Milí čtenáři,

v rukou držíte sbírku úloh 27. ročníku Fyzikálního Náboje. Ve sbírce se nacházejí všechny úlohy, se kterými jste se v tomto ročníku mohli na soutěži střetnout. K úlohám přikládáme i vzorová řešení, ze kterých se můžete mnohé naučit. Pokud byste některému řešení nerozuměli, neváhejte se nám ozvat, všechno objasníme.

Tato sbírka by nevznikla bez významné pomoci mnohých lidí, kteří se podíleli na celém vývoji Fyzikálního Náboje. Autory Fyzikálního Náboje jsou převážně studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě a většina z nich se také podílí na organizování Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS – https://fks.sk/). V České republice s překladem a organizací pomohli převážně studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, kteří se podílejí na české verzi FKS, tedy FYKOSu.

Fyzikální Náboj i v roce 2024 pokračuje ve své mezinárodní tradici. Za mezinárodní spolupráci děkujeme lokálním organizátorům: Katarína Nedeľková (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Urszula Goławska (Gdaňsk), Andrzej Karbowski (Toruň), Mirela Kaczmarek (Vratislav), José Francisco Romero García (Madrid) a Dmytro Rzhemovskyi (Vídeň).Výsledky vzájemného souboje si můžete prohlédnout na našich stránkách.

FYKOS je korespondenční fyzikální soutěž. Zhruba jednou za měsíc zveřejňujeme různé zajímavé fyzikální úlohy, jejichž řešení nám do určených termínů můžete poslat. My vám úlohy opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejlepší řešitele zveme dvakrát do roka na týdenní soustředění. Více informací najdete na stránce https://fykos.cz/.

Jménem celého organizátorského týmu věříme, že jste si v roce 2024 Fyzikální Náboj užili, a doufáme, že se všichni uvidíme na Náboji i příští rok! Ať už v roli soutěžících, nebo organizátorů.

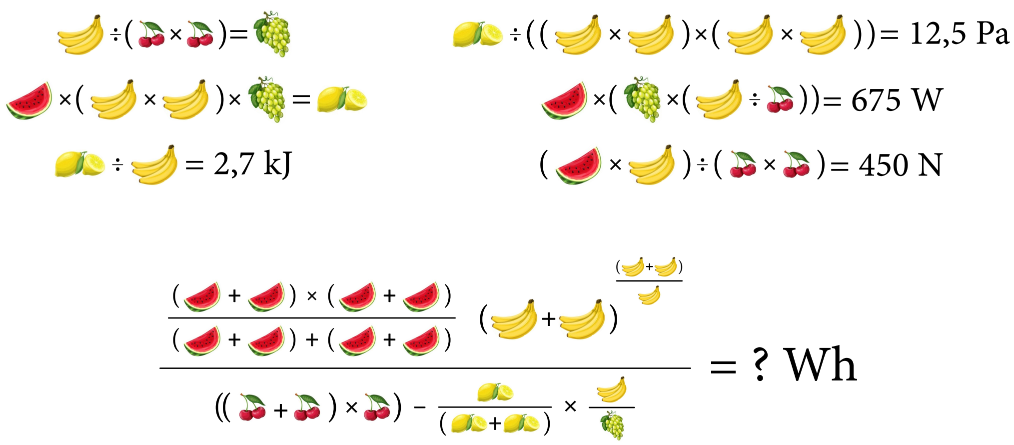
Jakub Kliment – hlavní organizátor v ČR

Jaroslav Valovčan – hlavní organizátor

Výsledky soutěže, archiv úloh a další informace najdete na stránce https://physics.naboj.org/.

Zadání

1 95 % lidí tuto úlohu nedokáže vyřešit! Dokážete to vy?



2 Tomáš se opět jednou díval v televizi na nějaké formule. Tentokrát takové ty americké, co zatáčejí pořád jen doleva. A protože si ještě nenašetřil na cestu do Ameriky, aby se na ně mohl podívat naživo, zavolal Paťovi a Jožkovi, zda by mu na místním kruhovém objezdu nepředvedli soukromé závody.

