $\Delta T_2 = T_2 - T_0$. Po dosadení týchto výrazov do rovnice vieme vyjadriť ustálenú teplotu veľkého rezistora ako

$$T_2 = \frac{T_0 + T_1}{2}.$$

31 Moment zotrvačnosti hviezdy možno určiť ako súčet momentov zotrvačnosti jednotlivých tyčí okolo osi prechádzajúcej ťažiskom hviezdy. Moment zotrvačnosti tyče s hmotnosťou m a dĺžkou d okolo osi prechádzajúcej jej ťažiskom je $I_0 = \frac{1}{12}md^2$. Ak chceme vypočítať moment zotrvačnosti okolo inej paralelnej osi, môžeme použiť Steinerovu vetu, ktorá hovorí, že moment zotrvačnosti okolo novej osi možno vypočítať z momentu zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej ťažiskom ako

$$I = I_0 + mx^2, \tag{31.1}$$

kde x je vzdialenosť paralelných osí.

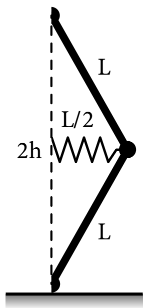
V prípade hviezdy je vzdialenosť osí prechádzajúcej ťažiskom tyče a hviezdy tretina ťažnice „trojuholníka“, ktorého ťažisko je zhodné s ťažiskom hviezdy. Dĺžku ťažnice rovnostranného trojuholníka možno určiť z Pytagorovej vety ako

$$t = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}d. \tag{31.2}$$

Moment zotrvačnosti hviezdy okolo ťažiska je preto

$$I = 6\left(I_0 + m\left(\frac{t}{3}\right)^2\right) = 6\left(\frac{1}{12}md^2 + \frac{1}{12}md^2\right) = md^2. \tag{31.3}$$

$\boxed{32}$ Potrebnú tuhosť pružiny použitej v Dušanovom výtvore spočítame pomocou metódy virtuálnych prác. Tá hovorí, že ak sa systém infinitezimálne vychýli z rovnovážnej polohy, jeho energia sa nezmení. Celý výtvor je osovo súmerný, a teda sa nám stačí pozerať na jednu jeho polovicu, druhá musí vždy robiť to isté.



Obrázek 32.1: *Rozmery „umenia“ v rovnovážnej polohe*

Zo zadania vieme, že Dušanov systém je v rovnovážnej polohe, keď je pružina natiahnutá na dĺžku L. Vtedy vieme vypočítať výšku systému (označme si ju $2h$) z Pytagorovej vety. Platí

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2, \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}L. \tag{32.1}$$

Celková potenciálna energia systému je súčtom potenciálnych energií štyroch tyčí v gravitačnom poli a potenciálnej energie natiahnutej pružiny s tuhosťou k. V rovnovážnej polohe sú ťažiská dvoch tyčí vo výške $\frac{h}{2}$ a ďalších dvoch tyčí vo výške $\frac{3h}{2}$. Energia je preto

$$E = 2\left(\frac{1}{2}mgh + \frac{3}{2}mgh\right) + \frac{1}{2}kL^2 = 4mgh + \frac{1}{2}kL^2. \tag{32.2}$$

Pripusťme teraz, že sa pružina natiahne o infinitezimálnu dĺžku dx. Keďže dĺžka tyčí sa nemože zmeniť, výška h sa zmení na $h + \mathrm{d}h$, pričom stále platí Pytagorova veta

$$L^2 = \left(\frac{L + \mathrm{d}x}{2}\right)^2 + (h + \mathrm{d}h)^2. \tag{32.3}$$

Ak zanedbáme infinitezimálne zmeny vo vyššom ako prvom ráde, čiže $(\mathrm{d}x)^2$ a $(\mathrm{d}h)^2$, dostaneme vzťah medzi zmenou výšky a natiahnutím pružiny

$$\mathrm{d}h = -\frac{L}{4h}\,\mathrm{d}x. \tag{32.4}$$

Pozrime sa teraz na energiu, pričom opäť zanedbáme infinitezimálne príspevky vo vyššom ako prvom ráde

$$E = 4mg(h + \mathrm{d}h) + \frac{1}{2}k(L + \mathrm{d}x)^2 \approx 4mg(h + \mathrm{d}h) + \frac{1}{2}k(L^2 + 2L\,\mathrm{d}x). \tag{32.5}$$

