Milí čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 25. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s ktorými ste sa v roku 2022 mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste niektorému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Táto zbierka by nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Väčšina z nás sú študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a časť z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

Fyzikálny Náboj pokračuje vo svojej medzinárodnej tradícii. V roku 2022 sa do Náboja zapojili okrem Bratislavy takisto mestá Košice, Praha, Ostrava, Budapešť, Gdańsk a Madrid. Výsledky vzájomného súboja si môžete pozrieť na našich stránkach. Za medzinárodnú spoluprácu ďakujeme lokálnym organizátorom: Patrik Rusnák (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Šimon Pajger (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Kamil Żmudziński (Gdańsk) a José Francisco Romero García (Madrid).

FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom každého polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke `https://fks.sk/`.

V mene celého organizátorského tímu veríme, že ste si v roku 2022 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že sa všetci uvidíme na Náboji aj o rok! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov.

Jaroslav Valovčan
hlavný organizátor

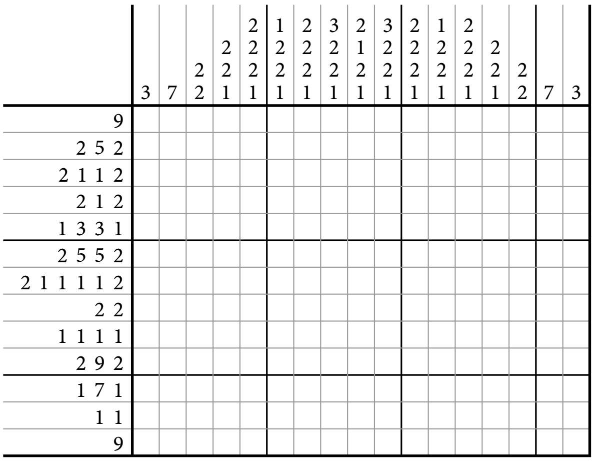
Zbierku zostavili:

Martin ‚Kvík' Baláž
Jozef Csipes
Paulína ‚Jonka' Dujavová
Lucia ‚Želé' Gelenekyová
Jakub Hluško
Dušan Kavický
Jakub ‚Andrej' Kliment
Justína ‚Pľyš' Nováková
Patrik ‚PA3K' Rusnák
Adam Škrlec
Lucia Tóthová
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös

Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke `https://physics.naboj.org/`.

Zadania

1 Babička Justína našla v prílohe časopisu Geochimica et Cosmochimica Acta maľovanú krížovku. Po jej úspešnom vyriešení sa podujala zistiť, kde má výsledný obrázok ťažisko. Aká je jeho vzdialenosť od stredu obrázka, ak všetky vyfarbené štvorčeky majú rovnakú hmotnosť a nevyfarbené štvorčeky sú nehmotné? Dĺžka strany štvorčeka je 1.



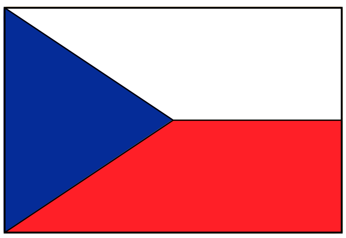
2 Marek sa pripojil k živému prenosu streamera tridsať minút po začiatku. Začal preto pozerať video od začiatku na 1,75-násobnej rýchlosti. V akom čase dobehne Marek živý prenos streamera?

Výsledok odovzdajte v tvare `HH:MM:SS`.

3 Český turista išiel z Jaloveckej doliny na Baníkov. Celkové prevýšenie tejto trasy bolo 1302 metrov, celkovo však nastúpal až 1447 metrov. Koľko metrov bude musieť spolu nastúpať, keď sa bude po rovnakej trase vracať z Baníkova do Jaloveckej doliny?

4 Na počesť nedávneho sviatku sme si z troch jednofarebných kusov rovnakého plechu poskladali československú vlajku so šírkou 54 cm a výškou 36 cm. Modrý trojuholník siahal, prirodzene, do polovice šírky vlajky. Vonku na vlajku zasvietilo slnko a každá jej časť sa nahriala na inú teplotu: biela na 30 °C, červená na 70 °C a modrá až na 90 °C.

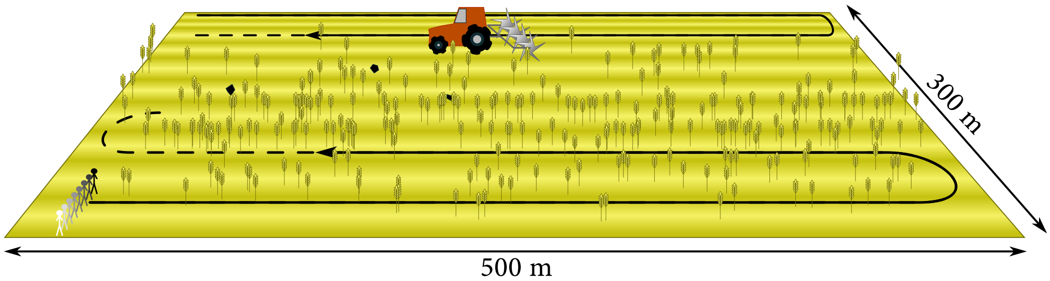
Aká bude teplota vlajky, ak ju odizolujeme od okolia a počkáme, kým sa teploty vyrovnajú?



5 Osemčlenný tím FKSákov hľadá na poli čerstvo padnuvší meteorit. Pochodujú vedľa seba v rojnici, pričom každý pokrýva pás široký 2,5 m rýchlosťou 1 m/s. Vždy, keď dôjdu na koniec poľa, okamžite sa presunú na susedný neprehľadaný pás a vyberú sa smerom naspäť.

Dopadové pole má dĺžku 500 m a šírku 300 m. V rovnakom čase, ako sa začína hľadanie, začína na druhom konci poľa orať traktor. Jeho pluh je široký 10 m, pohybuje sa rýchlosťou 18 km/h a takisto sa po dosiahnutí konca poľa okamžite otáča. Aká časť poľa ostane **neprehľadaná**, ak hľadanie musí skončiť v okamihu, keď sa **ktorýkoľvek** z FKSákov stretne s traktorom?

Odovzdajte presný výsledok.



6 Komfort opäť raz prevážil nad ekológiou… Marcel, Kvík, Paťo a Kubo idú každý svojím vlastným autom na stanicu do Hornej Štubne. Cez obec jazdia maximálnou povolenou rýchlosťou 50 km/h a zaberajú pritom úsek cesty dlhý 150 metrov. Ak všetci šoférujú presne rovnako, aký dlhý úsek cesty budú zaberať mimo obce, teda potom, ako zrýchlia na 90 km/h?

Dĺžky samotných áut zanedbajte.

7 Dano zo svojej bastličskej skrinky náhodne vytiahol dva rezistory a zapojil ich do obvodu, najprv sériovo a potom paralelne. Keď do Danovho pelecha večer zablúdila upratovačka, na stole okrem iného našla papier a na ňom napísané dve hodnoty, 4 Ω a 25 Ω.

Aké boli odpory jednotlivých rezistorov?

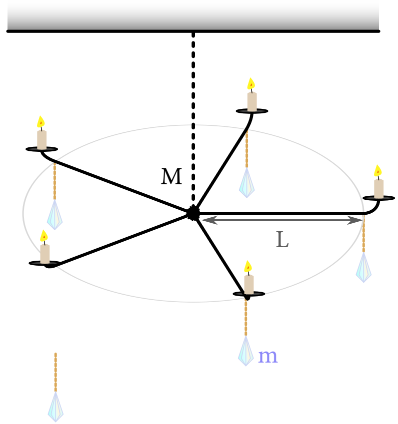
8 Pri prehliadke hradu ukazuje kastelán návštevníkom, aká hlboká je hradná studňa. Dokonca si jej hĺbku návštevníci môžu aj sami vypočítať: kastelán hodí do studne kamienok alebo mincu a návštevníci počúvajú, kedy dopadne na dno. Potom vraj stačí vynásobiť čas dopadu na dno nejakou konštantou k. Samozrejme, konštantu k kastelán nastavil tak, aby hĺbka studne na tomto hrade vyšla správne. Vyjadrite, ako len zo znalosti kastelánovej konštanty k a veľkosti tiažového zrýchlenia g vypočítate hĺbku studne.

Rýchlosť zvuku v stredovekej studni považujte za nekonečnú.

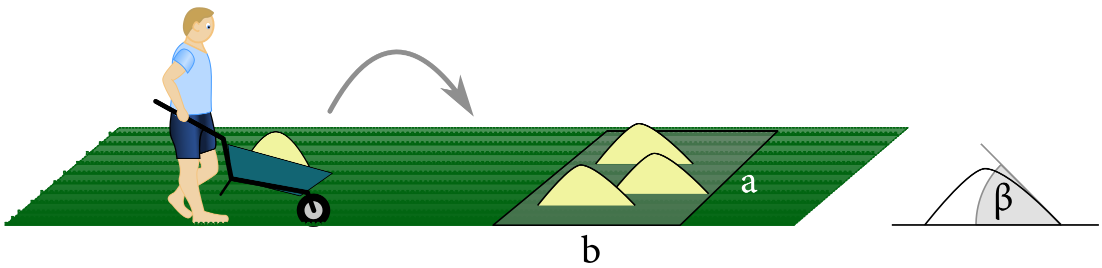
9 Pľyš opäť raz potrebuje popremývať polepené kadičky. Do jednej z nich si pripravila roztok acetónu a už si išla navliecť rukavice, keď sa objavil Kvík a odvolal ju na obed. Roztok ponechaný bez dozoru okamžite využil príležitosť a začal sa odparovať. Kým sa Pľyš vrátila, tretina hmotnosti acetónu a desatina hmotnosti vody stihli bez stopy zmiznúť. Mohla už len skonštatovať, že hmotnostný zlomok acetónu v roztoku klesol o šestinu.

Akú časť hmotnosti pôvodne pripraveného roztoku tvoril acetón?

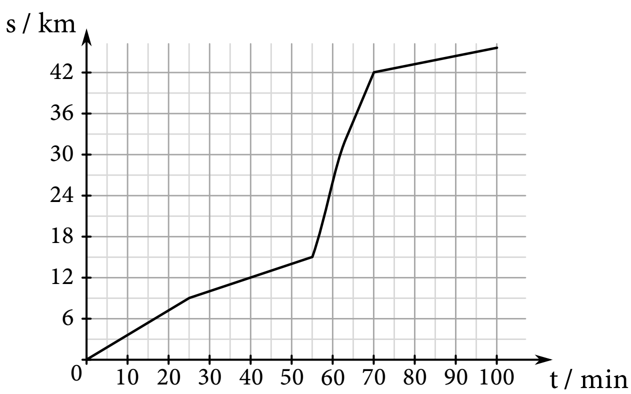
10 Viki má svietnik pozostávajúci z bodu hmotnosti M, z ktorého v jednej rovine vystupuje päť ľahkých rovnomerne rozostavených ramien dĺžky L a na každom voľne visí ozdoba s hmotnosťou m. Celý svietnik visí zo stropu za stredový hmotný bod na dlhej reťazi. Aký uhol bude po ustálení zvierať rovina ramien svietnika s horizontálnou rovinou, ak jedna ozdoba odpadne?



11 Vilo si kúpil obdĺžnikový pozemok s rozmermi a a b, pričom $a \geq b$. Koľko najviac piesku naň môže nasypať, aby všetok ostal na jeho pozemku? Sypný uhol piesku, meraný od vodorovnej roviny, je β.

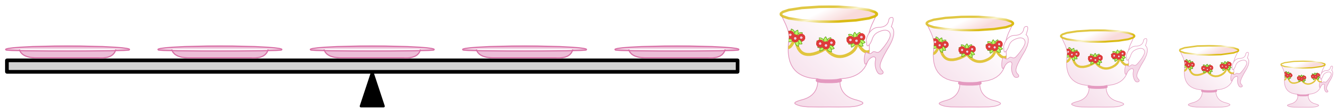


12 Kubo chcel vyskúšať novú aplikáciu pre nadšencov hromadnej dopravy. Aplikácia okrem iného zaznamenáva prejdenú dráhu a priemernú rýchlosť telefónu v km/h, meranú od okamihu spustenia záznamu. Kubo sa vybral na komplikovaný nočný výlet bratislavskými autobusmi a na druhý deň si vytvoril graf prejdenej dráhy od času, ktorý je zobrazený nižšie. Zistite, akú najväčšiu priemernú rýchlosť ukazovala aplikácia počas Kubovho výletu.

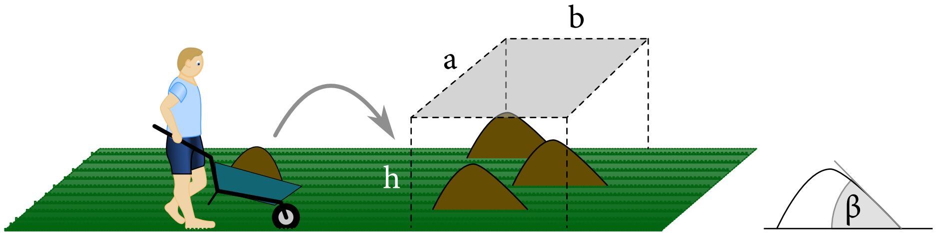


13 Terezka si z Veľkej Británie priniesla špeciálnu čajovú hojdačku. Tá pozostáva z latky, na ktorej je rovnomerne rozmiestnených päť podšálok, a je podopretá priamo pod svojím stredom. K hojdačke sa následne posadí päť hostí v poradí podľa abecedy a hostiteľka prinesie čaj. Päť šálok čaju s hmotnosťami v pomere 1 : 2 : 3 : 4 : 5 poukladá na podšálky tak, aby hojdačka bola v rovnováhe.

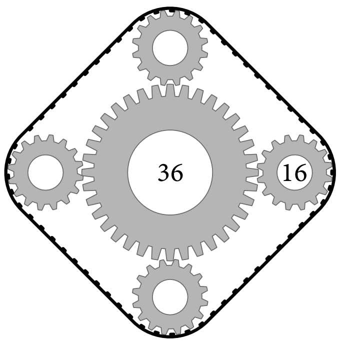
Koľko je rôznych možností, ako môže Terezka rozdeliť šálky medzi svojich hostí?



14 Vilo chce na svojom veľkom pozemku okrem iného postaviť monument. Základy monumentu bude tvoriť veľká betónová doska v tvare obdĺžnika s rozmermi $a = 10$ m a $b = 7$ m. Musí sa nachádzať vo výške $h = 3$ m nad súčasným povrchom a musí byť podopretá pod celou svojou plochou. Koľko najmenej hliny bude Vilo potrebovať na vytvorenie násypu pod základovou doskou, ak sypný uhol hliny je $\beta = 45°$?

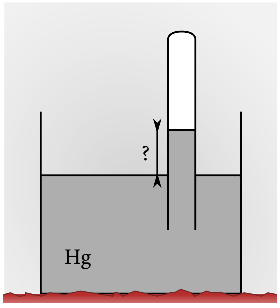


15 Andrej dostal na narodeniny stavebnicu. Ihneď zostrojil špeciálny prístroj: vzal ozubené koleso s 36 zubami a okolo neho umiestnil štyri menšie kolieska so 16 zubami. Okolo celej sústavy napol pás. Koľkokrát musí otočiť veľkým kolesom, aby sa pás otočil o jednu celú otáčku? Osi všetkých koliesok sú pripevnené o zadnú stenu prístroja.

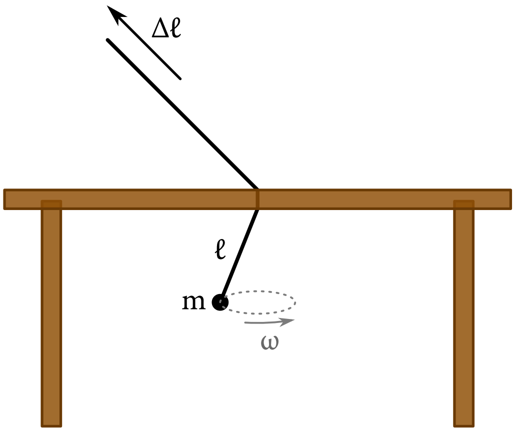


16 Aströnaut Tömáš si na výlet na Mars zöbral aj svöj dedičný örtuťövý tlakömer. Na Zemi ukazöval tradičných 760 mm výšky örtuťövéhö stĺpca. Köľkö bude ukazövať na Marse, kde je tlak na pövrchu 600 Pa?

Rötáciu öböch planét zanedbajte.