Kluci přijeli ve svých autech, postavili se vedle sebe a naráz vystartovali. Oba jezdili konstantní zběsilou rychlostí 18 km/h, ale Paťo jezdil ve vnitřním pruhu, což je kružnice s obvodem 100 m, zatímco Jožko jezdil ve vnějším pruhu po kružnici s obvodem 120 m. Kolikrát objede Paťo kruhový objezd, než poprvé předjede Jožka?

Čas potřebný k zrychlení na zběsilou rychlost zanedbejte.

3 Kvíkova svědomitá příprava na celonoční pozorování Perseid spočívá mimo jiné v přípravě kávy do termosky (sedm lžiček instantní kávy a devět lžiček cukru, netřepat, promíchat). Termoska má vnitřní nádobu ve tvaru válce s výškou 18 cm a poloměrem podstavy 4 cm. Stěny vnitřní nádoby mají tloušťku 0,5 mm a jsou vyrobené z hliníku s hustotou 2,7 $\mathrm{g/cm^3}$ a měrnou tepelnou kapacitou 0,9 $\mathrm{J/(g \cdot K)}$. Kvík naplnil vnitřní nádobu až po okraj kávou s teplotou 95 °C.

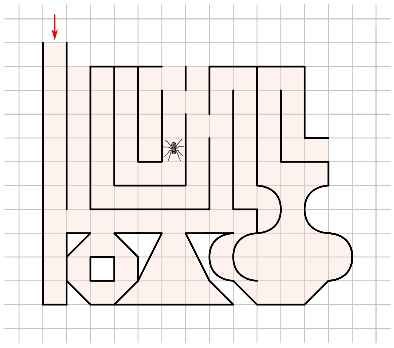
O kolik stupňů se káva ochladila v důsledku výměny tepla s vnitřní nádobou? Vnitřní nádoba je od vnější oddělená vakuem, a tudíž můžete předpokládat, že je perfektně tepelně odizolovaná. Měrná tepelná kapacita kávy je stejná jako měrná tepelná kapacita vody. Původní teplota termosky byla pokojová, tedy 20 °C.

4 Matouš se konečně dočkal: jeho letadlo se právě rozjíždí po vzletové dráze. Jako zkušený cestovatel je už vůči zpožděním, ukřičeným dětem a hnusným suchým sendvičům úplně lhostejný, jako fyzika ho však stále zajímají údaje o průběhu letu. Proto vytáhne mobil, který mu ukáže, že letadlo zrychluje s rovnoměrným zrychlením 2 $\mathrm{m/s^2}$. Jenže rychlost letadla se obvykle udává v km/h.

Jaké je zrychlení letadla v příbuzných jednotkách $\mathrm{km/h^2}$?

5 Plyš s Kvíkem dostali jako svatební dar skleněný výtvor od profesionálních sklářů až z dalekého Poltáru, jehož schéma můžete vidět na obrázku. Do daru jim však brzy vlezl masivní pavouk. Nevypadal v něm moc esteticky, takže po krátké úvaze se rozhodli ho odtud vytopit.

Kolik vody musí nalít do levé trubice, aby bylo políčko s pavoukem celé vyplněno vodou? Jeden čtvereček odpovídá objemu 1 l a rozměry výtvoru jsou dostatečně malé, aby se vzduch působením tlaku vody stlačil **jen zanedbatelně**.



6 Jaro změřil na glóbu, že vzdálenost z Ria do Hongkongu je 17 700 km a vzdálenost z Ria do Tokia je 18 600 km. Jaká je největší možná vzdálenost mezi Tokiem a Hongkongem?

Země je koule s obvodem 40 000 km. *O skutečné poloze zmíněných míst nepředpokládejte nic.*

7 Přeborníci v Trackmanii Tomáš a Maťko závodí na rovné trati dlouhé 300 m. Tomášovo auto zrychluje s konstantním zrychlením $8\ \mathrm{m/s^2}$. Maťko má na startu problémy se zapalováním a vyrazí až o sekundu později, ale zato se zrychlením až $9\ \mathrm{m/s^2}$.

Kdo jako první projede cílem a o kolik sekund vyhraje?