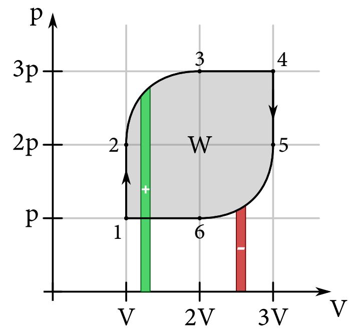
Vieme, že energia sa nezmenila, z čoho dostaneme

$$0 = 4mg\,\mathrm{d}h + kL\,\mathrm{d}x = \left(-mg\frac{L}{h} + kL\right)\mathrm{d}x. \tag{32.6}$$

Triviálnou úpravou a dosadením za h konečne dostaneme tuhosť pružiny, ktorú Dušan použil,

$$k = \frac{mg}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{mg}{L}. \tag{32.7}$$

33 Označme si význačné stavy postupne 1 až 6, ako sú zaznačené na priloženom pV diagrame 33.1. Plyn má v stave 1 najnižšiu teplotu a v stave 4 najvyššiu. Nech je teplota v stave 1 $T_1 = T$. Potom už vieme dopočítať zo stavovej rovnice teplotu v ľubovoľnom stave, takže v každom zo šiestich význačných stavov poznáme objem tlak aj teplotu.



Obrázek 33.1: *pV diagram so zakreslenými význačnými stavmi.*

Zaujíma nás účinnosť tepelného stroja. Tá je definovaná ako podiel získanej práce za jeden cyklus a množstva dodaného tepla

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{in}}}. \tag{33.1}$$

Začnime prácou. Pri malej zmene objemu ΔV plyn vykoná prácu $\Delta W = p\,\Delta V$. Geometricky na priloženom pV diagrame to zodpovedá ploche obdĺžnička so šírkou ΔV medzi krivkou grafu a objemovou osou. Celková práca medzi dvoma stavmi je teda rovná ploche pod grafom medzi týmito dvoma stavmi. Práca medzi stavmi 1 a 4 je kladná, t. j. plyn koná prácu, a medzi stavmi 4 a 1 záporná, t. j. práca je konaná na plyne. Celková získaná práca je teda rovná ploche ohraničenej krivkou[2]

$$W = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) pV. \tag{33.2}$$

Poďme teraz na investované teplo. Z prvej vety termodynamickej vieme, že dodané teplo sa spotrebuje na vykonanie práce a na zmenu vnútornej energie

$$Q = W + \Delta U. \tag{33.3}$$

Vnútornej energia je však úmerná teplote. Na stupeň voľnosti častice pripadá energia $\frac{1}{2}kT$, no a keďže každá častica má tri stupne voľnosti[3] a častíc je N,

$$\Delta U = \frac{3}{2} Nk\,\Delta T. \tag{33.4}$$

Teplo do termodynamického cyklu dodávame len medzi stavmi 1 a 4. Teplota v stave 4 je podľa stavovej rovnice

$$T_4 = \frac{p_4 V_4}{p_1 V_1} T_1 = \frac{3p}{p} \frac{3V}{V} T = 9T. \tag{33.5}$$

Zmena vnútornej energie je potom

$$\Delta U_{14} = \frac{3}{2} Nk(T_4 - T_1) = 12NkT \tag{33.6}$$

a vykonaná práca medzi týmito dvoma stavmi je rovná ploche pod grafom, teda

$$W_{14} = \left(5 + \frac{\pi}{4}\right) pV. \tag{33.7}$$

Celkové dodané teplo do tepelného stroja preto je

$$Q_{\text{in}} = W_{14} + \Delta U_{14} = \left(5 + \frac{\pi}{4}\right) pV + 12NkT. \tag{33.8}$$

Využijúc, že podľa stavovej rovnice písanej pre stav 1 platí $pV = NkT$, dostávame

$$Q_{\text{in}} = \left(17 + \frac{\pi}{4}\right) pV. \tag{33.9}$$

[2] Dva obdĺžniky $p \times V$ a dve štvrťelipsy s polosami p a V.