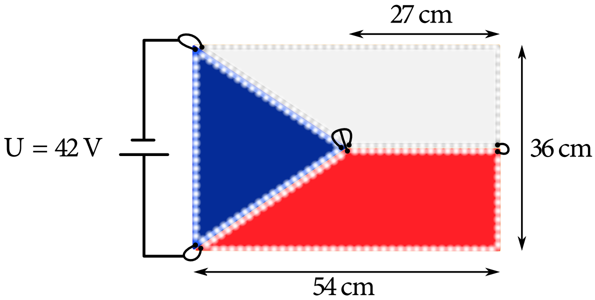


17 Tete cez deravý stôl prevliekla lanko tak, aby naspodku prečnievala časť dlhá ℓ. Potom naň zavesila závažie s hmotnosťou m a udelila mu takú rýchlosť, že teraz obieha po kružnici s uhlovou rýchlosťou ω. Lanko pritom musí samozrejme držať v ruke. Akú prácu Tete vykoná, ak lanko potiahne o malý kúsok $\Delta\ell$ k sebe?



18 Plechová vlajka nejedného človeka zahreje pri srdiečku. Lenže keď sa zotmie, takúto vlajku nie je príliš vidno. Preto sme československú vlajku so šírkou 54 cm a výškou 36 cm osvetlili pomocou svietiacich pásikov s elektrickým odporom 30 Ω/m tak, že každú farebnú oblasť vlajky sme ohraničili pásikom príslušnej farby zo všetkých strán a vo vrcholoch jednotlivých oblastí sme pásiky pospájali. Napájacie napätie 42 V sme priviedli na tie rohy vlajky, kam siaha modrá farba.

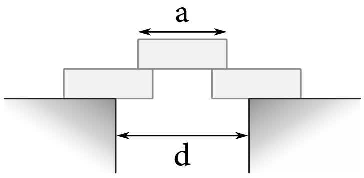
Bezpečnostný technik však z takejto vlajky nebol príliš nadšený. Preto vypol zdroj, rovnomerne náhodne zvolil bod na svietiacom pásiku, prerezal ho a na toto miesto doplnil poistku s nominálnym prúdom 2 A. Aká je pravdepodobnosť, že po opätovnom zapnutí zdroja poistka prehorí?



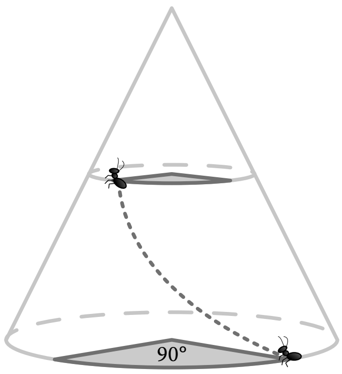
19 Rušňovodička Lucka zbadala na koľajniciach pred sebou obrovskú kocku ovocného želé. Keďže nechce spôsobiť želé-zničné nešťastie, ihneď zatiahla núdzovú brzdu. Brzda je však pneumatická a vzduch z jej potrubia neunikne okamžite: lokomotíva síce začne brzdiť hneď, prvý vozeň však až o sekundu neskôr a každý ďalší vozeň ešte o 1 s neskôr ako predchádzajúci. Vlak má päť vozňov, každý s hmotnosťou 20 t, lokomotíva má hmotnosť 100 t a koeficient trenia medzi koľajnicami a kolesami je 0,2. Aká dlhá bude brzdná dráha Luckinho vlaku, ak jeho počiatočná rýchlosť je 72 km/h?

20 Adam si rád stavia mosty. Tentoraz si vzal tri identické kvádre s hranami $a \geq b \geq c$. Chcel by vedieť, akú najširšiu medzeru vie pomocou nich premostiť. Trenie medzi všetkými kvádrikmi aj medzi kvádrikmi a podložkou je malé a Adam sa naň nemôže spoliehať.

Predné steny kvádrikov musia ležať v jednej rovine.

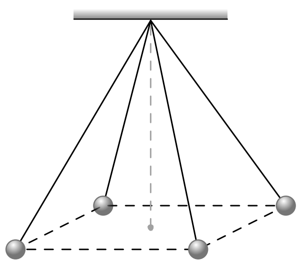


21 Mravec lezie po veľkej cukrovej homoli v tvare kužeľa s polomerom podstavy 1 m a výškou 2 m. Teraz sa nachádza pri úpätí homole priamo na juhovýchod od vrchola. Aká je najkratšia vzdialenosť, ktorú bude musieť preliezť, ak sa chce dostať na juhozápadnú stranu homole do výšky 1 m?



22 Jonka doma našla štyri rovnaké homogénne paličky s hmotnosťou 2 kg a dĺžkou 2 m. Všetky ich jedným koncom zavesila zo stropu tak, že viseli z jedného bodu. Na spodný koniec každej paličky pripla nehmotný bodový náboj 10^{-4} C, takže sa začali odpudzovať. Aký uhol zvierajú paličky so zvislicou, keď je sústava v rovnovážnej polohe?

Táto úloha nemá analytické riešenie. Nebojte sa použiť kalkulačku. Výsledok odovzdajte s presnosťou na 1°.

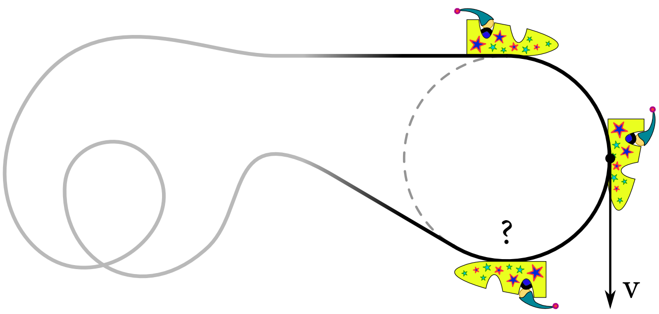


23 Kamión sa vlečie po ceste rýchlosťou 50 km/h. Oproti nemu letí mucha presne rovnakou rýchlosťou. Kolízia dopadne podľa očakávania a mucha sa rozpľaští o čelné sklo. O koľko sa zvýši teplota toho, čo bolo kedysi muchou, ak jej merná tepelná kapacita bola 3 kJ/(kg·K)?

Predpokladajte, že čelné sklo je dokonale tuhé a pri náraze sa nijako nezahreje.

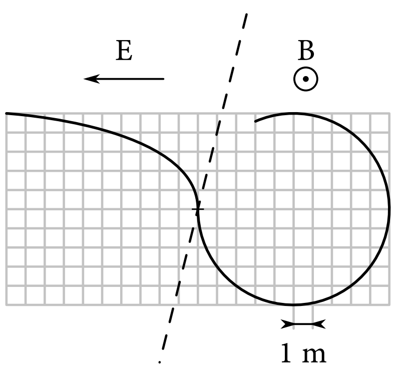
24 Krtko si po úspešnom zložení záverečných skúšok našiel prácu v lunaparku. Jeho najobľúbenejšou atrakciou je húsenková dráha so zvislým polkruhovým oblúkom. Krtko sa posadil do vozíka v najvyššom bode oblúka a jemne sa odstrčil od zábradlia. Kým dorazil k boku slučky, zrýchlil na rýchlosť v. Aké preťaženie bude Krtko sediaci vo vozíku cítiť v najnižšom bode oblúka?

Odpor vzduchu, trenie o koľajnice a obdobné potvorské sily neuvažujte.



25 V Jožkovej izbe zo stropu visí vedľa seba niekoľko rovnakých pružín s neznámou pokojovou dĺžkou. Keď sa Jožko zavesí na jednu pružinu, visí vo výške 50 cm nad zemou. Ak sa zavesí na dve pružiny, ktoré sú tesne vedľa seba, visí 140 cm nad zemou. Ako vysoko nad zemou bude visieť, keď sa zavesí na tri pružiny? Strop v Jožkovej izbe je vo výške 250 cm.

26 Patrik našiel zvláštnu elektricky nabitú guľku. Aby sa o nej dozvedel viac, poslal ju na analýzu do modernej elektromagnetickej analytickej komory. Tá je oslobodená od gravitácie a pozostáva z dvoch častí: v ľavej pôsobí homogénne elektrické pole $E = 0{,}8\ \mathrm{V/m}$ a v pravej zas homogénne magnetické pole s indukciou $B = 0{,}4\ \mathrm{T}$. Neznámu guľku hodili do komory a zaznamenali jej trajektóriu, ktorá je nakreslená na obrázku. Aká bola počiatočná rýchlosť guľky?



27 Na brehu Nílu so sklonom α sa vo výške h slnia dva homogénne sférické hrochy – hladný a najedený. Oba hrochy majú guľaté žalúdky umiestnené presne v strede tela a živia sa prevažne trávou, nílskou vodou a zablúdivšími turistami, ktorých hustota je rovnaká ako hustota samotného hrocha. Navyše vieme, že hladný hroch váži o osminu menej ako jeho najedený parťák. Až hrochy omrzí slnenie, odvalia sa do vody.

Ktorý z nich sa dovalí do vody väčšou rýchlosťou? A koľkokrát bude väčšia?

Obsah hrošieho žalúdka našťastie rotuje spolu so zvyškom hrocha a trenie na brehu Níla je dostatočné, aby sa hrochy nešmýkali.

28 Lucy nafúkla plážovú loptu s hmotnosťou 100 g na polomer 10 cm. Tlak vnútri bol rovný atmosférickému tlaku p_0. Potom ju začala aj so vzduchom pomaly ponárať do jazera. Do akej najväčšej hĺbky ju môže ponoriť, aby sa lopta určite sama vynorila, ak je teplota vody v jazere všade rovnaká?

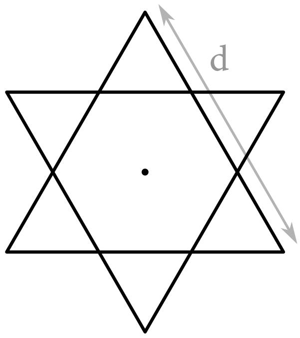
29 Z plechu s plošnou hustotou σ sme vystrihli disk s polomerom r a štvorec so stranou a. Navlečieme ich na zvislú tyč tak, aby prechádzala stredom oboch útvarov. Potom kruh roztočíme uhlovou rýchlosťou ω a priložíme k štvorcu. Akou uhlovou rýchlosťou sa bude otáčať celá sústava po ustálení, keď sa štvorec trením roztočí?

30 Dano si všimol, že rezistory sa zohrievajú, keď nimi preteká elektrický prúd. Keď jeden rezistor pripojil na zdroj stáleho elektrického napätia, zistil, že po dlhom čase sa jeho teplota ustálila na hodnote T_1. Potom spravil to isté s druhým rezistorom z rovnakého materiálu, ktorý však bol vo všetkých rozmeroch dvakrát väčší. Na rezistory v oboch prípadoch fúkal ventilátor, ktorý z ich okolia odvieval ohriaty vzduch, a tým zabezpečil, že teplota okolitého prostredia bola vždy T_0. Na akej hodnote sa po dlhom čase ustáli teplota väčšieho rezistora?

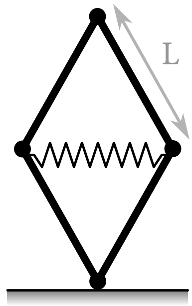
Prenos tepla žiarením zanedbajte.

31 Pri večernej prechádzke po bratislavských uliciach padla Sabinke do očí rozvešaná vianočná výzdoba. Najprv sa čudovala, prečo začínajú Vianoce opäť začiatkom novembra, no potom ako správna fyzička upriamila svoj zrak na ozdobu v tvare šesťcípej hviezdy. Hviezda sa skladala zo šiestich tyčí s dĺžkou d a hmotnosťou m. Sabinka si hneď spočítala, aký je moment zotrvačnosti takej hviezdy okolo osi prechádzajúcej jej stredom a kolmej na jej rovinu.

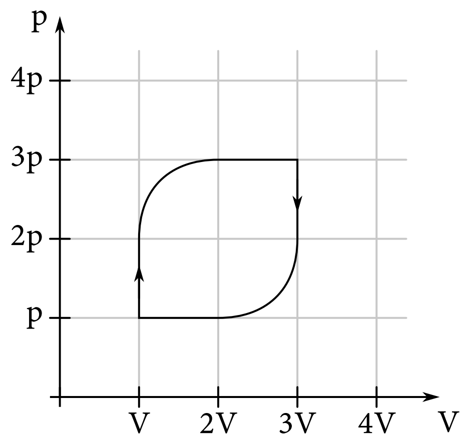
Koľko jej to vyšlo?



32 Dušan sa popri nádejnej kariére fyzika dal na moderné umenie. Vybehol na povalu a zniesol odtiaľ štyri palice s hmotnosťou m a dĺžkou L, a k tomu jednu pružinu s nulovou pokojovou dĺžkou. Palice spojil do štvoruholníka tak, že sa v spoji mohli voľne otáčať, pričom ale vždy zostali v rovine. Dva protiľahlé vrcholy spojil pružinou a postavil svoj umelecký výtvor na jeden vrchol tak, aby bola pružina vodorovne. Aká musí byť tuhosť pružiny, aby sa natiahla na dĺžku L?

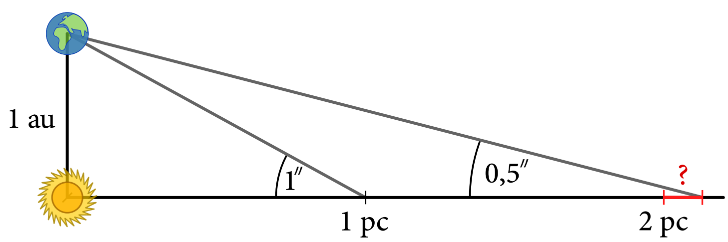


33 V čase vrcholiacej energetickej krízy vytiahol Jaro zo stodoly parný stroj po prapradedkovi. Stačilo pár rýchlych opráv a fungoval ako nový. Stroj teraz funguje podľa cyklu zobrazeného na pV diagrame. Aká je jeho účinnosť, ak pracovný plyn možno považovať za ideálny jednoatómový?



34 Jeden parsek bol definovaný ako vzdialenosť, pri pohľade z ktorej by obežná dráha Zeme mala zdanlivý polomer jednej uhlovej sekundy (1″). Kvík počíta vzdialenosť k hviezde, ktorá je vzdialená 2 pc, ako keby platilo, že uhlový rozmer polomeru zemskej dráhy pri pohľade od hviezdy je 0,5″. Keďže tieto uhly sú veľmi malé, Kvík vie, že aj chyba výsledku bude v porovnaní s jedným parsekom prakticky zanedbateľná. Aj tak by ale chcel vedieť: o koľko kilometrov sa táto dĺžka líši od skutočnej dĺžky 2 pc?

Ak vám to s kalkulačkou nevychádza, možno sa vám hodí použiť Taylorov rozvoj.



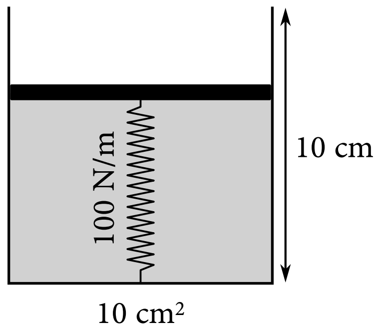
35 Máme dokonale čiernu guľatú planétu zvnútra ohrievanú vlastným výkonom P. Ponechaná napospas svojmu osudu sa ustáli na teplote T. Teraz ju celú tesne obalíme tenkou zrkadlovou fóliou, ktorá odráža 80 % žiarenia naspäť k povrchu planéty a zvyšok absorbuje. Na akej teplote sa ustáli fólia, ak sa povrchu planéty priamo nedotýka?

36 Tömáš si plánuje zostrojiť veľký astronomický ďalekohľad. Aby sa nemusel báť, že sa mu v ňom rozbije zrkadlo, rozhodol sa namiesto skla použiť ortuť. Nalial ju do veľkej plochej misy a roztočil ju okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω.

Aká je ohnisková vzdialenosť zrkadla, ak je umiestnené v tiažovom poli s veľkosťou g?

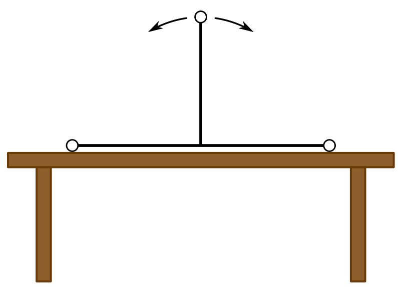
37 Marcel uzavrel pružinu s tuhosťou 100 N/m a nulovou pokojovou dĺžkou do valcovej nádoby s plochou podstavy 10 cm^2 a výškou 10 cm naplnenej ideálnym dvojatómovým plynom. Jeden koniec pružiny pripevnil o dno a druhý o nehmotný piest, ktorý hermeticky uzatváral nádobu. Pri dosadnutí piesta na valec pri uzatváraní bol v nádobe štandardný atmosferický tlak, ktorý pochopiteľne vzrástol, keď piest nadobudol rovnovážnu polohu a teplotu.

Aká bude zdanlivá tuhosť takto zakonzervovanej pružinky pri veľmi malých predĺženiach?