8 Odevzdejte součet čísel pravdivých výroků.

1	Voda teče hadicí se zúženým místem. V zúžení teče voda nižší rychlostí.
2	Když v uzavřené nádobě s kapalinou působíme na hladinu silou, v každém místě kapaliny bude stejný tlak.
4	Když těleso plave na hladině vody, jeho hustota musí být menší než hustota vody.
8	V úzkém odměrném válci je do poloviny nalitá rtuť. Když válec nakloníme o 45°, tlak u dna klesne.
16	Na hladině vody ve skleničce s pokojovou teplotou plave kostka ledu. Hladina ve skleničce bude stoupat, dokud kostka neroztaje.
32	Voda sa nevypařuje při teplotě výrazně nižší než je její bod varu.
64	Dvě tělesa plavají na hladině. Těleso, jehož část vystupující nad hladinu má větší objem, má menší hustotu.

Všechny zmíněné objekty se nacházejí v běžných pozemských podmínkách (homogenní gravitační pole, atmosférický tlak, pokojová teplota, …).

9 Skrz dírku v závěse na okně plovárny dopadá na hladinu vody v bazénu jediný paprsek slunečního světla pod úhlem 45°. Vzhledem k tomu, že se sluneční světlo skládá z barevných složek, na dně bazénu se objeví duhový proužek. Jaká je délka tohoto proužku, když index lomu vody pro viditelné světlo je v rozmezí 1,33 – 1,34 a bazén je hluboký 2 m?

Uvažujte index lomu vzduchu rovný 1.

10 Marek zapomněl před zimou do ostřikovačů svého auta nalít nemrznoucí směs a nechal tam nevypotřebovanou vodu. Nyní stojí zamrzlý před autem, rozhazuje rukama, kleje a zjišťuje, že ve dvoulitrové nádržce má 1 kg čistého ledu.

Doplnil nádržku zimní kapalinou, která tuhne až při −20 °C. Při jaké nejnižší teplotě bude výsledná směs kapalná, pokud je hustota zimní kapaliny 800 kg/m^3 a teplota tuhnutí směsi je jednoduchým váženým průměrem podle hmotnosti konstituentů?

11 Adam si na jarmarku koupil langoš a masivní jablko. Langoš samozřejmě snědl hned, s jablkem ale došel k nedaleké lávce, která vede přes potok.

Tam se podíval dolů a ve vodě uviděl svůj vlastní odraz. To ho natolik rozrušilo, že jablko pustil, takže spadlo do potoka. Ukázalo se, že hustota jablka je rovna dvěma třetinám hustoty vody.

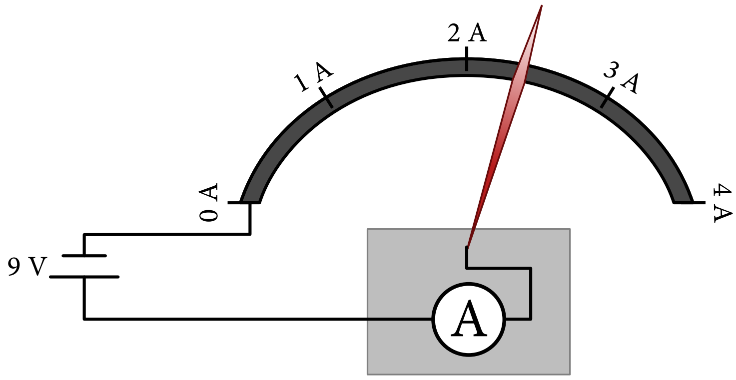
Jelikož měl Adam mastné ruce od langoše a nechtěl způsobit ekologickou katastrofu, sehnul se z lávky nad vodu s tím, že bude ukusovat, co z jablka vyčnívá nad hladinu. Dopad jablka do vody ale přilákal i hladovou rybu, která se do něj pod hladinou také hned pustila.

Jakou část jablka sní Adam? Vzhledem ke značné výhodě v počtu zubů ohlodává jablko třikrát rychleji než ryba.