[3] Plyn je jednoatómový, preto má tri translačné a žiadne rotačné stupne voľnosti.

Dosadiac do vzťahu pre účinnosť konečne dostávame

$$\eta = \frac{\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(17 + \frac{\pi}{4}\right)} \doteq 0{,}2 = 20\ \%. \tag{33.10}$$

$\boxed{34}$ Úloha je geometricky vcelku jednoduchá, trochu nás však pravdepodobne potrápi výpočet. Z obrázka v zadaní vidíme, že pre skutočné dva parseky platí

$$2\ \mathrm{pc} = \frac{2\ \mathrm{au}}{\tan 1''} \tag{34.1}$$

a pre Kvíkovu jednotku $\mathcal{P}$ zas

$$\mathcal{P} = \frac{1\ \mathrm{au}}{\tan 0{,}5''}. \tag{34.2}$$

Zaujíma nás teda, koľko je

$$\mathcal{P} - 2\ \mathrm{pc} = \frac{1\ \mathrm{au}}{\tan 0{,}5''} - \frac{2\ \mathrm{au}}{\tan 1''}. \tag{34.3}$$

No a tu pravdepodobne máme problém. Uhol 1″ je veľmi malý a počet metrov v parseku je veľmi veľký. Keď odčítame dve čísla, ktoré sa líšia na asi dvanástej platnej číslici, kalkulačka ich v pamäti zaokrúhli a poskytne len veľmi nepresný výsledok, alebo dokonca povie, že rozdiel je nula.[4]

Preto použijeme Taylorov rozvoj. Pre funkciu tangens platí

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots \tag{34.4}$$

Očkom odhadneme, že pri požadovanej presnosti 1 km bude stačiť použiť prvý odlišný člen, teda tretí rád. Dostaneme

$$2\ \mathrm{pc} \approx \frac{1}{x + \frac{x^3}{3}} \cdot 2\ \mathrm{au} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{P} \approx \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3}} \cdot 1\ \mathrm{au}, \tag{34.5}$$

kde x bude 1″. Po pár jednoduchých úpravách dostaneme

$$\mathcal{P} - 2\ \mathrm{pc} \approx \frac{2}{x}\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}}\right) \cdot 1\ \mathrm{au}. \tag{34.6}$$

Keď už pácháme zverstvá s Taylorovým rozvojom, smieme použiť aj linearizáciu

$$\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x, \tag{34.7}$$

čo nám rovnicu 34.3 umožní prepísať do tvaru

$$\mathcal{P} - 2\ \mathrm{pc} \approx 1\ \mathrm{au} \cdot \frac{2}{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} - 1 + \frac{x^2}{3}\right) = 1\ \mathrm{au} \cdot \frac{2}{x}\frac{x^2}{4} = 1\ \mathrm{au} \cdot \frac{x}{2}. \tag{34.8}$$

[4] Počítač to zvládne. Ten však počas súťaže nemáte. Dobrá kalkulačka to zvládne tiež – ak takú máte, tento príklad vám vie značne uľahčiť.

Teraz už len naspäť dosadíme $x = 1'' = \frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60} = \frac{\pi}{648000}$ a dostaneme výsledok

$$\mathcal{P} - 2\,\text{pc} \approx \frac{1''}{2}\cdot 1\,\text{au} = \frac{\pi}{1\,296\,000}\cdot 1{,}5\cdot 10^8\,\text{km} \doteq 364\,\text{km}. \tag{34.9}$$

Zahrnutím ďalšieho člena ($\propto x^5$) by sme dostali výsledok iba o asi 2 µm odlišný. Nakoniec ešte dodajme, že moderná definícia parseka užneráta ani s tangensom uhla, ale ho definuje priamo ako $1\,\text{au}\cdot\frac{648000}{\pi}$.