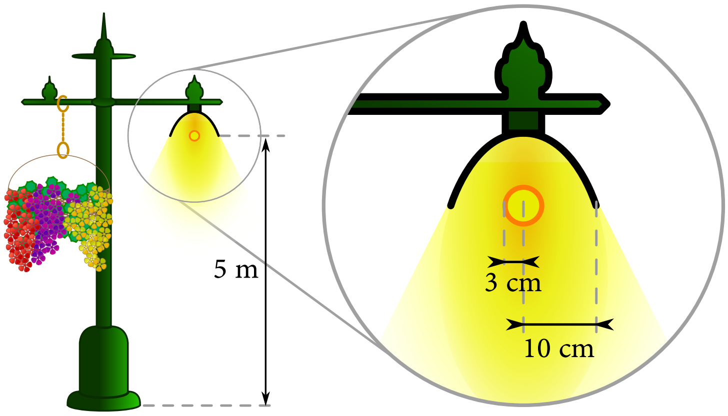
38 Jonka opäť skladá z paličiek mechanické sústavy. Tentokrát má tri homogénne paličky s hmotnosťou 2 kg, dĺžkou 2 m a každá má na jednom konci nehmotný bodový náboj s veľkosťou 10^{-4} C. Dve z nich prilepila na vodorovný stôl tak, že boli rovnobežné a navzájom sa dotýkali koncami, na ktorých nie sú náboje.

Potom vzala tretiu paličku a pripevnila ju pántom do bodu, kde sa prvé dve paličky dotýkajú, pričom náboj bol na jej hornom konci. Tretia palička sa mohla voľne otáčať tak, že všetky tri paličky sa vždy nachádzali v jednej vertikálnej rovine. Potom ju trošku vychýlila zo zvislej polohy smerom k jednej z paličiek na stole a pozorovala jej malé kmity. Akú periódu namerala?



39 Na nábreží stojí lampa vysoká 5 m. Má tienidlo v tvare paraboloidu s otvorom s polomerom 10 cm a hĺbkou 7 cm, ktoré je zvnútra potiahnuté dokonale odrazivou vrstvou. V jeho ohnisku sa nachádza guľatá žiarovka s polomerom 3 cm, ktorá rovnomerne do všetkých smerov vyžaruje svetelný tok 10 klm. Aká bude intenzita osvetlenia cesty priamo pod lampou?

Pre malé uhly môžete použiť priblíženie $\sin x \approx \tan x \approx x$. *Žiarovka nie je priehľadná.*



40 Maťko a Kubko skúmajú mesačný povrch. Maťka z rakety vysadili na severnom póle a Kubko pokračoval až na mesačný rovník. Po pár chvíľach Maťko našiel veľmi zaujímavý kameň a chcel by ho dopraviť ku Kubkovi na analýzu. Zaujíma ho teda, akou najmenšou rýchlosťou ho musí hodiť, aby kameň doletel až na mesačný rovník. Hmotnosť Mesiaca je $M_{☾}$ a jeho polomer je $R_{☾}$.

Vzorové riešenia

1 Aby sme našli ťažisko, maľovanú krížovku vôbec nemusíme riešiť: stačí predsa spočítať rozloženie hmoty v dvoch rôznych smeroch a túto informáciu nám legenda na okraji priamo poskytuje. Samozrejme nič nepokazíme, ani keď krížovku vyriešime, ale kto to so súťažením myslí vážne, nebude chcieť strácať čas.

Hneď by sme si mali všimnúť, že krížovka je súmerná okolo zvislej osi, takže horizontálne súradnice ťažiska a stredu budú určite rovnaké. Stačí sa nám teda pozerať na riadky. Tým priradíme váhy zodpovedajúce ich polohám vzhľadom na stred, ktoré sú postupne $-6, -5, \ldots, 5, 6$. Potom už len sčítame čísla v každom riadku, vynásobíme ich váhou riadka a výsledky opäť sčítame.[1] Nakoniec súčet vydelíme počtom všetkých štvorčekov, čiže súčtom všetkých čísel v riadkovej legende, ktorých je presne 100.

Dostaneme tak y-ovú súradnicu ťažiska vzhľadom na stred

$$y = \frac{\sum\limits_{j=-6}^{6}\left(j \cdot \sum\limits_{i} x_{ij}\right)}{\sum\limits_{j=-6}^{6}\left(\sum\limits_{i} x_{ij}\right)} - 0{,}5 = \frac{(-6)\cdot 9 + (-5)\cdot(2+5+2) + \ldots + 5\cdot(1+1) + 6\cdot 9}{9 + (2+5+2) + \ldots + (1+1) + 9} = \frac{-17}{100} = -0{,}17. \tag{1.1}$$

Vzdialenosť ťažiska od stredu je teda 0,17 štvorčeka.

2 Marek pozerá stream rýchlosťou v_M, pričom platí, že $v_M = 1{,}75 v_S$, kde v_S je rýchlosť streamera. Keďže rýchlosti streamera a Marekovho videa sa nemenia, môžeme použiť vzorec $v_M = f_M/t_M$, kde f_M je aktuálny čas, na ktorom sa Marek nachádza a t_M je čas meraný od momentu, keď si Marek video zapol. Podobne vieme napísať $v_S = f_S/t_S$.

Keďže Marek chce dobehnúť živý prenos streamera, musí vidieť presne to, čo streamer vysiela naživo. Z toho dostávame podmienku $f_S = f_M$, takže

$$v_S t = v_M t_M. \tag{2.1}$$

Ďalej vieme, že Marek začal pozerať o čas $t_0 = 30$ min neskôr, to znamená, že $t = t_0 + t_M$. Dosadením t_M do predošlej rovnice dostávame

$$v_S t = v_M (t - t_0). \tag{2.2}$$

Marekovu rýchlosť pozerania videa poznáme, je to $1{,}75 v_S$. Dosadíme v_M a vyjadríme čas

$$t = \frac{7}{3} t_0 = 70\ \text{min}, \tag{2.3}$$

čiže po prevedení do šesťdesiatkovej sústavy `01:10:00`.

3 Celkové prevýšenie je rozdiel nastúpanej a zostúpenej výšky. Pri ceste späť nastúpa turista presne výšku, ktorú pred tým zostúpil, čiže 1447 − 1302 = 145 metrov.

[1] Fajnšmekri si všimnú, že prvý a posledný riadok sú rovnaké a teda s nimi takisto nemusíme strácať čas.

4 Ak si odmyslíme, že ide o vlajku, vidíme tri telesá v tepelnom kontakte. Sú vyrobené z rovnakého plechu, takže ich hmotnostná tepelná kapacita c bude rovnaká. A hmotnosť? Tá je predsa priamo úmerná ploche. Jednoduchou geometriou pomocou obsahov zistíme, že ak je hmotnosť celej vlajky M, potom modrá časť má hmotnosť $\frac{M}{4}$ a ostatné dve časti zhodne $\frac{3M}{8}$.

Z toho už môžeme zostaviť kalorimetrickú rovnicu. Ak vieme, že teplota sa ustáli na hodnote T, bude platiť nasledovná rovnica:

$$\frac{3M}{8}c(30\,°\mathrm{C} - T) + \frac{3M}{8}c(70\,°\mathrm{C} - T) + \frac{M}{4}c(90\,°\mathrm{C} - T) = 0. \tag{4.1}$$

Hovorí o tom, že existuje taká teplota T, na ktorú sa zmenia všetky teploty jednotlivých kusov vlajky a vlajka pri tom neprijme žiadne teplo od okolia. Toto môžeme poľahky vydeliť c a M (skutočne, na materiáli, z ktorého je vlajka, ani na hmotnosti celého plechu nezáleží) a ďalej upraviť:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}(30\,°\mathrm{C} - T) + \frac{3}{8}(70\,°\mathrm{C} - T) + \frac{1}{4}(90\,°\mathrm{C} - T) &= 0\,°\mathrm{C}, \\ \frac{3}{8}\cdot 30\,°\mathrm{C} - \frac{3}{8}T + \frac{3}{8}\cdot 70\,°\mathrm{C} - \frac{3}{8}T + \frac{1}{4}\cdot 90\,°\mathrm{C} - \frac{1}{4}T &= 0\,°\mathrm{C}, \\ T &= 60\,°\mathrm{C}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

5 Osem ľudí, ktorí majú záber 2,5 m, vieme nahradiť jedným „človekom“ so záberom 20 m. Pole má šírku 300 m, takže si ho vieme rozdeliť na 30 úsekov šírky 10 m. Keďže máme v zadaní určené rýchlosti, vieme tiež povedať, že za čas $t = 500$ s prejdú FKSáci dva úseky a traktor päť úsekov, pričom o ďalších 500 s začnú na opačnej strane ako pôvodne. Po každom čase t prejdú dokopy sedem úsekov, takže vidíme, že sa stretnú počas piateho časového intervalu dĺžky t.

Vtedy začínajú z rovnakej strany ako na začiatku a ostali im už iba dva úseky. Štyria FKSáci budú mať už v tomto momente smolu, pretože majú rovnakú cestu s traktorom. To znamená, že hľadanie meteoritu skončilo a ničnenájduvší FKSáci sa môžu akurát tak pochváliť tým, že prehľadali plochu

$$S_{\mathrm{FKS}} = 4\cdot 500\ \mathrm{m}\cdot 2\cdot 10\ \mathrm{m} = 40\,000\ \mathrm{m}^2. \tag{5.1}$$

Keďže nás zaujíma, akú časť poľa prehľadať nestihli, ostáva nám vyjadriť plochu celého poľa a odčítať

$$\frac{S_{\mathrm{pole}} - S_{\mathrm{FKS}}}{S_{\mathrm{pole}}} = \frac{500\ \mathrm{m}\cdot 300\ \mathrm{m} - 40\,000\ \mathrm{m}^2}{500\ \mathrm{m}\cdot 300\ \mathrm{m}} = \frac{150000 - 40000}{150000} = \frac{11}{15}. \tag{5.2}$$

6 Keďže všetci štyria šoférujú rovnako a dodržiavajú dopravné predpisy, každý z nich začne zrýchľovať presne v momente, keď jeho auto vyjde za hranicu obce. To znamená, že nebudú zrýchľovať súčasne a vzdialenosti medzi ich autami sa preto nezachovajú. Čo sa ale zachová, sú časové intervaly medzi prejazdmi áut ktorýmkoľvek bodom trasy. To platí vďaka tomu, že pohyb každého z áut vyzerá úplne rovnako, iba je nejako posunutý v čase. Nás bude zaujímať iba vzdialenosť prvého a posledného auta (čiže dĺžka úseku cesty, ktorý autá zaberajú).

Keď sa autá ešte pohybujú rýchlosťou $v_0 = 50$ km/h, táto vzdialenosť je $d_0 = 150$ m, takže časový interval medzi prechodom prvého a posledného auta nejakým bodom je $t = \frac{d_0}{v_0}$. Po zrýchlení na rýchlosť $v_1 = 90$ km/h sa tento interval zachová, teda $t = \frac{d_1}{v_1}$, odkiaľ vieme vyjadriť novú vzdialenosť áut ako

$$d_1 = v_1 t = v_1 \frac{d_0}{v_0} = 270\ \mathrm{m}. \tag{6.1}$$

7 Ako prvé sa zamyslíme, ktoré zapojenie zodpovedá ktorej hodnote odporu. Sériové zapojenie má určite väčší odpor, ako paralelné. Celkový odpor R_S je v ňom rovný súčtu jednotlivých odporov, takže

$$R_S = R_1 + R_2 = 25\ \Omega. \tag{7.1}$$

Naopak v prípade paralelného zapojenia je celkový odpor R_P rovný

$$R_P = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\ \Omega. \tag{7.2}$$

Máme teda dve rovnice o dvoch neznámych. Vyjadrime si napríklad R_1 ako $R_1 = 25\ \Omega - R_2$ a dosaďme do rovnice pre R_P. Dostávame tak kvadratickú rovnicu

$$R_2^2 - 25\ \Omega \cdot R_2 + 100\ \Omega^2 = 0\ \Omega^2. \tag{7.3}$$

Obe jej riešenia $R_2 = 5\ \Omega$ a $R_2 = 20\ \Omega$ sú fyzikálne zmysluplné a zodpovedajú jednoduchej zámene rezistorov. Riešením je teda dvojica $5\ \Omega$ a $20\ \Omega$.

8 O hĺbke studne by sme aj bez fyzikálne nepríliš nadaného kastelána vedeli, že

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{8.1}$$

Kastelán nám napovedá vzťah s jeho konštantou k (táto, mimochodom, nie je bezrozmerná) $h = kt$. Z neho vieme pomocou vzťahu pre hĺbku studne vyjadriť konštantu k ako

$$k = \frac{1}{2} g t = \frac{1}{2} g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{hg}{2}}. \tag{8.2}$$

Z tohto vieme vyjadriť h len pomocou k a g ako

$$h = \frac{2k^2}{g}. \tag{8.3}$$

9 Ak na začiatku má Pľyš v roztoku hmotnosť m_{A0} acetónu a m_{V0} vody, pôvodný hmotnostný zlomok vypočítame ako

$$X = \frac{m_{\mathrm{A0}}}{m_{\mathrm{A0}} + m_{\mathrm{V0}}}. \tag{9.1}$$

Po obede mala Plyš v roztoku len m_{A1} acetónu. Keďže vieme, že sa vyparila tretina acetónu a desatina vody, dostávame

$$m_{A1} = \frac{2}{3} m_{A0} \qquad \text{a} \qquad m_{V1} = \frac{9}{10} m_{V0}. \tag{9.2}$$

Pre nový hmotnostný zlomok platí

$$\frac{5}{6} X = \frac{m_{A1}}{m_{A1} + m_{V1}}. \tag{9.3}$$

Z tejto rovnice vyjadríme X, dosadíme do rovnosti s rovnicou 9.1 a využijúc vzťahy z rovnice 9.2 dostávame

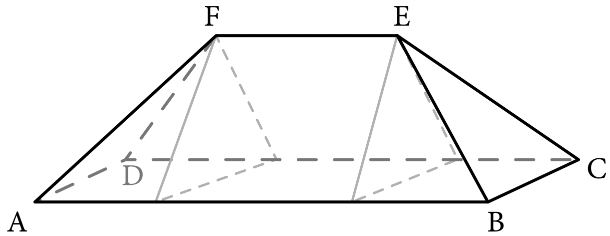
$$\begin{aligned}
\frac{m_{A0}}{m_{A0} + m_{V0}} &= \frac{6}{5} \frac{m_{A1}}{m_{A1} + m_{V1}} \\
\frac{\frac{3}{2} m_{A1}}{\frac{3}{2} m_{A1} + \frac{10}{9} m_{V1}} &= \frac{6}{5} \frac{m_{A1}}{m_{A1} + m_{V1}} \\
\frac{3}{2} {m_{A1}}^2 + \frac{3}{2} m_{A1} m_{V1} &= \frac{6}{5}\frac{3}{2} {m_{A1}}^2 + \frac{6}{5}\frac{10}{9} m_{A1} m_{V1} \\
\frac{3}{2} m_{A1} + \frac{3}{2} m_{V1} &= \frac{6}{5}\frac{3}{2} m_{A1} + \frac{6}{5}\frac{10}{9} m_{V1} \\
m_{A1} &= \frac{5}{9} m_{V1}.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

V predposlednom kroku sme obe strany rovnice vydelili m_{A1}, čo určite nebude nula, takže úpravy sú korektné. Teraz sa už len vrátime k rovnici 9.3, kam dosadíme $m_{A1} = \frac{5}{9} m_{V1}$ a výsledok už je jednoducho

$$\frac{\frac{5}{9} m_{V1}}{\frac{5}{9} m_{V1} + m_{V1}} = \frac{5}{6} X \quad \Rightarrow \quad X = \frac{3}{7} \doteq 42{,}86\ \%. \tag{9.5}$$

10 Kým je na svietniku všetkých päť ozdôb, situácia je symetrická a svietnik visí voľne: je podopretý akurát vo svojom ťažisku a ľubovoľnému otočeniu prislúcha rovnaká potenciálnej energii. Hneď, ako jedna z ozdôb odpadne, sa svietnik otočí tak, aby minimalizoval výšku svojho ťažiska. Prázdne rameno sa pohne tak, aby bolo čo najvyššie, a to nastane vtedy, keď bude rovina svietnika s horizontálnou rovinou zvierať uhol 90°.

11 Ak by sme sypali hlinu na jedno miesto, získali by sme kužeľ so sklonom β. Na obrázku 11.1 môžeme vidieť útvar, ktorý vznikne zjednotením všetkých možných kužeľov s rôznymi výškami, ktoré by na Vilovom pozemku mohli stáť.