$\boxed{\textbf{35}}$ Výsledná teplota zrkadlovej sféry v rovnovážnom stave vôbec nezávisí od toho, ako vyzeralo čierne teleso vo vnútri, na akej teplote sa ustálilo, keď nebolo obalené, alebo akú časť žiarenia vonkajšia sféra odráža späť dnu: ak zdroj energie dodáva výkon P, táto energia sa v rovnovážnom stave musí opäť aj vyžiariť. Zrkadlová fólia má dva povrchy – vonkajší a vnútorný – a ich celková plocha je $2S$. Von sa však vyžiari len polovica, čiže

$$P = \frac{1}{2}\sigma 2S\widetilde{T}^4, \tag{35.1}$$

kde $\widetilde{T}$ je jeho teplota. V rovnovážnom stave pred obopnutím planéty sférou platilo $P = \sigma S T^4$, takže teplota sféry je rovná pôvodnej teplote planéty. Odpoveďou je teda $\widetilde{T} = T$.

$\boxed{\textbf{36}}$ Ako prvé si uvedomíme, že celé zrkadlo bude radiálne súmerné a úlohu si vieme previesť na dvojrozmerný problém v súradniciach z (výška) a r (vzdialenosť od osi otáčania) v sústave rotujúcej spolu so zrkadlom. Pozrime sa na to, aké sily pôsobia na malý element ortuti. Sú to

- tiažové zrýchlenie $\vec{a_g}$, ktoré smeruje nadol a jeho veľkosť je g;
- a odstredivé zrýchlenie $\vec{a_h}$, ktoré smeruje od osi otáčania a jeho veľkosť rastie lineárne so vzdialenosťou ako $\omega^2 r$.

Tomu zodpovedajú potenciály gz a $-\frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Celkový potenciál je teda

$$U(r,z) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2. \tag{36.1}$$

Voľná hladina ortuti zaujme taký tvar, aby potenciál na ňom bol konštantný (keby nebol, hladina by sa chcela preusporiadať); a keďže potenciál je definovaný až na aditívnu konštantu, môžeme si ho zvoliť tak, aby na tejto hladine bol rovný nule. Tvar hladiny teda bude daný krivkou, z ktorej vieme dostať explicitné vyjadrenie

$$gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad z = \frac{\omega^2}{2g}r^2. \tag{36.2}$$

V tomto už vidíme parabolu – ostáva už len určiť jej rozmery. Rovnobežné lúče (v našom prípade zvislé) sa budú koncentrovať do jedného bodu – čo je v prípade, že staviame ďalekohľad, celkom príjemné zistenie. Ohnisko nájdeme najjednoduchšie tak, že vyhľadáme lúč, ktorý po odraze od zrkadla bude smerovať vodorovne. V mieste jeho dopadu musí byť uhol, ktorý zviera zrkadlo s vodorovnou rovinou 45° a zároveň z-ová súradnica tohto miesta je rovná z-ovej súradnici ohniska. Alebo si môžeme spomenúť, že parabola je množina bodov rovnako vzdialených od ohniska a direkčnej priamky, a teda že v tomto bode platí $z = f$

a $r = 2f$. Potom

$$f = \frac{\omega^2}{2g}4f^2 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{g}{2\omega^2}. \tag{36.3}$$

$\boxed{37}$ V momente uzatvárania valca piestom je vo vnútri tlak p_{atm} a objem vzduchu je SH, kde S je plocha podstavy a H je výška valca. Po nadobudnutí rovnovážnej polohy sa piest ustáli vo výške h. Vtedy je vo vnútri tlak o $\frac{kh}{S}$ väčší v dôsledku silového pôsobenia pružinky na piest. Zaujíma nás rovnovážna poloha po dosť dlhom čase, preto teplota po ustálení bude rovná počiatočnej, takže ide o izotermickú kompresiu. Pre ňu možno písať

$$p_{\mathrm{atm}}SH = \left(p_{\mathrm{atm}} + \frac{kh}{S}\right)Sh. \tag{37.1}$$

Odtiaľ pre hľadanú rovnovážnu polohu dostávame[5]

$$h = -\frac{Sp_{\mathrm{atm}}}{2k} + \sqrt{\left(\frac{Sp_{\mathrm{atm}}}{2k}\right)^2 + \frac{SHp_{\mathrm{atm}}}{k}}. \tag{37.2}$$

Tlak vo vnútri sa teda ustáli na

$$p = p_{\mathrm{atm}} + \frac{kh}{S} = \frac{p_{\mathrm{atm}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_{\mathrm{atm}}}{2}\right)^2 + \frac{kHp_{\mathrm{atm}}}{S}}. \tag{37.3}$$

Vychýľme teraz piest z rovnovážnej polohy o x. Takémuto vychýleniu bude zodpovedať pokles tlaku o Δp. Zaujíma nás odozva v prvom momente, teda kým ešte nestihne prebehnúť tepelná výmena s okolím. To znamená, že ide o adiabatický dej, pre ktorý platí

$$p(Sh)^{\varkappa} = (p - \Delta p)[S(h + x)]^{\varkappa}. \tag{37.4}$$

Odtiaľ

$$\Delta p = p - \frac{ph^{\varkappa}}{(h + x)^{\varkappa}}. \tag{37.5}$$

Vratná sila je potom

$$F = -\Delta pS - kx = -pS\left[1 - \left(1 + \frac{x}{h}\right)^{-\varkappa}\right] - kx \tag{37.6}$$

a pre malé výchylky

$$F = -\left(\frac{\varkappa pS}{h} + k\right)x. \tag{37.7}$$

Odtiaľ okamžite vidíme, že zdanlivá tuhosť je

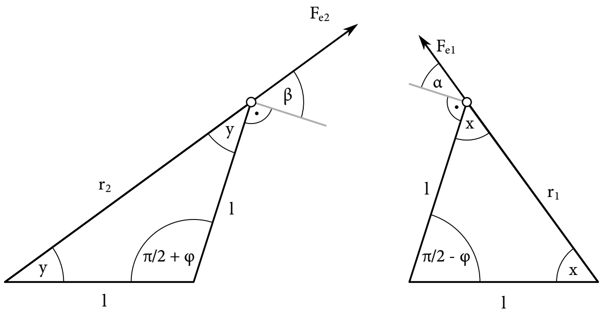
$$K = -\frac{F}{x} = \frac{\varkappa pS}{h} + k = \left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{1 + \frac{4kH}{Sp_{\mathrm{atm}}}} - 1} + \varkappa + 1\right)k. \tag{37.8}$$

[5] Berieme kladný koreň kvadratickej rovnice.

Pre číselné hodnoty zo zadania $K \approx 1{,}8\ \mathrm{kN/m}$.

38 Označme náboj na Jonkiných paličkách q, ich dĺžku d a hmotnosť m. Zaujímajú nás malé kmity, teda malá uhlová výchylka φ z rovnovážnej polohy (ktorá je zjavne taká, že palička stojí kolmo nahor), čiže ak sa nám v riešení objaví nejaký výraz obsahujúci φ, spravíme jeho Taylorov rozvoj do prvého rádu, t. j. členy obsahujúce φ^2 a vyššie mocniny zanedbáme.

Na paličku pôsobia tri sily – gravitačná a dve elektrické – a keďže sa palička môže otáčať okolo svojho spodného bodu, budú nás zaujímať momenty týchto síl. Gravitačná sila veľkosti mg pôsobí v polovici dĺžky paličky, takže moment jej sily pri vychýlení o uhol φ je $\frac{d}{2}mg\sin\varphi \approx \frac{d}{2}mg\varphi$, pričom výchylku φ v smere hodinových ručičiek považujeme za kladnú a takisto kladným momentom sily rozumieme ten, ktorý paličku roztáča v smere hodinových ručičiek.