Obrázok 11.1: *Pohľad zboku*

Je to trojboký hranol, ktorý je na dvoch stranách zrezaný. Tento útvar si môžeme rozdeliť na tri časti, konkrétne trojboký hranol zo stredu a dva odrezky. Najskôr si spočítajme ich výšky. Kolmým rezom cez hranol vznikne rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky b a s dvoma uhlami β. Výška útvarov preto bude

$$h = \frac{b}{2}\tan\beta. \tag{11.1}$$

Z dvoch odrezkov vieme zložiť ihlan. Keďže všetky jeho steny zvierajú uhol β, ide o pravidelný štvorboký ihlan, a teda jeho podstava bude štvorec so stranou b. S touto znalosťou vieme ľahko vydedukovať, že trojboký hranol bude dlhý $d = a - b$ a jeho objem bude

$$V_h = S_p \cdot d = \frac{hb}{2}d = \frac{b^2}{4}(a-b)\tan\beta. \tag{11.2}$$

Objem ihlanu zrátame tiež jednoducho ako

$$V_i = \frac{1}{3}S_p h = \frac{b^3}{6}\tan\beta \tag{11.3}$$

a celkový maximálny objem je teda

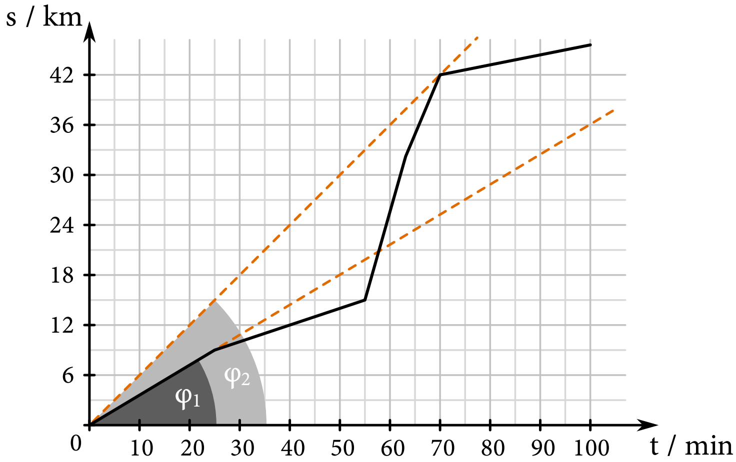
$$V = V_h + V_i = \left(\frac{3a-b}{12}\right)b^2\tan\beta. \tag{11.4}$$

$\boxed{12}$ Najprv si ešte raz vysvetlime, čo sa nás v úlohe pýtajú. Potrebujeme zistiť, v akom okamihu je dovtedajšia priemerná rýchlosť najväčšia. Priebežná priemerná rýchlosť $\overline{v}(t)$ sa počíta ako prejdená dráha v tom istom čase t vydelená t, čiže

$$\overline{v}(t) = \frac{s(t)}{t}. \tag{12.1}$$

Inými slovami z grafu si vyberieme ľubovoľný okamih a pozrieme sa, aká prejdená dráha mu prislúcha. Tieto hodnoty potom vložíme do vzorca pre priemernú rýchlosť. Keby sme to urobili pre všetky časy t, vedeli by sme nájsť najväčšie $\overline{v}(t)$. Dá sa to však aj jednoducho vyčítať z grafu na obrázku 12.1. Upravme si vzťah pre $\overline{v}(t)$ tak, aby bola naša nezávislá premenná t, teda na

$$s(t) = \overline{v}(t)t. \tag{12.2}$$



Obrázok 12.1: *Uhol φ_1 je menší ako φ_2, to znamená, že pre rýchlosti platí $\overline{v}(t_1) < \overline{v}(t_2)$.*

Teraz vidíme, že $\overline{v}(t)$ nám udáva sklon priamky. Ak teda potrebujeme nájsť najväčšie $\overline{v}(t)$, stačí, ak nájdeme priamku s najväčším sklonom, čiže s najväčším uhlom od osi x, ktorá prechádza bodom $[0; 0]$. Z grafu vyplýva, že hľadaná priemerná rýchlosť je v čase $t = 70$ min, čiže

$$\overline{v}(t) = \frac{42}{70}\ \mathrm{km/min} = 36\ \mathrm{km/h}. \tag{12.3}$$

13 Hostí zjavne vieme rozlíšiť, takže budeme musieť overiť až $5! = 120$ rôznych možností ako šálky rozmiestniť. Našťastie vieme toto číslo po krátkom zamyslení radikálne znížiť.

Ak má byť hojdačka v rovnováhe, musia byť na obidvoch stranách rovnako veľké momenty síl. Označme si jednotlivé polohy k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_{+1} a k_{+2} a poďme im priradiť v nejakom poradí hodnoty 1, 2, 3, 4 a 5. Ak je vzdialenosť medzi dvomi podšálkami w a hmotnosť najľahšej z nich m, v rovnici pre momenty síl

$$k_{-2}mg2w + k_{-1}mgw = k_{+1}mgw + k_{+2}mg2w \tag{13.1}$$

sa nám konštanty w, m a g vykrátia a ostane iba

$$2k_{-2} + k_{-1} = k_{+1} + 2k_{+2}. \tag{13.2}$$

Ďalej musí platiť, že vo vzdialenosti w od stredu musia mať hmotnosti šálok rovnakú paritu – ak je k_{-1} nepárne, potom aj k_{+1} musí byť nepárne a naopak; inak by sme na jednej strane určite dostali moment sily v hodnote nepárneho násobku mgw a na druhej strane by nutne ostal násobok párny, čo by riešenie pokazilo. Nakoniec si uvedomme, že ku každému riešeniu vieme jednoznačne priradiť jeho zrkadlový obraz.

Tak teda prejdime na samotné riešenie. Ak začneme najťažšou šálkou, stačí nám overiť tri prípady:

- Ak ju položíme do polohy k_{-2}, do k_{+2} musíme umiestniť šálku s hmotnosťou $4m$ – inak to už určite nijak nevyvážime. Z podmienky o parite vychádza, že na pozície $k_{\pm1}$ musíme položiť šálky s hmotnosťami m a $3m$, čo vyjde jednoznačne a dostaneme prvú dvojicu riešení, 5 : 1 : 2 : 3 : 4 a 4 : 3 : 2 : 1 : 5.
- Ak položíme najťažšiu šálku na pozíciu k_{-1}, z podmienky parity musí byť na opačnej pozícii šálka s hmotnosťou nepárneho násobku m. Máme dve možnosti,

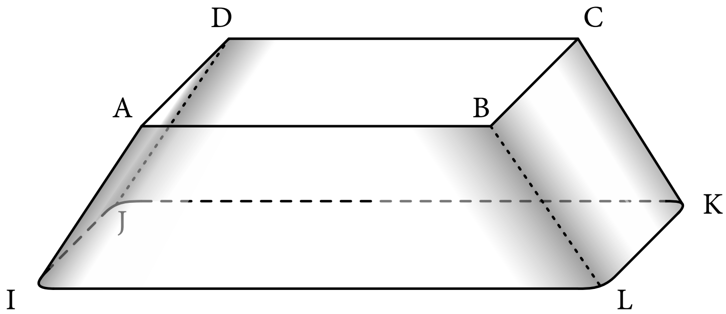
  – ak tam umiestnime šálku s hmotnosťou m, rozdiel hmotností šálok na pozíciách $k_{\pm 2}$ musí byť $2m$, čo nám jednoznačne určuje riešenie 2 : 5 : 3 : 1 : 4, resp. 4 : 1 : 3 : 5 : 2;
  – alebo ak tam položíme šálku s hmotnosťou $3m$, rozdiel hmotností na krajných pozíciách $k_{\pm 2}$ musí byť m, čo jednoznačne určuje riešenie 1 : 5 : 4 : 3 : 2, resp. 2 : 3 : 4 : 5 : 1.

- Nakoniec ak najťažšiu šálku položíme do stredu, kvôli parite ostáva overiť dve možnosti,

  – teda keď na pozície $k_{\pm 1}$ umiestnime šálky s hmotnosťami párnych násobkov m, lenže potom zvyšné dve šálky na krajných polohách určite ostanú nevyvážené;
  – alebo s hmotnosťami nepárnych násobkov m, čo opäť vyvážiť nevieme.

Takto sme teda rozanalyzovali všetkých 120 možností. Odpoveďou je, že šálky sa dajú rozmiestniť šiestimi rôznymi spôsobmi.

14 Ak by sme sypali hlinu na jedno miesto, získali by sme kužeľ so sklonom β. Na obrázku 14.1 môžeme vidieť útvar, ktorý vznikne zjednotením všetkých kužeľov.



Obrázok 14.1: *Pohľad zhora*

Keďže je všade sklon β, pri pohľade zhora bude vzdialenosť s od okraju ku priemetu horného obdĺžnika na zem všade rovnaká. Vieme ju ľahko vyjadriť pomocou vzťahu

$$\cot\beta = \frac{s}{h} \quad \Rightarrow \quad s = h\cot\beta. \tag{14.1}$$

Teraz si treba uvedomiť, že si náš útvar vieme rozdeliť na niekoľko častí. V rohoch vidíme štyri štvrťkužele, z ktorých vytvoríme jeden kužeľ s polomerom s a výškou h. Potom nájdeme jeden kváder rozmerov $a \cdot b \cdot h$ a nakoniec štyri trojboké hranoly, ktoré vieme spojiť do jedného dlhého hranola. Tento hranol má výšku $2a + 2b$ a ako podstavu pravouhlý trojuholník s odvesnami h a s. Ich objemy sú

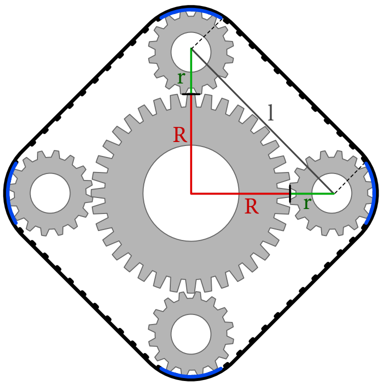
$$\begin{aligned} V_{\text{kužeľ}} &= \frac{1}{3}\pi s^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3 \cot^2\beta, \\ V_{\text{kváder}} &= abh, \\ V_{\text{hranoly}} &= S_p(2a+2b) = \frac{hs}{2}(2a+2b) = \frac{h^2}{2}(2a+2b)\cot\beta. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Výsledný objem je teda

$$V = V_{\text{kužeľ}} + V_{\text{kváder}} + V_{\text{hranoly}} = \frac{1}{3}\pi h^3 \cot^2\beta + abh + h^2(a+b)\cot\beta. \tag{14.3}$$

Po dosadení hodnôt zo zadania zistíme, že Vilo bude potrebovať približne 391 m^3 hliny.

15 Ak do seba dve susediace ozubené kolesá zapadajú, pri pohybe musia mať v bode dotyku rovnakú obvodovú rýchlosť a navzájom opačný smer otáčania. To znamená, že všetky štyri menšie kolieska budú mať rovnakú obvodovú rýchlosť (zhodnú s obvodovou rýchlosťou veľkého kolesa) a budú sa otáčať rovnakým smerom. Rovnakou rýchlosťou sa bude preto pohybovať aj pás. Táto rýchlosť bude konkrétne 36 zubov za jednu otáčku veľkého kolesa. Ak si teda označíme šírku jedného zubu ako d, jednému otočeniu veľkého kolesa bude zodpovedať posunutie pásu o $36d$. Teraz nás ale ešte zaujíma, aký dlhý je celý pás.



Obrázok 15.1: *Geometria pásu*

Z obrázku si môžeme všimnúť, že je tvorený štyrmi štvrťkružnicami, ktorých zložením dostaneme obvod menšieho kolieska, teda $16d$. Zvyškom pásu sú štyri úsečky dĺžky l, čo je práve vzdialenosť stredov dvoch susedných malých koliesok. Tú vieme spočítať ako uhlopriečku štvorca so stranou $R + r$, kde R je polomer veľkého kolesa $R = \frac{36d}{2\pi}$ a r je polomer menšieho kolieska $r = \frac{16d}{2\pi}$. Každá z daných štyroch úsečiek bude mať teda dĺžku

$$\sqrt{2}(R+r) = \frac{26\sqrt{2}}{\pi}d. \tag{15.1}$$

Ak má teda pás dĺžku $\left(16 + 104\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)d$ a za jednu otáčku veľkého kolesa sa otočí o $36d$, o celú svoju dĺžku sa otočí za

$$\frac{\left(16 + 104\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)d}{36d} = \frac{4}{9} + \frac{26\sqrt{2}}{9\pi} \doteq 1{,}745 \tag{15.2}$$

otáčok veľkého kolesa.

Poznamenajme, že ak má pás na vnútornej strane zuby, musí byť jeho dĺžka celočíselným násobkom šírky jedného zuba. Navyše ak chceme, aby boli všetky súčiastky stroja opotrebúvané rovnomerne, musí byť tento násobok deliteľný štyrmi. V takom prípade dostaneme, že dĺžka pásu musí byť $64d$, čiže veľké koleso sa otočí $\frac{64d}{36d} \doteq 1{,}78$-krát.

16 Tlak na povrchu Marsu je omnoho menší ako na Zemi a tlakomer by teda mal ukázať výrazne nižšiu hodnotu. Nesmieme však zabudnúť, že ortuťový tlakomer dáva do pomeru vonkajší tlak s hydrostatickým tlakom ortuti vnútri – a ten zas závisí aj od tiažového zrýchlenia, ktoré je na Marse iné.

Tiažové zrýchlenie je dané vzťahom

$$g_{♂} = \frac{GM_{♂}}{R_{♂}^2}, \tag{16.1}$$

pre hydrostatický tlak na malých škálach zase platí

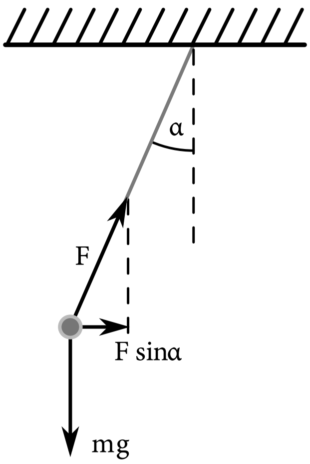
$$p = \rho g h, \tag{16.2}$$

a teda môžeme vyjadriť

$$h = \frac{pR_{♂}^2}{\rho GM_{♂}}. \tag{16.3}$$

Po dosadení hodnôt z tabuľky konštánt alebo iného zdroja vidíme, že je to rovné približne 12 mm.

17 Na to, aby sme vypočítali prácu, potrebujeme v prvom rade poznať silu F, ktorou je lanko napínané. Preto si nakreslíme obrázok 17.1. Lanko nech je od zvislého smeru vychýlené o uhol α. Na hmotný bod pôsobia dve sily – sila $\vec{F}$ od lanka a tiažová sila s veľkosťou mg. Bod sa pohybuje uhlovou rýchlosťou ω po kružnici s polomerom $\ell \sin\alpha$. Navyše naň musí pôsobiť dostredivá sila $m\omega^2\ell\sin\alpha$. Jediná sila pôsobiaca na bod, ktorá má horizontálnu zložku, je sila F.



Obrázok 17.1: *Sily pôsobiace na hmotný bod.*

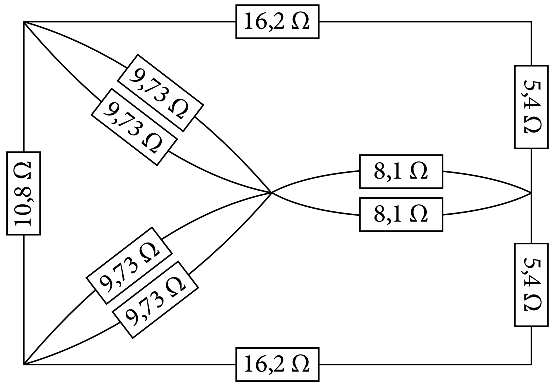
Musí teda platiť

$$F \sin\alpha = m\omega^2\ell\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F = m\omega^2\ell. \tag{17.1}$$

Práca, ktorú Tete vykoná, ak lano potiahne o malú vzdialenosť $\Delta\ell$, bude potom jednoducho

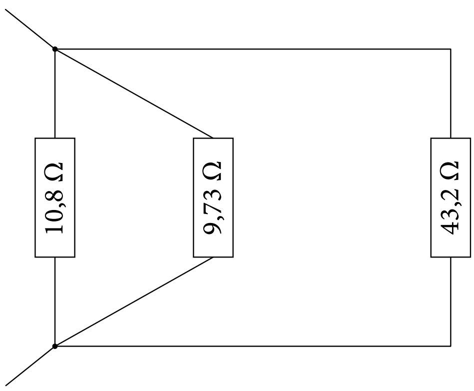
$$\Delta W = m\omega^2\ell\,\Delta\ell. \tag{17.2}$$

18 Najskôr si môžeme vypočítať dĺžky a z nich odpory jednotlivých svetelných pásikov. K zisteniu dĺžok nepoužijeme nič zložitejšie než Pytagorovu vetu; dĺžky zas pomocou dĺžkového odporu 30 Ω/m ľahko prevedieme na elektrické odpory. Výsledné hodnoty vidno na obrázku.



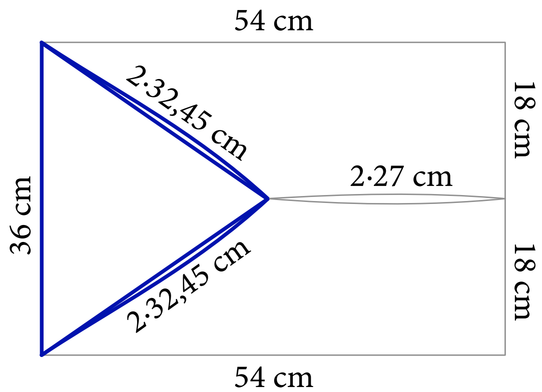
Obrázok 18.1: *Svetelné pásiky ako rezistory.*

Dvojica pásikov medzi bielou a červenou časťou vlajky má zaujímavú vlastnosť – na ich oboch koncoch je rovnaký potenciál. Prísť k tomu môžeme napríklad trikom, pri ktorom celú odporovú schému zrkadlovo preklopíme tak, že prívody sa zobrazia na seba navzájom. Body, ktoré sa zobrazia samy na seba, majú potom rovnaký potenciál; to znamená, že i keby medzi nimi bol vodič, týmto nepotečie žiaden elektrický prúd. To prakticky znamená, že týmito dvoma svetelnými pásikmi nepotečie žiaden prúd, a teda nebudú svietiť. Ak ich odstránime z obvodu, nič sa nezmení.



Obrázok 18.2: *Vetvy, ktorými tečie prúd, po vypočítaní ich odporu.*

V takom prípade nám zostane už iba kombinácia sériového a paralelného zapojenia rezistorov! Napäťový úbytok na každej z vetiev bude rovnaký, rovný napájaciemu napätiu 42 V. Ich odpory poznáme, znamená to teda, že prúd každou z vetiev vypočítame z Ohmovho zákona ako $I = \frac{U}{R}$. Vetva s odporom 9,73 Ω je však zložená z dvoch rovnakých paralelných vetiev, každou z nich teda potečie polovičný prúd. Zľava doprava sú teda prúdy vo vetvách postupne 3,89, 2,16, 2,16 a 0,97 A. Prúdy vyššie ako 2 A, teda také, ktoré prerazia poistku, tečú len tými vetvami, ktoré sú hrubo vyznačené na nasledovnom obrázku.



Obrázok 18.3: *Dĺžky jednotlivých pásikov; hrubo sú vyznačené miesta, ktorými tečie viac ako 2 A.*

Aká je pravdepodobnosť, že technik preštikne svetelný pásik niekde v týchto miestach? Vypočítame ju ako pomer súčtu dĺžok týchto pásikov k dĺžke všetkých pásikov, čiže

$$P \approx \frac{165{,}8\ \mathrm{cm}}{363{,}8\ \mathrm{cm}} \approx 0{,}456 \doteq 46\ \%. \tag{18.1}$$

19 Núdzová brzda by mala brzdiť tak silno, ako je to len možné – a to je určené práve koeficientom šmykového trenia. Hmotnosť vlaku je stále rovnaká, konkrétne $m = 100\ \mathrm{t} + 5 \cdot 20\ \mathrm{t} = 200\ \mathrm{t}$, brzdiaca trecia sila však bude pôsobiť iba na tie vozidlá, ktorých brzdy sú už aktívne. Bude rovná $F = \mu m' g$, kde m' je celková hmotnosť brzdiacich vozidiel a μ koeficient šmykového trenia. Spomalenie vlaku je potom

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\mu m' g}{m}. \tag{19.1}$$

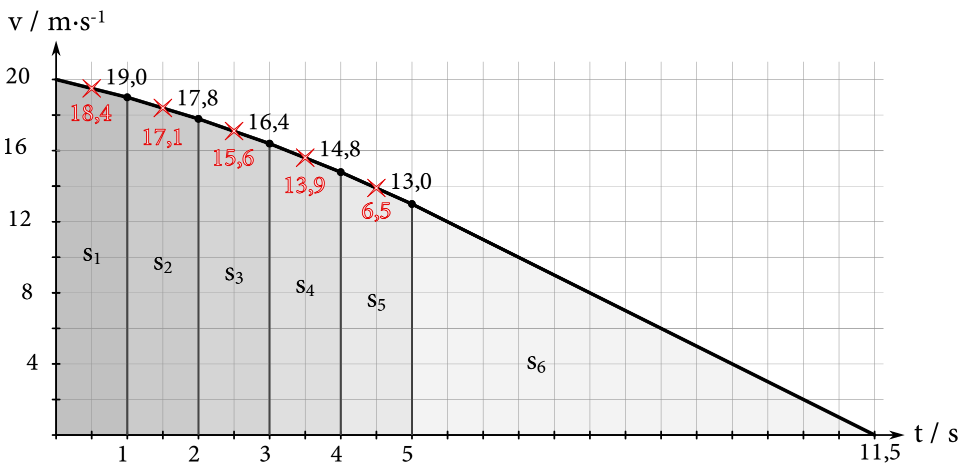
Keď Lucka aktivuje brzdy, vlak začne spomaľovať so spomalením

$$a_0 = \frac{10^5\ \mathrm{kg}}{2 \cdot 10^5\ \mathrm{kg}} \cdot 0{,}2 \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} = 1\ \mathrm{m/s^2}. \tag{19.2}$$

Spomalenie potom každú sekundu skokovo narastie o ďalších

$$\Delta a = 0{,}2 \cdot \frac{20\ \mathrm{t}}{200\ \mathrm{t}} \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} = 0{,}2\ \mathrm{m/s^2} \tag{19.3}$$

až po maximálnu hodnotu $a_{\max} = a_0 + 5\,\Delta a = 2\ \mathrm{m/s^2}$, a s takýmto spomalením vlak dobrzdí až do zastavenia. Toto môžeme vyjadriť aj vzorcami, počas Náboja však bude jednoduchšie a rýchlejšie si to nakresliť do obrázka 19.1 a rozpísať do tabuľky 19.1.



Obrázok 19.1: *Graf rýchlosti vlaku v závislosti od času*

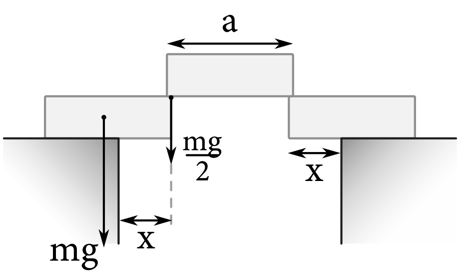
V každom intervale vlak spomaľuje rovnomerne z rýchlosti v_i na rýchlosť $w_i = v_i - a_i \Delta t_i$, takže jeho priemernú rýchlosť v danom intervale môžeme spočítať ako aritmetický priemer rýchlostí na začiatku a konci úseku. Navyše platí $v_{i+1} = w_i$, keďže rýchlosť sa musí meniť spojito. Posledný úsek je špeciálny: brzdia všetky vozidlá a vlak bude spomaľovať, až kým nezastane. To mu pri spomaľovaní 2 m/s² z rýchlosti $v_5 = 13$ m/s potrvá 6,5 s a prejdená dráha bude $s_5 = \frac{169}{4}$ m = 42,25 m. Nakoniec spočítame prejdenú dráhu ako priemernú rýchlosť vynásobenú dĺžkou intervalu, $s_i = \overline{v}_i \cdot \Delta t_i$.

Tabuľka 19.1: Hodnoty okamžitého spomalenia a im zodpovedajúce dráhy.

počet brzdiacich vozňov	Δt_i / s	F_i / kN	a_i / m/s²	v_i / m/s	w_i / m/s	$\overline{v}_i$ / m/s	s_i / m
0	1	200	1,0	20,0	19,0	19,5	19,50
1	1	240	1,2	19,0	17,8	18,4	18,40
2	1	280	1,4	17,8	16,4	17,1	17,10
3	1	320	1,6	16,4	14,8	15,6	15,60
4	1	360	1,8	14,8	13,0	13,9	13,90
5	6,5	400	2	13,0	0,0	6,5	42,25

Ostáva nám jednotlivé dráhy sčítať a dozvieme sa, že celková brzdná dráha bude 126,75 m.

20 Najskôr si uvedomme, že kvádre musia byť orientované vodorovne, pretože ak by sa niektorý kváder naklonil, potom by sa v dôsledku nulového trenia zošmykol do diery. Riešenie bude teda vyzerať tak, že dva kvádre budú položené na podložkách takým spôsobom, že budú pretŕčať o vzdialenosť x, a na týchto dvoch kvádroch bude položený tretí tak, že sa hranami bude opierať o hrany spodných kvádrov (pozri obrázok 20.1).



Obrázok 20.1: *Most s maximálnym možným rozpätím.*

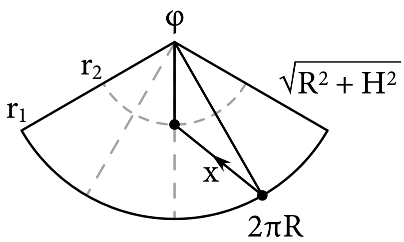
Potrebujeme teda zistiť maximálnu vzdialenosť x, o ktorú spodné kvádre môžu pretŕčať ponad medzeru. K tomu, aby sa kvádre nezrútili, musí byť celkový moment síl pôsobiacich na spodné kvádre nulový. Zoberme si teda jeden z týchto kvádrov a za os otáčania si zvoľme kraj medzery. Tiažová sila pôsobí v ťažisku, teda vo vzdialenosti $a/2 - x$ od osi, a vrchný kváder pôsobí silou $mg/2$ vo vzdialenosti x. Potom platí

$$mg\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{mg}{2}x. \tag{20.1}$$

Z toho dostaneme $x = a/3$, takže maximálne rozpätie mosta sa blíži k hodnote

$$d = 2x + a = \frac{5}{3}a. \tag{20.2}$$

21 Hľadať minimálnu vzdialenosť medzi dvomi bodmi na kuželi vôbec nevyzerá jednoducho, ale opak je pravdou. Stačí si nakresliť jeho sieť. Podstava kužeľa v tejto úlohe nie je podstatná, takže na obrázku je len rozvinutý plášť kužeľa do roviny.



Obrázok 21.1: *Plášť kužeľa rozvinutý do roviny.*

Podstava polomeru R spôsobuje, že kružnicová časť obvodu plášťa má dĺžku $2\pi R$. Polomer tejto kružnice je $\sqrt{R^2 + H^2}$, pretože to je prepona pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesnami sú polomer podstavy R a výška kužeľa H. Preto je na rozvinutom plášti pri vrchole uhol $\varphi = \frac{2\pi R}{\sqrt{R^2+H^2}}$. Ignorujúc zmenu výšky, mravec chce prejsť od juhovýchodu k juhozápad, teda štvrtinu uhla φ.

Keď na obrázku máme vyznačené body, medzi ktorými mravec ide, najkratšia cesta je rovná cesta, pretože sa bavíme o plášti rozvinutom do roviny. A keď tieto dva body spojíme s vrcholom kužeľa, vznikne nám trojuholník, na ktorý môžeme aplikovať kosínusovú vetu. Uhol pri vrchole kužeľa poznáme, ešte chceme poznať aj dĺžky spojníc medzi vrcholom a obomi bodmi, medzi ktorými mravec prejde. Vzdialenosť od vrchola k spodnému bodu je samozrejme $r_1 = \sqrt{R^2 + H^2}$ a vzdialenosť od vrchola k hornému bodu je $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + H^2}$, pretože mravec lezie do polovice výšky kužeľa.

Ak označíme našu hľadanú vzdialenosť x, podľa kosínusovej vety

$$x^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\frac{\varphi}{4}, \tag{21.1}$$

čo po dosadení za r_1, r_2 a φ a úpravách dáva

$$x = \sqrt{R^2+H^2}\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\frac{\pi R}{2\sqrt{R^2+H^2}}}. \tag{21.2}$$

Pre hodnoty zo zadania je táto vzdialenosť $x \doteq 1{,}56$ m.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Načrtnime si náš plán. Palička sa nehýbe, ak súčet síl a momentov síl na ňu pôsobiacich je nulový. Na paličku pôsobí gravitačná sila smerom nadol a elektrické sily od zvyšných nábojov v rôznych vodorovných smeroch, a nakoniec je tam strop, ktorý celú sústavu určite udrží. Momenty síl bude najprirodzenejšie počítať vzhľadom na bod na strope. V takom prípade na každú paličku pôsobí iba moment od tiažovej sily a od ostatných paličiek. Takže potrebujeme zistiť, o aký uhol sa palička musí vychýliť, aby bol ich súčet nulový.

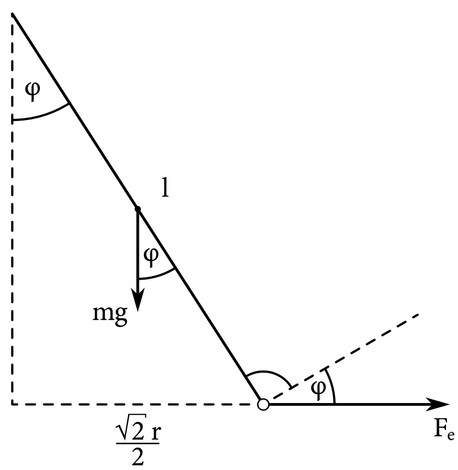
Budeme počítať so všeobecnými hodnotami, takže si označíme náboj q, hmotnosť paličky m a jej dĺžku d. Zo symetrie je jasné, že v rovnovážnej polohe tvoria bodové náboje vrcholy štvorca a stačí nám pozerať sa len na momenty síl pôsobiacich na jednu paličku. Nech má štvorec dĺžky strán r, čiže jeho uhlopriečka má dĺžku $\sqrt{2}r$. Vyberme si jednu paličku. Na náboj na nej pôsobia elektrické sily od susedných nábojov. Obe majú veľkosť

$$F_{e1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{22.1}$$

a sú navzájom kolmé. Preto keď ich vektorovo zložíme, dostaneme silu veľkosti $\sqrt{2}F_{e1}$ so smerom od stredu štvorca k náboju na našej paličke. Sila od náboja, ktorý leží uhlopriečne od nášho, má veľkosť

$$F_{e2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}r)^2} \tag{22.2}$$

a smer má tiež od stredu k nášmu náboju. Na náboj na našej paličke teda pôsobí celková elektrická sila veľkosti $F_e = \sqrt{2}F_{e1} + F_{e2}$ smerujúca od stredu štvorca. Gravitačná sila pôsobí samozrejme nadol a pôsobí v ťažisku paličky. Na obrázku 22.1 to celé vyzerá nasledovne:



Obrázok 22.1: *Sily pôsobiace na jednu paličku.*

Spodná strana trojuholníka je polovica uhlopriečky štvorca, preto je jej dĺžka $\frac{\sqrt{2}r}{2}$. A takisto z trojuholníka vidíme, že $r = \frac{2}{\sqrt{2}} d \sin\varphi$. Rovnica rovnosti momentov síl je teda

$$\begin{aligned} mg\frac{d}{2}\sin\varphi &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)d\cos\varphi \\ mg\frac{d}{2}\sin\varphi &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{2}{\sqrt{2}}d\sin\varphi\right)^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)d\cos\varphi \\ \frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right). \end{aligned} \tag{22.3}$$

V tomto momente sa dostávame k tomu, že táto úloha nemá analytické riešenie, teda že nevieme vyjadriť, čomu sa rovná uhol φ. Musíme teda zobrať kalkulačku a s rozumom vyskúšať pár hodnôt φ. Dostatočne presný výsledok nájdeme napríklad binárnym vyhľadávaním. Výsledkom pre hodnoty zo zadania je $\varphi \doteq 68°$.