Obrázek 38.1: *Vychýlená palička a vzdialenosti a uhly vo vzniknuvších trojuholníkoch.*

S momentami elektrických síl je to trochu zložitejšie. Vzdialenosť horného náboja od toho vpravo na stole nech je r_1. Ak na trojuholník v pravej polovici obrázka 38.1 použijeme kosínusovú vetu, dostaneme

$$r_1^2 = d^2 + d^2 - 2dd\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2d^2(1 - \sin\varphi) \approx 2d^2(1 - \varphi). \tag{38.1}$$

Štvorec vzdialenosti od ľavého náboja je analogicky $r_2^2 = 2d^2(1 + \varphi)$. Ak poznáme vzdialenosti, poznáme už veľkosti elektrických síl, ale potrebujeme vedieť aj pod akým uhlom na náboj na paličke pôsobia. Preto sa pozrime na obrázok 38.1 ešte raz.

Máme dva rovnoramenné trojuholníky, z ktorých vieme spočítať uhly

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \tag{38.2}$$

pretože súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je π. Ďalej takisto vidíme, že

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + x = \pi \quad \text{a} \quad \beta + \frac{\pi}{2} + y = \pi, \tag{38.3}$$

teda

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \tag{38.4}$$

Na výpočet momentov síl potrebujeme poznať kosínusy týchto uhlov, čiže

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2} \tag{38.5}$$

a analogicky

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2}. \tag{38.6}$$

Konečne sa dostávame k momentom síl, kde využijeme Taylorove rozvoje $\frac{1}{1-\varphi} \approx 1+\varphi$ a $\frac{1}{1+\varphi} \approx 1-\varphi$. Uhlové zrýchlenie ε vypočítame z rovnice

$$\begin{aligned} J\varepsilon &= -d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\cos\alpha + d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\cos\beta + \frac{d}{2}mg\sin\varphi \\ &\approx -d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2d^2}(1+\varphi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2}\right) + d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2d^2}(1-\varphi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{d}{2}mg\varphi \\ &\approx -\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}}{4d} - \frac{d}{2}mg\right)\varphi. \end{aligned} \tag{38.7}$$

Moment zotrvačnosti tyče otáčajúcej sa okolo jej konca je $J = \frac{1}{3}md^2$, čo po dosadení do predchádzajúcej rovnice dáva

$$\varepsilon = -\frac{3}{md^2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}}{4d} - \frac{d}{2}mg\right)\varphi, \tag{38.8}$$

čiže harmonický oscilátor s uhlovou rýchlosťou

$$\omega^2 = \frac{3}{md^2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}}{4d} - \frac{d}{2}mg\right). \tag{38.9}$$

Preto je perióda kmitov po dosadení hodnôt zo zadania

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \doteq 1{,}95\ \mathrm{s}. \tag{38.10}$$

$\boxed{\mathbf{39}}$ Žiarovka vyžaruje svetlo izotropne, teda do všetkých smerov rovnako. S touto znalosťou vieme z celkového svetelného toku Φ jednoducho spočítať jej svietivosť ako

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}. \tag{39.1}$$

Okrem toho budeme potrebovať poznať jej *jas*, teda svietivosť na jednotku plochy prierezu pri pohľade pozdĺž ľubovoľného lúča. Ak označíme polomer žiarovky r, plocha prierezu je πr^2 a jas

$$L = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{\Phi}{4\pi^2 r^2}. \tag{39.2}$$

Čo sa deje pod lampou? Tienidlo lampy časť svetla odráža smerom nadol, takže vo výsledku bude osvetlenie ulice silnejšie, ako keby tam tienidlo nebolo. Ak je žiarovka priamo v ohnisku paraboloidu, na osi tienidla vznikne intenzívny zväzok lúčov. Žiarovka nie je bodovým zdrojom, takže tieto lúče nebudú úplne rovnobežné. V dostatočnej vzdialenosti priamo pod lampou, teda tam, kde budú uhly veľmi malé, však určite budeme v každom bode priestoru vidieť

- buď oblohu (ktorá nás ale nezaujíma, lebo odtiaľ svetlo neprichádza);
- alebo priamo žiarovku (a teda jas L);
- alebo odraz žiarovky v zrkadle (a teda rovnako jas L).