23 Označme hmotnosť kamióna M a hmotnosť muchy m. Rýchlosť kamióna nech je v, rýchlosť muchy $-v$ a ich spoločná rýchlosť po zrážke u. Zo zákona zachovania hybnosti platí

$$Mv - mv = (M+m)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{M-m}{M+m}v. \tag{23.1}$$

Ide o nepružnú zrážku, takže energia sa nezachováva. Rozdiel medzi energiou pred a po zrážke zodpovedá teplu, ktoré sa pri zrážke vygeneruje,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}M\left(v^2-u^2\right)+\frac{1}{2}m\left((-v)^2-u^2\right) \\ &= 2\frac{Mm}{M+m}v^2. \end{aligned} \tag{23.2}$$

Hmotnosť kamióna je zrejme ďaleko väčšia než hmotnosť muchy, preto možno v menovateli zanedbať m voči M a dostaneme

$$Q \approx 2mv^2. \tag{23.3}$$

Podľa zadania sa má všetko teplo spotrebovať na zahriatie pozostatkov muchy, teda

$$Q = mc\,\Delta t. \tag{23.4}$$

Z rovností posledných dvoch rovníc konečne dostávame

$$\Delta T \approx \frac{2v^2}{c} \approx 0{,}13\ °\mathrm{C}. \tag{23.5}$$

24 Ak má na začiatku Krtko nulovú rýchlosť, jeho kinetická energia musí byť takisto nulová. Kým príde do miesta na boku slučky, jeho potenciálna energia klesne o mgr, a keďže trenie ani odpor vzduchu neuvažujeme, jeho kinetická energia musí presne o toľko vzrásť. Jeho rýchlosť poznáme, takže dokážeme vyjadriť polomer,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v^2}{2g}. \tag{24.1}$$

Kým zíde do najspodnejšieho bodu slučky, jeho kinetická energia musí opäť narásť o mgr, takže bude rovná $mv^2 = 2mgr$. Nová rýchlosť (označme si ju w) bude teda ešte $\sqrt{2}$-krát vyššia. Z toho už vieme vyjadriť veľkosť dostredivého zrýchlenia

$$a_c = \frac{w^2}{r} = \frac{2v^2}{r} = \frac{2v^2 \cdot 2g}{v^2} = 4g. \tag{24.2}$$

Všetko sa teda pokrátilo a vidíme, že výsledné zrýchlenie nezávisí od rozmerov slučky, a teda ani od veľkosti rýchlosti v. Krtka však viac zaujíma *preťaženie*, teda výslednica všetkých síl, ktoré naňho pôsobia zvonku priamym kontaktom. Keď pokojne sedí na vrchu dráhy, preťaženie stále cíti: gravitačná sila totiž pôsobí na všetky jeho častice rovnako a teda ju nevníma, vníma však reakciu sedadla na gravitačnú silu. Tá pôsobí po celý čas – vždy s rovnakým smerom aj veľkosťou, totiž $1g$ smerom nahor. A keďže naspodu slučky aj dostredivá sila pôsobí rovnakým smerom, preťaženie, ktoré tu bude bude Krtko cítiť, bude až $5g$.

25 Na úvod si ukážme, ako sa správajú pružinky, ak ich zapojíme paralelne. Výsledná sila od pružiniek je súčtom síl od jednotlivých pružín. Zároveň vyžadujeme, aby bolo ich predĺženie rovnaké ako predĺženie celej sústavy, a teda dostávame

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ k \cdot \Delta x &= k_1 \cdot \Delta x + k_2 \cdot \Delta x \\ k &= k_1 + k_2. \end{aligned} \tag{25.1}$$

Vidíme, že ak máme dve identické pružiny, v paralelnom zapojení sa správajú ako dvakrát tuhšia pružina, a ak máme pružín n, ako n-krát tuhšia pružina.

Zo zadania vieme, že každá pružina má neznámu pokojovú dĺžku. Označme si ju s. Potom vieme, že keď sa Jožko zavesí na jednu pružinu, bude od zeme vzdialený 50 cm, čo znamená, že predĺženie pružiny Δx_1 spolu s pokojovou dĺžkou s budú dokopy 200 cm. Ak sa zavesí na dve pružiny, bude predĺženie pružiny Δx_2 spolu s pokojovou dĺžkou s dokopy 110 cm, pretože je 140 cm nad zemou. No a ak sa zavesí na tri pružiny, bude predĺženie pružiny Δx_3 spolu s pokojovou dĺžkou s rovné hľadanej dĺžke, ktorú si môžeme označiť ψ.

S týmto označením dostávame rovnice rovnosti síl

$$\begin{aligned} F = mg = \quad k\,\Delta x_1 &= 2k\,\Delta x_2 = 3k\,\Delta x_3, \\ \Delta x_1 &= 2\,\Delta x_2 = 3\,\Delta x_3, \\ 200\text{ cm} - s &= 2(110\text{ cm} - s) = 3(\psi - s). \end{aligned} \tag{25.2}$$

Z toho už ľahko vieme vypočítať pokojovú dĺžku

$$200\text{ cm} - s = 220\text{ cm} - 2s \quad \Rightarrow \quad s = 20\text{ cm}. \tag{25.3}$$

Keď už máme s, vyrátať vzdialenosť od stropu ψ je triviálne,

$$3\psi - 3s = 200\ \text{cm} - s \quad \Rightarrow \quad \psi = 80\ \text{cm}. \tag{25.4}$$

Zadanie sa ale pýta na Jožkovu vzdialenosť od zeme, nie od stropu, takže výsledok je $250\ \text{cm} - \psi = 170\ \text{cm}$.

26 Pripomeňme si, aká sila pôsobí na nabitý objekt v elektrickom a magnetickom poli. V elektrickom poli je to elektrická sila

$$\vec{F_e} = Q\vec{E}, \tag{26.1}$$

kde Q je náboj objektu; v magnetickom poli je to magnetická sila

$$\vec{F_m} = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{26.2}$$

kde $\vec{v}$ je rýchlosť objektu. Elektrická sila pôsobí v smere alebo proti smeru elektrického poľa, v závislosti na náboji objektu, magnetická sila v smere kolmom na magnetické pole a rýchlosť objektu. To znamená, že elektrická sila mení rýchlosť častice a magnetická sila jej smer, t. j. je dostredivou silou.

Poďme si teraz rozanalyzovať pohyb guľky. Označme si vodorovnú súradnicu x a zvislú y. Na obrázku máme vyznačenú trajektóriu guľky, no nemáme tam vyznačený smer pohybu. Ten však vieme určiť pomerne jednoducho. Predpokladajme, že guľka najskôr prechádza magnetickým a potom elektrickým poľom. Zo smeru zakrivenia pohybu v magnetickom poli vieme povedať, že guľka má kladný náboj. Keď potom guľka prejde do elektrického poľa, elektrická sila má smer zhodný s intenzitou, preto ju bude urýchľovať smerom doľava, čo naozaj pozorujeme, keďže rovnakej zmene y-ovej súradnice prislúcha čoraz väčšia zmena x-ovej súradnice. Keby sa guľka pohybovala v opačnom smere, z trajektórie pohybu v elektrickom poli by sme usudzovali, že spomaľuje, preto by musela mať kladný náboj, no to by znamenalo, že po prechode do magnetického poľa by musela zatáčať do opačnej strany.

Nech je veľkosť rýchlosti guľky v. Magnetické pole má smer kolmý na rovinu pohybu, preto bude vždy kolmé na vektor rýchlosti, a teda veľkosť magnetickej sily je

$$F_m = QvB. \tag{26.3}$$

Magnetická sila je dostredivou silou, teda

$$QvB = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{m} = \frac{v}{Br}, \tag{26.4}$$

kde m je hmotnosť guľky, a keďže má konštantnú veľkosť, guľka sa bude pohybovať po kružnici. Z obrázka vieme odčítať jej polomer $r = 5$ m. Na základe smeru zakrivenia vieme zase povedať, že guľka má kladný náboj.

Guľka prechádza plynulo z magnetického do elektrického poľa. V mieste prechodu nesmie byť žiadna ostrá zmena smeru ani veľkosti rýchlosti, nakoľko by to znamenalo nekonečnú silu v tomto bode. Z obrázka vidíme, že v momente, keď guľka vstupuje do elektrického poľa, pohybuje sa v y-ovom smere rýchlosťou, ktorou vyšla z magnetického poľa, teda v. Nech guľka pobudne v elektrickom poli po dobu t. Za tento čas prejde v y-ovom smere vzdialenosť $\Delta y = 5$ m a v x-ovom smere $\Delta x = 10$ m. V y-ovom smere nepôsobí žiadna sila, preto

$$\Delta y = vt; \tag{26.5}$$

v x-ovom smere pôsobí sila veľkosti

$$F_e = QE, \tag{26.6}$$

takže guľka sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením

$$a = \frac{QE}{m} \tag{26.7}$$

a s nulovou počiatočnou rýchlosťou, teda

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{QE}{m}t^2. \tag{26.8}$$

Vylúčením času z rovníc dostávame

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\left(\frac{\Delta y}{v}\right)^2, \tag{26.9}$$

v čom spoznávame rovnicu paraboly.

Dosadením za $\frac{Q}{m}$ dostávame

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{v}{Br}E\left(\frac{\Delta y}{v}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\frac{E}{B}\frac{(\Delta y)^2}{r\,\Delta x}. \tag{26.10}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania a odčítané z obrázku dostávame $v = 0{,}5\ \mathrm{m/s}$.

$\boxed{27}$ Najedený hroch je homogénna guľa s polomerom r a hmotnosťou m. Moment zotrvačnosti takéhoto telesa možno poznáte aj spamäti, ak nie, pomôžu tabuľky. Je to

$$I_1 = \frac{2}{5}mr^2. \tag{27.1}$$

To bolo ľahké! Ako je to ale s hladným hrochom? Ten má tvar gule, z ktorej stredu je vyrezaná menšia guľa s polovičným polomerom. Moment zotrvačnosti takéhoto telesa vypočítame tak, že od momentu zotrvačnosti najedeného hrocha odčítame moment zotrvačnosti žalúdka. Žalúdok je guľa s hmotnosťou $m/8$, a teda s polomerom $r/2$, takže moment zotrvačnosti hladného hrocha je

$$I_2 = \frac{2}{5}mr^2 - \frac{2}{5}\frac{m}{8}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{31}{80}mr^2. \tag{27.2}$$

Teraz si spomeňme na zákon zachovania energie. Nech sa hrochy nachádzajú vo výške h nad Nílom, a teda počas valenia klesnú práve o túto výšku. Najedenému hrochovi klesne jeho potenciálna energia o mgh. Táto energia sa premení na rotačnú a translačnú zložku kinetickej energie hrocha. Navyše pre uhlovú rýchlosť valenia sa hrocha platí $\omega = v/r$, pretože hroch nepresmykuje. Preto pre najedeného hrocha môžeme písať

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}I_1\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{1}{5}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{7}{10}mv_1^2, \end{aligned} \tag{27.3}$$

odkiaľ úpravou dostaneme

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} g h}. \tag{27.4}$$

Teraz rovnako spočítame aj rýchlosť hladného hrocha. Nesmieme ale zabudnúť, že tento hroch má hmotnosť len $\frac{7}{8} m$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} m g h &= \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{v_2}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{7}{8} m v_2^2 \\ &= \frac{31}{160} m v_2^2 + \frac{7}{16} m v_2^2 \\ &= \frac{101}{160} m v_2^2 \end{aligned} \tag{27.5}$$

a odtiaľ

$$v_2 = \sqrt{\frac{140}{101} g h}. \tag{27.6}$$

Teraz nám už len stačí dať do pomeru tieto dve rýchlosti

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{202}}{14} \tag{27.7}$$

a zistíme, že najedený hroch sa dokotúľa do vody vyššou rýchlosťou.

28 Pri ponáraní lopty postupne narastá hydrostatický tlak a tým sa zmenšuje objem plynu v nej. Keď sa objem lopty zmenší natoľko, že jej priemerná hustota presiahne hustotu vody, tiažová sila definitívne vyhrá nad vztlakovou a lopta sa už sama nevynorí.

Označme si $m = 0{,}1$ kg hmotnosť prázdnej lopty, R_0 jej polomer a $V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \approx 0{,}0042\ \mathrm{m}^3$ jej objem pred ponorením. Keď Lucy naplní loptu vzduchom, jej hmotnosť narastie o hmotnosť vzduchu a celkovo teda bude mať hmotnosť

$$M = m + V_0 \rho_a, \tag{28.1}$$

kde ρ_a je hustota vzduchu pri štandardnej teplote a tlaku. Pretože Lucy ponára loptu veľmi pomaly, teplota plynu v nej ostane počas celého procesu rovná teplote vody a pôjde teda o izotermický dej. Vieme, že v izotermickom deji platí $pV =$ konšt., takže aj súčin tlaku a objemu vzduchu v lopte ostáva počas ponárania rovnaký.

Tlak na hladine vody je jednoducho len atmosférický tlak p_0. V hĺbke h k nemu pribúda hydrostatický tlak $\rho_w g h$, kde ρ_w je hustota vody. Objem lopty v hĺbke h označme V. Potom platí

$$p_0 V_0 = (p_0 + \rho_w g h) V. \tag{28.2}$$

Z tejto rovnice už jednoducho vyjadríme objem lopty v hĺbke h

$$V = V_0 \frac{p_0}{p_0 + \rho_w g h}. \tag{28.3}$$

Aby sme našli hraničnú hĺbku, potrebujeme zaručiť, aby hustota lopty bola rovná hustote vody, teda

$$\frac{M}{V} = \rho_w. \tag{28.4}$$

Teraz nám stačí len dosadiť hmotnosť M z rovnice 28.1 a objem V lopty z rovnice 28.3 a dostaneme

$$\frac{m + V_0\rho_a}{V_0\frac{p_0}{p_0+\rho_w g h}} = \rho_w \tag{28.5}$$

a vyjadriť hĺbku h. Výsledok je

$$h = \frac{p_0}{\rho_w g}\left(\frac{4\pi R_0^3\rho_w}{3m + 4\pi R_0^3\rho_a} - 1\right) \approx 392\ \mathrm{m}. \tag{28.6}$$

$\boxed{\mathbf{29}}$ Keďže na sústavu nepôsobia žiadne vonkajšie momenty síl, jej celkový moment hybnosti sa musí zachovať. Naopak energia sa nezachováva, pretože v nej pôsobí trenie a nejaká časť kinetickej energie sa preto premení na teplo. Ak I_1 je moment zotrvačnosti disku, počiatočný moment hybnosti sústavy je $L = I_1\omega$.

Po roztočení štvorca s momentom zotrvačnosti I_2 sa celkový moment zotrvačnosti zvýši na $I_1 + I_2$ a uhlová rýchlosť sa zníži na ω'. Moment hybnosti bude teda $L = (I_1+I_2)\omega'$. Zo zákona zachovania momentu hybnosti potom už vieme jednoducho vyjadriť hľadanú uhlovú rýchlosť ako

$$\omega' = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega. \tag{29.1}$$

Zostáva nám ešte vyjadriť jednotlivé momenty zotrvačnosti. Moment zotrvačnosti homogénneho disku rotujúceho okolo jeho osi je $I_1 = \frac{1}{2}m_1 r^2$, v našom prípade teda $I_1 = \frac{\pi}{2}\sigma r^4$. Moment zotrvačnosti homogénneho štvorca s osou prechádzajúcou jeho stredom vieme určiť za pomoci Steinerovej vety a vlastnosti, že takýto štvorec vieme vyskladať zo štyroch menších štvorcov s polovičnou dĺžkou strany a s osou prechádzajúcou jedným z ich vrcholov. Vyjadrime si moment zotrvačnosti celého štvorca ako $I_2 = Km_2a^2 = K\sigma a^4$ s nejakou neznámou konštantou K. Ide o aditívnu veličinu, takže sa bude rovnať jednoducho súčtu momentov zotrvačnosti spomínaných štyroch menších štvorcov. Tie budú mať štvrtinovú hmotnosť, polovičnú dĺžku strany a os budú mať vo vzdialenosti $l = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ od ich ťažiska. Konštantu K budú mať ale stále rovnakú. Preto

$$\begin{aligned}
Km_2a^2 &= 4\left(K\frac{m_2}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{4}l^2\right),\\
K\sigma a^4 &= 4\left(K\sigma\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \sigma\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2\right),\\
\frac{3}{4}K\sigma a^4 &= \frac{1}{8}\sigma a^4,\\
K &= \frac{1}{6}.
\end{aligned} \tag{29.2}$$

Moment zotrvačnosti veľkého štvorca bude teda $I_2 = \frac{1}{6}\sigma a^4$ a hľadaná uhlová rýchlosť

$$\omega' = \frac{\frac{\pi}{2}\sigma r^4}{\frac{\pi}{2}\sigma r^4 + \frac{1}{6}\sigma a^4}\omega = \frac{3\pi r^4}{3\pi r^4 + a^4}\omega. \tag{29.3}$$

30 Rezistor kladie elektrickému prúdu odpor a vzniká v ňom Joulovo teplo. Zároveň ale nejaké teplo aj stráca, pretože je v kontakte s okolitým vzduchom, a vieme, že stratené teplo je úmerné rozdielu teplôt rezistora a okolia. Výkon, ktorým teplo v rezistore vzniká, je

$$P_+ = UI = \frac{U^2}{R}. \tag{30.1}$$

a výkon, ktorým teplo z rezistora odchádza, je

$$P_- = kS\,\Delta T, \tag{30.2}$$

kde S je plocha povrchu rezistora, ΔT je rozdiel teplôt rezistora a okolia a k je nejaká konštanta závislá od tvaru a materiálu rezistora.

Teplota rezistora sa ustáli, keď prijíma práve toľko tepla, koľko ho aj odovzdáva, teda $P_+ = P_-$, čiže

$$\frac{U^2}{R} = kS\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{U^2}{RkS}. \tag{30.3}$$

Odpor vodiča s dĺžkou ℓ a plochou prierezu S počítame ako

$$R = \rho\frac{\ell}{S}, \tag{30.4}$$

kde ρ je rezistivita materiálu. Ak α-krát zväčšíme každý rozmer vodiča, ℓ sa zväčší α-krát a S sa zväčší α^2-krát. A platí to pre ľubovoľný vodič, pretože aj ak má v rôznych miestach rôznu plochu prierezu, každý z nich sa zväčší α^2-krát. Rezistor je vlastne len nedokonalý „vodič“, a teda ak α-krát zväčšíme jeho rozmery, jeho odpor sa zmenší α-krát.

Rezistor α-krát väčší sa ustáli na inej teplote T_2 a rozdiel jeho teploty oproti okoliu bude $\Delta T_2 = T_2 - T_0$. Súc vyzbrojení touto vedomosťou sa môžeme vrhnúť na rovnicu 30.3, z ktorej sa stane

$$\Delta T_2 = \frac{U^2}{\frac{R}{\alpha}k\alpha^2 S} = \frac{1}{\alpha}\frac{U^2}{RkS} = \frac{1}{\alpha}\Delta T \tag{30.5}$$

Zo zadania je v tejto úlohe $\alpha = 2$, a preto $\Delta T_2 = \frac{1}{2}\Delta T$. Pre malý rezistor je rozdiel teplôt $\Delta T = T_1 - T_0$, pre veľký to je $\Delta T_2 = T_2 - T_0$. Po dosadení týchto výrazov do rovnice vieme vyjadriť ustálenú teplotu veľkého rezistora ako

$$T_2 = \frac{T_0 + T_1}{2}.$$

31 Moment zotrvačnosti hviezdy možno určiť ako súčet momentov zotrvačnosti jednotlivých tyčí okolo osi prechádzajúcej ťažiskom hviezdy. Moment zotrvačnosti tyče s hmotnosťou m a dĺžkou d okolo osi prechádzajúcej jej ťažiskom je $I_0 = \frac{1}{12}md^2$. Ak chceme vypočítať moment zotrvačnosti okolo inej paralelnej osi, môžeme použiť Steinerovu vetu, ktorá hovorí, že moment zotrvačnosti okolo novej osi možno vypočítať z momentu zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej ťažiskom ako

$$I = I_0 + mx^2, \tag{31.1}$$

kde x je vzdialenosť paralelných osí.

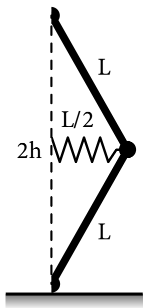
V prípade hviezdy je vzdialenosť osí prechádzajúcej ťažiskom tyče a hviezdy tretina ťažnice „trojuholníka", ktorého ťažisko je zhodné s ťažiskom hviezdy. Dĺžku ťažnice rovnostranného trojuholníka možno určiť z Pytagorovej vety ako

$$t = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}d. \tag{31.2}$$

Moment zotrvačnosti hviezdy okolo ťažiska je preto

$$I = 6\left(I_0 + m\left(\frac{t}{3}\right)^2\right) = 6\left(\frac{1}{12}md^2 + \frac{1}{12}md^2\right) = md^2. \tag{31.3}$$

$\boxed{32}$ Potrebnú tuhosť pružiny použitej v Dušanovom výtvore spočítame pomocou metódy virtuálnych prác. Tá hovorí, že ak sa systém infinitezimálne vychýli z rovnovážnej polohy, jeho energia sa nezmení. Celý výtvor je osovo súmerný, a teda sa nám stačí pozerať na jednu jeho polovicu, druhá musí vždy robiť to isté.



Obrázok 32.1: *Rozmery „umenia" v rovnovážnej polohe*

Zo zadania vieme, že Dušanov systém je v rovnovážnej polohe, keď je pružina natiahnutá na dĺžku L. Vtedy vieme vypočítať výšku systému (označme si ju $2h$) z Pytagorovej vety. Platí

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2, \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}L. \tag{32.1}$$

Celková potenciálna energia systému je súčtom potenciálnych energií štyroch tyčí v gravitačnom poli a potenciálnej energie natiahnutej pružiny s tuhosťou k. V rovnovážnej polohe sú ťažiská dvoch tyčí vo výške $\frac{h}{2}$ a ďalších dvoch tyčí vo výške $\frac{3h}{2}$. Energia je preto

$$E = 2\left(\frac{1}{2}mgh + \frac{3}{2}mgh\right) + \frac{1}{2}kL^2 = 4mgh + \frac{1}{2}kL^2. \tag{32.2}$$

Pripusťme teraz, že sa pružina natiahne o infinitezimálnu dĺžku dx. Keďže dĺžka tyčí sa nemože zmeniť, výška h sa zmení na $h + \mathrm{d}h$, pričom stále platí Pytagorova veta

$$L^2 = \left(\frac{L + \mathrm{d}x}{2}\right)^2 + (h + \mathrm{d}h)^2. \tag{32.3}$$

Ak zanedbáme infinitezimálne zmeny vo vyššom ako prvom ráde, čiže $(\mathrm{d}x)^2$ a $(\mathrm{d}h)^2$, dostaneme vzťah medzi zmenou výšky a natiahnutím pružiny

$$\mathrm{d}h = -\frac{L}{4h}\,\mathrm{d}x. \tag{32.4}$$

Pozrime sa teraz na energiu, pričom opäť zanedbáme infinitezimálne príspevky vo vyššom ako prvom ráde

$$E = 4mg(h + \mathrm{d}h) + \frac{1}{2}k(L + \mathrm{d}x)^2 \approx 4mg(h + \mathrm{d}h) + \frac{1}{2}k(L^2 + 2L\,\mathrm{d}x). \tag{32.5}$$

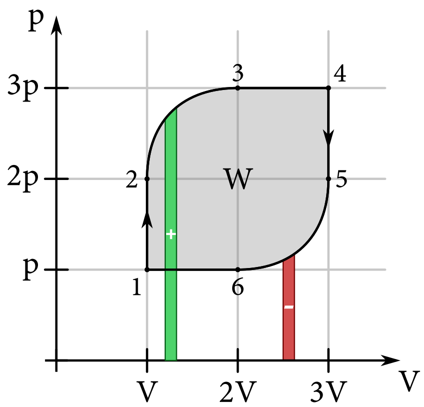
Vieme, že energia sa nezmenila, z čoho dostaneme

$$0 = 4mg\,\mathrm{d}h + kL\,\mathrm{d}x = \left(-mg\frac{L}{h} + kL\right)\mathrm{d}x. \tag{32.6}$$

Triviálnou úpravou a dosadením za h konečne dostaneme tuhosť pružiny, ktorú Dušan použil,

$$k = \frac{mg}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{mg}{L}. \tag{32.7}$$

33 Označme si význačné stavy postupne 1 až 6, ako sú zaznačené na priloženom pV diagrame 33.1. Plyn má v stave 1 najnižšiu teplotu a v stave 4 najvyššiu. Nech je teplota v stave 1 $T_1 = T$. Potom už vieme dopočítať zo stavovej rovnice teplotu v ľubovoľnom stave, takže v každom zo šiestich význačných stavov poznáme objem tlak aj teplotu.



Obrázok 33.1: *pV diagram so zakreslenými význačnými stavmi.*

Zaujíma nás účinnosť tepelného stroja. Tá je definovaná ako podiel získanej práce za jeden cyklus a množstva dodaného tepla

$$\eta = \frac{W}{Q_{\mathrm{in}}}. \tag{33.1}$$

Začnime prácou. Pri malej zmene objemu ΔV plyn vykoná prácu $\Delta W = p\,\Delta V$. Geometricky na priloženom pV diagrame to zodpovedá ploche obdĺžnička so šírkou ΔV medzi krivkou grafu a objemovou osou. Celková práca medzi dvoma stavmi je teda rovná ploche pod grafom medzi týmito dvoma stavmi. Práca medzi stavmi 1 a 4 je kladná, t. j. plyn koná prácu, a medzi stavmi 4 a 1 záporná, t. j. práca je konaná na plyne. Celková získaná práca je teda rovná ploche ohraničenej krivkou[2]

$$W = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) pV. \tag{33.2}$$

Poďme teraz na investované teplo. Z prvej vety termodynamickej vieme, že dodané teplo sa spotrebuje na vykonanie práce a na zmenu vnútornej energie

$$Q = W + \Delta U. \tag{33.3}$$

Vnútornej energia je však úmerná teplote. Na stupeň voľnosti častice pripadá energia $\frac{1}{2}kT$, no a keďže každá častica má tri stupne voľnosti[3] a častíc je N,

$$\Delta U = \frac{3}{2} Nk\,\Delta T. \tag{33.4}$$

Teplo do termodynamického cyklu dodávame len medzi stavmi 1 a 4. Teplota v stave 4 je podľa stavovej rovnice

$$T_4 = \frac{p_4 V_4}{p_1 V_1} T_1 = \frac{3p}{p}\frac{3V}{V} T = 9T. \tag{33.5}$$

Zmena vnútornej energie je potom

$$\Delta U_{14} = \frac{3}{2} Nk(T_4 - T_1) = 12NkT \tag{33.6}$$

a vykonaná práca medzi týmito dvoma stavmi je rovná ploche pod grafom, teda

$$W_{14} = \left(5 + \frac{\pi}{4}\right) pV. \tag{33.7}$$

Celkové dodané teplo do tepelného stroja preto je

$$Q_{\mathrm{in}} = W_{14} + \Delta U_{14} = \left(5 + \frac{\pi}{4}\right) pV + 12NkT. \tag{33.8}$$

[2] Dva obdĺžniky $p \times V$ a dve štvrťelipsy s polosami p a V.

[3] Plyn je jednoatómový, preto má tri translačné a žiadne rotačné stupne voľnosti.

Využijúc, že podľa stavovej rovnice písanej pre stav 1 platí $pV = NkT$, dostávame

$$Q_{\text{in}} = \left(17 + \frac{\pi}{4}\right) pV. \tag{33.9}$$

Dosadiac do vzťahu pre účinnosť konečne dostávame

$$\eta = \frac{\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(17 + \frac{\pi}{4}\right)} \doteq 0{,}2 = 20\ \%. \tag{33.10}$$

34 Úloha je geometricky vcelku jednoduchá, trochu nás však pravdepodobne potrápi výpočet. Z obrázka v zadaní vidíme, že pre skutočné dva parseky platí

$$2\ \text{pc} = \frac{2\ \text{au}}{\tan 1''} \tag{34.1}$$

a pre Kvíkovu jednotku $\mathcal{P}$ zas

$$\mathcal{P} = \frac{1\ \text{au}}{\tan 0{,}5''}. \tag{34.2}$$

Zaujíma nás teda, koľko je

$$\mathcal{P} - 2\ \text{pc} = \frac{1\ \text{au}}{\tan 0{,}5''} - \frac{2\ \text{au}}{\tan 1''}. \tag{34.3}$$

No a tu pravdepodobne máme problém. Uhol $1''$ je veľmi malý a počet metrov v parseku je veľmi veľký. Keď odčítame dve čísla, ktoré sa líšia na asi dvanástej platnej číslici, kalkulačka ich v pamäti zaokrúhli a poskytne len veľmi nepresný výsledok, alebo dokonca povie, že rozdiel je nula.[4]

Preto použijeme Taylorov rozvoj. Pre funkciu tangens platí

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \tag{34.4}$$

Očkom odhadneme, že pri požadovanej presnosti 1 km bude stačiť použiť prvý odlišný člen, teda tretí rád. Dostaneme

$$2\ \text{pc} \approx \frac{1}{x + \frac{x^3}{3}} \cdot 2\ \text{au} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{P} \approx \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3}} \cdot 1\ \text{au}, \tag{34.5}$$

kde x bude $1''$. Po pár jednoduchých úpravách dostaneme

$$\mathcal{P} - 2\ \text{pc} \approx \frac{2}{x}\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{12}} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}}\right) \cdot 1\ \text{au}. \tag{34.6}$$

Keď už pácham zverstvá s Taylorovým rozvojom, smieme použiť aj linearizáciu

$$\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x, \tag{34.7}$$

[4] Počítač to zvládne. Ten však počas súťaže nemáte. Dobrá kalkulačka to zvládne tiež – ak takú máte, tento príklad vám vie značne uľahčiť.

čo nám rovnicu 34.3 umožní prepísať do tvaru

$$\mathcal{P} - 2\,\text{pc} \approx 1\,\text{au} \cdot \frac{2}{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} - 1 + \frac{x^2}{3}\right) = 1\,\text{au} \cdot \frac{2}{x}\frac{x^2}{4} = 1\,\text{au} \cdot \frac{x}{2}. \tag{34.8}$$

Teraz už len naspäť dosadíme $x = 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{\pi}{648000}$ a dostaneme výsledok

$$\mathcal{P} - 2\,\text{pc} \approx \frac{1''}{2} \cdot 1\,\text{au} = \frac{\pi}{1\,296\,000} \cdot 1{,}5 \cdot 10^8\,\text{km} \doteq 364\,\text{km}. \tag{34.9}$$

Zahrnutím ďalšieho člena ($\propto x^5$) by sme dostali výsledok iba o asi 2 µm odlišný. Nakoniec ešte dodajme, že moderná definícia parseka už neráta ani s tangensom uhla, ale ho definuje priamo ako $1\,\text{au} \cdot \frac{648000}{\pi}$.

35 Výsledná teplota zrkadlovej sféry v rovnovážnom stave vôbec nezávisí od toho, ako vyzeralo čierne teleso vo vnútri, na akej teplote sa ustálilo, keď nebolo obalené, alebo akú časť žiarenia vonkajšia sféra odráža späť dnu: ak zdroj energie dodáva výkon P, táto energia sa v rovnovážnom stave musí opäť aj vyžiariť. Zrkadlová fólia má dva povrchy – vonkajší a vnútorný – a ich celková plocha je $2S$. Von sa však vyžiari len polovica, čiže

$$P = \frac{1}{2}\sigma 2S\widetilde{T}^4, \tag{35.1}$$

kde $\widetilde{T}$ je jeho teplota. V rovnovážnom stave pred obopnutím planéty sférou platilo $P = \sigma S T^4$, takže teplota sféry je rovná pôvodnej teplote planéty. Odpoveďou je teda $\widetilde{T} = T$.

36 Ako prvé si uvedomíme, že celé zrkadlo bude radiálne súmerné a úlohu si vieme previesť na dvojrozmerný problém v súradniciach z (výška) a r (vzdialenosť od osi otáčania) v sústave rotujúcej spolu so zrkadlom. Pozrime sa na to, aké sily pôsobia na malý element ortuti. Sú to

- tiažové zrýchlenie $\vec{a_g}$, ktoré smeruje nadol a jeho veľkosť je g;
- a odstredivé zrýchlenie $\vec{a_h}$, ktoré smeruje od osi otáčania a jeho veľkosť rastie lineárne so vzdialenosťou ako $\omega^2 r$.