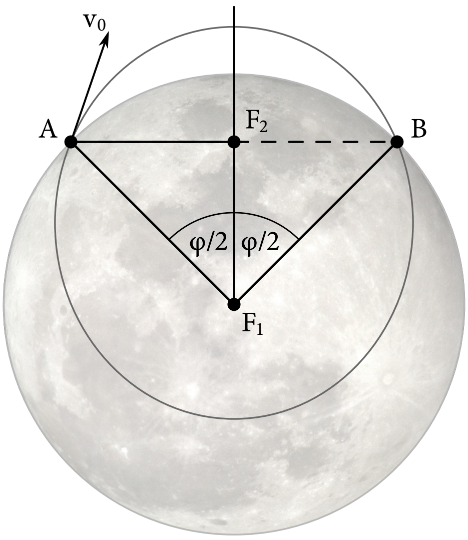
Pri danom pomere veľkostí žiarovky a tienidla a výšky lampy táto podmienka určite splnená bude. Celkovo sa to teda správa rovnako, ako keby sme mali žiarovku s priemerom rovným priemeru tienidla, ale s rovnakým jasom ako pôvodná žiarovka.[6] Ostáva nám teda spočítať, akej intenzite osvetlenia to zodpovedá. Na to nám stačí spočítať priestorový uhol, ktorý pri pohľade z cesty zaberá tienidlo lampy, a vynásobiť ním jas. Keďže uhly v úlohe sú veľmi malé, môžeme priestorový uhol spočítať jednoducho ako

$$\Omega \approx \pi \left(\frac{R}{H} \right)^2, \tag{39.3}$$

kde R je polomer tienidla a $H \gg R$ výška lampy. Intenzita osvetlenia pod lampou potom bude

$$E = L_0 \Omega \approx \frac{\Phi}{4\pi^2 r^2} \pi \left(\frac{R}{H} \right)^2 \approx 354\ \mathrm{lx}. \tag{39.4}$$

40 Z Keplerových zákonov vieme, že ak nejaké teleso vrhneme v radiálnom gravitačnom poli Mesiaca, bude sa pohybovať po eliptickej trajektórii s jedným ohniskom F_1 v strede Mesiaca. Jediné čo teda musíme určiť, je poloha druhého ohniska – tak, aby počiatočná rýchlosť bola čo najmenšia. Označme si uhlovú vzdialenosť medzi Maťkom a Kubkom ako φ. Druhé ohnisko bude ležať na osi symetrie tohto uhla (pozri obrázok 40.1). Na to, aby sme ho našli, sa nám zíde tzv. *rovnica vis-viva*.



Obrázek 40.1: *Trajektória kameňa. Uhol φ bude 90°.*

[6] Celkový svetelný tok sa samozrejme zachováva: akurát svetlo, ktoré by bez tienidla žiarilo nahor alebo do bokov, tienidlo odráža smerom nadol. Jedine svetlo, ktoré sa od tienidla odrazí naspäť na žiarovku, sa nedostane von z tienidla.

Tá nám dáva do súvislosti celkovú energiu telesa obiehajúceho okolo planéty po eliptickej trajektórii a dĺžku hlavnej polosi elipsy. My ju použijeme v tvare

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \tag{40.1}$$

kde výraz na ľavej strane je celková mechanická energia (kinetická a potenciálna) pohybujúceho sa telesa a a je hlavná polos elipsy. Na to, aby sme túto rovnicu odvodili, si zoberieme hmotný bod, ktorý obieha okolo planéty s hmotnosťou M po eliptickej trajektórii. Označme si vzdialenosti a rýchlosti v pericentre a v apocentre ako r_a a v_a, resp. r_p a v_p. Zo zákona zachovania energie vyplýva rovnosť

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{Mm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{Mm}{r_a} \tag{40.2}$$

a zo zákona zachovania momentu hybnosti máme

$$mv_pr_p = mv_ar_a \quad \Rightarrow \quad v_a = v_p\frac{r_p}{r_a}. \tag{40.3}$$

Po dosadení do rovnice 40.2

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{Mm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_p^2\frac{r_p^2}{r_a^2} - G\frac{Mm}{r_a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_p^2\left(1 - \frac{r_p^2}{r_a^2}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right). \tag{40.4}$$