Tomu zodpovedajú potenciály gz a $-\frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Celkový potenciál je teda

$$U(r, z) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2. \tag{36.1}$$

Voľná hladina ortuti zaujme taký tvar, aby potenciál na ňom bol konštantný (keby nebol, hladina by sa chcela preusporiadať); a keďže potenciál je definovaný až na aditívnu konštantu, môžeme si ho zvoliť tak, aby na tejto hladine bol rovný nule. Tvar hladiny teda bude daný krivkou, z ktorej vieme dostať explicitné vyjadrenie

$$gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\omega^2}{2g} r^2. \tag{36.2}$$

V tomto už vidíme parabolu – ostáva už len určiť jej rozmery. Rovnobežné lúče (v našom prípade zvislé) sa budú koncentrovať do jedného bodu – čo je v prípade, že staviame ďalekohľad, celkom príjemné zistenie. Ohnisko nájdeme najjednoduchšie tak, že vyhľadáme lúč, ktorý po odraze od zrkadla bude smerovať vodorovne. V mieste jeho dopadu musí byť uhol, ktorý zviera zrkadlo s vodorovnou rovinou 45° a zároveň z-ová súradnica tohto miesta je rovná z-ovej súradnici ohniska. Alebo si môžeme spomenúť, že parabola je množina bodov rovnako vzdialených od ohniska a direkčnej priamky, a teda že v tomto bode platí $z = f$ a $r = 2f$. Potom

$$f = \frac{\omega^2}{2g} 4f^2 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{g}{2\omega^2}. \tag{36.3}$$

$\boxed{37}$ V momente uzatvárania valca piestom je vo vnútri tlak p_{atm} a objem vzduchu je SH, kde S je plocha podstavy a H je výška valca. Po nadobudnutí rovnovážnej polohy sa piest ustáli vo výške h. Vtedy je vo vnútri tlak o $\frac{kh}{S}$ väčší v dôsledku silového pôsobenia pružinky na piest. Zaujíma nás rovnovážna poloha po dosť dlhom čase, preto teplota po ustálení bude rovná počiatočnej, takže ide o izotermickú kompresiu. Pre ňu možno písať

$$p_{\mathrm{atm}} SH = \left(p_{\mathrm{atm}} + \frac{kh}{S}\right) Sh. \tag{37.1}$$

Odtiaľ pre hľadanú rovnovážnu polohu dostávame[5]

$$h = -\frac{Sp_{\mathrm{atm}}}{2k} + \sqrt{\left(\frac{Sp_{\mathrm{atm}}}{2k}\right)^2 + \frac{SHp_{\mathrm{atm}}}{k}}. \tag{37.2}$$

Tlak vo vnútri sa teda ustáli na

$$p = p_{\mathrm{atm}} + \frac{kh}{S} = \frac{p_{\mathrm{atm}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_{\mathrm{atm}}}{2}\right)^2 + \frac{kHp_{\mathrm{atm}}}{S}}. \tag{37.3}$$

Vychýľme teraz piest z rovnovážnej polohy o x. Takémuto vychýleniu bude zodpovedať pokles tlaku o Δp. Zaujíma nás odozva v prvom momente, teda kým ešte nestihne prebehnúť tepelná výmena s okolím. To znamená, že ide o adiabatický dej, pre ktorý platí

$$p(Sh)^{\varkappa} = (p - \Delta p)[S(h + x)]^{\varkappa}. \tag{37.4}$$

Odtiaľ

$$\Delta p = p - \frac{ph^{\varkappa}}{(h + x)^{\varkappa}}. \tag{37.5}$$

Vratná sila je potom

$$F = -\Delta pS - kx = -pS\left[1 - \left(1 + \frac{x}{h}\right)^{-\varkappa}\right] - kx \tag{37.6}$$

a pre malé výchylky

$$F = -\left(\frac{\varkappa pS}{h} + k\right)x. \tag{37.7}$$

[5] Berieme kladný koreň kvadratickej rovnice.

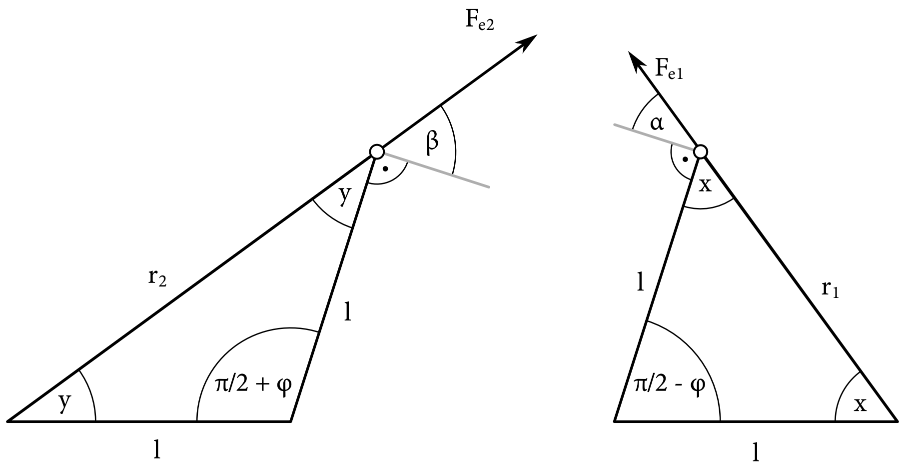
Odtiaľ okamžite vidíme, že zdanlivá tuhosť je

$$K = -\frac{F}{x} = \frac{\varkappa pS}{h} + k = \left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{1+\frac{4kH}{Sp_{\mathrm{atm}}}} - 1} + \varkappa + 1 \right) k. \tag{37.8}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania $K \approx 1{,}8$ kN/m.

38 Označme náboj na Jonkiných paličkách q, ich dĺžku d a hmotnosť m. Zaujímajú nás malé kmity, teda malá uhlová výchylka φ z rovnovážnej polohy (ktorá je zjavne taká, že palička stojí kolmo nahor), čiže ak sa nám v riešení objaví nejaký výraz obsahujúci φ, spravíme jeho Taylorov rozvoj do prvého rádu, t. j. členy obsahujúce φ^2 a vyššie mocniny zanedbáme.

Na paličku pôsobia tri sily – gravitačná a dve elektrické – a keďže sa palička môže otáčať okolo svojho spodného bodu, budú nás zaujímať momenty týchto síl. Gravitačná sila veľkosti mg pôsobí v polovici dĺžky paličky, takže moment jej sily pri vychýlení o uhol φ je $\frac{d}{2}mg\sin\varphi \approx \frac{d}{2}mg\varphi$, pričom výchylku φ v smere hodinových ručičiek považujeme za kladnú a takisto kladným momentom sily rozumieme ten, ktorý paličku roztáča v smere hodinových ručičiek.



Obrázok 38.1: *Vychýlená palička a vzdialenosti a uhly vo vzniknuvších trojuholníkoch.*

S momentami elektrických síl je to trochu zložitejšie. Vzdialenosť horného náboja od toho vpravo na stole nech je r_1. Ak na trojuholník v pravej polovici obrázka 38.1 použijeme kosínusovú vetu, dostaneme

$$r_1^2 = d^2 + d^2 - 2dd\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2d^2(1-\sin\varphi) \approx 2d^2(1-\varphi). \tag{38.1}$$

Štvorec vzdialenosti od ľavého náboja je analogicky $r_2^2 = 2d^2(1+\varphi)$. Ak poznáme vzdialenosti, poznáme už veľkosti elektrických síl, ale potrebujeme vedieť aj pod akým uhlom na náboj na paličke pôsobia. Preto sa pozrime na obrázok 38.1 ešte raz.

Máme dva rovnoramenné trojuholníky, z ktorých vieme spočítať uhly

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \tag{38.2}$$

pretože súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je π. Ďalej takisto vidíme, že

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + x = \pi \quad \text{a} \quad \beta + \frac{\pi}{2} + y = \pi, \tag{38.3}$$

teda

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \tag{38.4}$$

Na výpočet momentov síl potrebujeme poznať kosínusy týchto uhlov, čiže

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2} \tag{38.5}$$

a analogicky

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2}. \tag{38.6}$$

Konečne sa dostávame k momentom síl, kde využijeme Taylorove rozvoje $\frac{1}{1-\varphi} \approx 1 + \varphi$ a $\frac{1}{1+\varphi} \approx 1 - \varphi$. Uhlové zrýchlenie ε vypočítame z rovnice

$$\begin{aligned} J\varepsilon &= -d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\cos\alpha + d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\cos\beta + \frac{d}{2}mg\sin\varphi \\ &\approx -d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2d^2}(1+\varphi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2}\right) + d\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2d^2}(1-\varphi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{d}{2}mg\varphi \\ &\approx -\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}}{4d} - \frac{d}{2}mg\right)\varphi. \end{aligned} \tag{38.7}$$

Moment zotrvačnosti tyče otáčajúcej sa okolo jej konca je $J = \frac{1}{3}md^2$, čo po dosadení do predchádzajúcej rovnice dáva

$$\varepsilon = -\frac{3}{md^2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}}{4d} - \frac{d}{2}mg\right)\varphi, \tag{38.8}$$

čiže harmonický oscilátor s uhlovou rýchlosťou

$$\omega^2 = \frac{3}{md^2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}}{4d} - \frac{d}{2}mg\right). \tag{38.9}$$

Preto je perióda kmitov po dosadení hodnôt zo zadania

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \doteq 1{,}95\ \mathrm{s}. \tag{38.10}$$

39 Žiarovka vyžaruje svetlo izotropne, teda do všetkých smerov rovnako. S touto znalosťou vieme z celkového svetelného toku Φ jednoducho spočítať jej svietivosť ako

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}. \tag{39.1}$$

Okrem toho budeme potrebovať poznať jej *jas*, teda svietivosť na jednotku plochy prierezu pri pohľade pozdĺž ľubovoľného lúča. Ak označíme polomer žiarovky r, plocha prierezu je πr^2 a jas

$$L = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{\Phi}{4\pi^2 r^2}. \tag{39.2}$$

Čo sa deje pod lampou? Tienidlo lampy časť svetla odráža smerom nadol, takže vo výsledku bude osvetlenie ulice silnejšie, ako keby tam tienidlo nebolo. Ak je žiarovka priamo v ohnisku paraboloidu, na osi tienidla vznikne intenzívny zväzok lúčov. Žiarovka nie je bodovým zdrojom, takže tieto lúče nebudú úplne rovnobežné. V dostatočnej vzdialenosti priamo pod lampou, teda tam, kde budú uhly veľmi malé, však určite budeme v každom bode priestoru vidieť

- buď oblohu (ktorá nás ale nezaujíma, lebo odtiaľ svetlo neprichádza);
- alebo priamo žiarovku (a teda jas L);
- alebo odraz žiarovky v zrkadle (a teda rovnako jas L).

Pri danom pomere veľkostí žiarovky a tienidla a výšky lampy táto podmienka určite splnená bude. Celkovo sa to teda správa rovnako, ako keby sme mali žiarovku s priemerom rovným priemeru tienidla, ale s rovnakým jasom ako pôvodná žiarovka.[6] Ostáva nám teda spočítať, akej intenzite osvetlenia to zodpovedá. Na to nám stačí spočítať priestorový uhol, ktorý pri pohľade z cesty zaberá tienidlo lampy, a vynásobiť ním jas. Keďže uhly v úlohe sú veľmi malé, môžeme priestorový uhol spočítať jednoducho ako

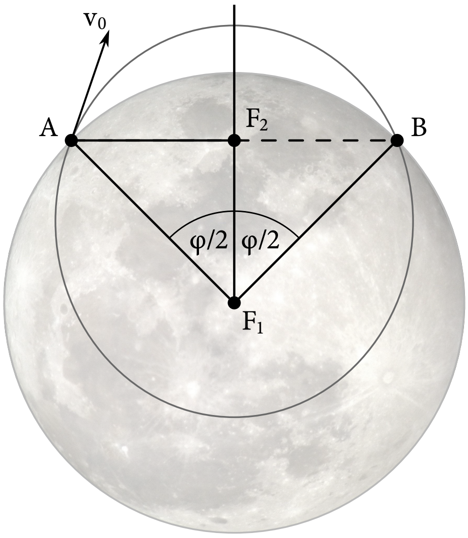
$$\Omega \approx \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2, \tag{39.3}$$

kde R je polomer tienidla a $H \gg R$ výška lampy. Intenzita osvetlenia pod lampou potom bude

$$E = L_0 \Omega \approx \frac{\Phi}{4\pi^2 r^2} \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \approx 354\ \mathrm{lx}. \tag{39.4}$$

40 Z Keplerových zákonov vieme, že ak nejaké teleso vrhneme v radiálnom gravitačnom poli Mesiaca, bude sa pohybovať po eliptickej trajektórii s jedným ohniskom F_1 v strede Mesiaca. Jediné čo teda musíme určiť, je poloha druhého ohniska – tak, aby počiatočná rýchlosť bola čo najmenšia. Označme si uhlovú vzdialenosť medzi Maťkom a Kubkom ako φ. Druhé ohnisko bude ležať na osi symetrie tohto uhla (pozri obrázok 40.1). Na to, aby sme ho našli, sa nám zíde tzv. *rovnica vis-viva*.

[6] Celkový svetelný tok sa samozrejme zachováva: akurát svetlo, ktoré by bez tienidla žiarilo nahor alebo do bokov, tienidlo odráža smerom nadol. Jedine svetlo, ktoré sa od tienidla odrazí naspäť na žiarovku, sa nedostane von z tienidla.



Obrázok 40.1: *Trajektória kameňa. Uhol φ bude 90°.*

Tá nám dáva do súvislosti celkovú energiu telesa obiehajúceho okolo planéty po eliptickej trajektórii a dĺžku hlavnej polosi elipsy. My ju použijeme v tvare

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \tag{40.1}$$

kde výraz na ľavej strane je celková mechanická energia (kinetická a potenciálna) pohybujúceho sa telesa a a je hlavná polos elipsy. Na to, aby sme túto rovnicu odvodili, si zoberieme hmotný bod, ktorý obieha okolo planéty s hmotnosťou M po eliptickej trajektórii. Označme si vzdialenosti a rýchlosti v pericentre a v apocentre ako r_a a v_a, resp. r_p a v_p. Zo zákona zachovania energie vyplýva rovnosť

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{Mm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{Mm}{r_a} \tag{40.2}$$

a zo zákona zachovania momentu hybnosti máme

$$mv_pr_p = mv_ar_a \quad \Rightarrow \quad v_a = v_p\frac{r_p}{r_a}. \tag{40.3}$$

Po dosadení do rovnice 40.2

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{Mm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_p^2\frac{r_p^2}{r_a^2} - G\frac{Mm}{r_a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_p^2\left(1-\frac{r_p^2}{r_a^2}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right). \tag{40.4}$$

Po vydelení zátvorkou $\left(1-\left(\frac{r_p}{r_a}\right)^2\right)$ a s využitím vzťahu $2a = r_a + r_p$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_p^2 &= \frac{GMm}{2a}\frac{r_a}{r_p}, \\ \frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{Mm}{r_p} &= -\frac{GMm}{2a}. \end{aligned} \tag{40.5}$$

Zákon zachovania energie nám hovorí, že výraz $mv^2/2 - GMm/r$ ostáva konštantný počas celého pohybu telesa. Odvodili sme si, čomu je táto konštanta rovná v bode najväčšieho priblíženia k planéte, takže musí byť rovnaká aj pre ľubovoľný iný bod na trajektórii. Tým je rovnica vis-viva (40.1) dokázaná.

Hľadanú počiatočnú rýchlosť kameňa si označme v_0. Potom bude mať rovnica 40.1 tvar

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right). \tag{40.6}$$

Môžeme si všimnúť, že počiatočná rýchlosť je tým menšia, čím menšia je hlavná polos elipsy. Musíme teda nájsť polohu F_2 druhého ohniska elipsy tak, aby bola hlavná polos čo najmenšia. Všimnime si ešte, že ak máme jeden bod A na elipse a spočítame súčet vzdialeností z tohto bodu do oboch ohnísk (na obrázku $|AF_1| + |AF_2|$), potom dostaneme $2a$. Vzdialenosť $|AF_1|$ je ale vždy rovná polomeru Mesiaca $R_☾$, takže minimalizovať môžeme jedine vzdialenosť $|AF_2|$.

Najkratšiu možnú vzdialenosť dostaneme vtedy, keď to druhé ohnisko bude ležať na spojnici bodov A a B, ako je nakreslené aj na obrázku. Potom bude platiť

$$2a = |AF_1| + |AF_2| = R_☾\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right) \tag{40.7}$$

a ak toto dosadíme do rovnice 40.6, vyjadríme rýchlosť v_0 a dosadíme za φ, dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_☾}{R_☾}\left(1 - \frac{1}{1+\sin\frac{\varphi}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{GM_☾}{R_☾}\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}. \tag{40.8}$$

Výsledky

1 0,17 *presne*.

2 01:10:00

3 145 m

4 60 °C

5 $\frac{11}{15}$

6 270 m

7 5 Ω a 20 Ω, *na poradí nezáleží*.

8 $h = \frac{2k^2}{g}$

9 $\frac{3}{7}$

10 90°

11 $\left(\frac{3a-b}{12}\right)b^2 \tan\beta$

12 36 km/h

13 6

14 391 m^3

15 $\frac{4}{9} + \frac{26\sqrt{2}}{9\pi} = \frac{4\pi + 26\sqrt{2}}{9\pi}$

16 12 mm

17 $\mathrm{d}W = m\omega^2 \ell \,\mathrm{d}\ell$

18 $2\frac{1+\sqrt{13}}{13+2\sqrt{13}} = 2\frac{11\sqrt{13}-13}{117} \doteq 46\ \%$

19 126,75 m

20 $\frac{5}{3}a$

21 1,56 m

22 68°

23 0,13 °C

24 $5g$

25 170 cm

26 0,5 m/s

27 Najedený hroch je $\frac{\sqrt{202}}{14}$-krát rýchlejší.

28 392 m. *Uznávajte výsledky v rozsahu 385 – 405 m.*

29 $\frac{3\pi r^4}{3\pi r^4 + a^4}\omega$

30 $\frac{T_0 + T_1}{2}$

31 md^2

32 $\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{mg}{L}$

33 $\frac{\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(17+\frac{\pi}{4}\right)} \doteq 0{,}2 = 20\ \%$

34 364 km

35 T

36 $\frac{g}{2\omega^2}$

37 1,8 kN/m

38 1,95 s

39 354 lx

40 $\sqrt{\frac{GM}{R}\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$