Po vydelení zátvorkou $\left(1 - \left(\frac{r_p}{r_a}\right)^2\right)$ a s využitím vzťahu $2a = r_a + r_p$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_p^2 &= \frac{GMm}{2a}\frac{r_a}{r_p}, \\ \frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{Mm}{r_p} &= -\frac{GMm}{2a}. \end{aligned} \tag{40.5}$$

Zákon zachovania energie nám hovorí, že výraz $mv^2/2 - GMm/r$ ostáva konštantný počas celého pohybu telesa. Odvodili sme si, čomu je táto konštanta rovná v bode najväčšieho priblíženia k planéte, takže musí byť rovnaká aj pre ľubovoľný iný bod na trajektórii. Tým je rovnica vis-viva (40.1) dokázaná.

Hľadanú počiatočnú rýchlosť kameňa si označme v_0. Potom bude mať rovnica 40.1 tvar

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right). \tag{40.6}$$

Môžeme si všimnúť, že počiatočná rýchlosť je tým menšia, čím menšia je hlavná polos elipsy. Musíme teda nájsť polohu F_2 druhého ohniska elipsy tak, aby bola hlavná polos čo najmenšia. Všimnime si ešte, že ak máme jeden bod A na elipse a spočítame súčet vzdialeností z tohto bodu do oboch ohnísk (na obrázku $|AF_1| + |AF_2|$), potom dostaneme $2a$. Vzdialenosť $|AF_1|$ je ale vždy rovná polomeru Mesiaca $R_☾$, takže minimalizovať môžeme jedine vzdialenosť $|AF_2|$.

Najkratšiu možnú vzdialenosť dostaneme vtedy, keď to druhé ohnisko bude ležať na spojnici bodov A a B, ako je nakreslené aj na obrázku. Potom bude platiť

$$2a = |AF_1| + |AF_2| = R_{☾}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right) \tag{40.7}$$

a ak toto dosadíme do rovnice 40.6, vyjadríme rýchlosť v_0 a dosadíme za φ, dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_{☾}}{R_{☾}}\left(1 - \frac{1}{1 + \sin\frac{\varphi}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{GM_{☾}}{R_{☾}}\frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}. \tag{40.8}$$

Výsledky

1 0,17 *presne.*

2 01:10:00

3 145 m

4 60 °C

5 $\frac{11}{15}$

6 270 m

7 5 Ω a 20 Ω, *na poradí nezáleží.*

8 $h = \frac{2k^2}{g}$

9 $\frac{3}{7}$

10 90°

11 $\left(\frac{3a - b}{12}\right) b^2 \tan\beta$

12 36 km/h

13 6

14 391 m^3

15 $\frac{4}{9} + \frac{26\sqrt{2}}{9\pi} = \frac{4\pi + 26\sqrt{2}}{9\pi}$

16 12 mm

17 $\mathrm{d}W = m\omega^2 \ell \,\mathrm{d}\ell$

18 $2\dfrac{1+\sqrt{13}}{13+2\sqrt{13}} = 2\dfrac{11\sqrt{13}-13}{117} \doteq 46\ \%$

19 126,75 m

20 $\dfrac{5}{3}a$

21 1,56 m

22 68°

23 0,13 °C

24 $5g$

25 170 cm

26 0,5 m/s

27 Najedený hroch je $\dfrac{\sqrt{202}}{14}$-krát rýchlejší.

28 392 m. *Uznávajte výsledky v rozsahu 385 – 405 m.*

29 $\dfrac{3\pi r^4}{3\pi r^4 + a^4}\omega$

30 $\dfrac{T_0 + T_1}{2}$

31 md^2

32 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{mg}{L}$

33 $\dfrac{\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\left(17+\dfrac{\pi}{4}\right)} \doteq 0{,}2 = 20\ \%$

34 364 km

35 T

36 $\frac{g}{2\omega^2}$

37 1,8 kN/m

38 1,95 s

39 354 lx

40 $\sqrt{\frac{GM}{R}\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$