12 Jaro si na Dvoukolesovačce sviští dolů z kopce na kole jako rorýs (z řádu svišťounů), dokud mu do cesty nevběhne rejsek. Rychle si uvědomí, že při své aktuální rychlosti by na vodorovné rovině zabrzdil na dráze s za čas t. Jaký nejmenší by musel být sklon kopce vůči vodorovné rovině, aby Jaro nebyl schopný zabrzdit vůbec?

Uvažujte, že kola kola při brždění neprokluzují.

13 Kuba doma hledal multimetr, ale bohužel našel jen divný ampérmetr. Jeho ručička se pohybuje po tenkém vodivém plíšku s délkovým odporem 4 Ω na dílek tak, jak je na obrázku. Na tento zázrak moderní elektrotechniky připojil baterii s napětím 9 V. Jaký proud ukáže ampérmetr?



14 Patrik objevil v dědečkově skříni zvláštní černý disk s obrázkem na papírovém obalu. Dříve, než by na něm stihl naservírovat sójový hamburger nebo ho použít místo frisbee, mu dědeček ukázal, že když disk položí na gramofon, na vnější konec spirálové drážky na disku umístí jehlu a zmáčne pár tlačítek, z reproduktorů se kromě praskání a syčení ozve i jakási prehistorická hudba.

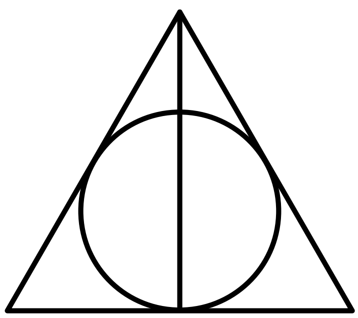
Syčení a praskání trvalo přesně 20 minut. Jaká je délka drážky, jestliže vnější průměr disku je 30 cm a drážka končí 5 cm od jeho středu? Záhadný disk se na gramofonu otáčel rychlostí 33⅓ otáček za minutu.

15 Skokan skáče do vody z mostu vysokého 10 m. Po odrazu udělá salto a dopadne do vody, přičemž právě polovinu času stráví nad úrovní mostu.

Jak dlouho trvá celý skok?

16 Sára je velkou fanynkou Harryho Pottera. Vytáhla ze šperkovnice přívěsek Relikvií smrti a začala jej obdivovat. Neviditelný plášť, kámen vzkříšení, bezová hůlka. A protože jí ani fyzika není cizí, zamyslela se, kde má tento přívěsek těžiště.

Přívěsek je složen z rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a, z kružnice vepsané do daného trojúhelníku a z jedné z jeho výšek. Všechny tyto součásti mají stejnou délkovou hustotu. Jak daleko se nachází těžiště od vrcholu trojúhelníku, do něhož je vedená výška?



17 Andrej má nekalé balistické úmysly. Na jejich realizaci si postavil jednoduchý katapult: nehmotnou vodorovnou lať dlouhou $2L$ umístil do výšky L od země a ve středu ji podepřel. Na jeden její konec pevně přivázal kámen s hmotností M a na druhý konec položil do mělké jamky projektil s hmotností $m < M$ a vše zajistil západkou.

Projektil si spokojeně hověl na lati, dokud Andrej západku neuvolnil. Laťka se dala do pohybu a projektil vyletěl z jamky přesně v okamžiku, když byla laťka svisle. Jak daleko projektil doletěl?

18 Nová dálnice z Bratislavy do Košic je dlouhá přesně 400 kilometrů a má čtyři pruhy v každém směru. V nich jezdí auta rychlostmi 80 km/h, 100 km/h, 120 km/h a 160 km/h. Peter, Pavel a Arthur vyrazili z Košic zároveň, ale každý jel v jiném pruhu, protože každé z aut zvládá jiné rychlosti. Když přijeli do Bratislavy, chlubili se svými zážitky:

Peter: „Jel jsem v nejrychlejším pruhu a cestou jsem předjel 620 aut, a z toho 200 jelo v druhém nejrychlejším pruhu!“

Pavel: „Já jsem jel rychlostí 120 km/h a předjel jsem dohromady 220 aut!“

Arthur jel rychlostí 100 km/h a nepamatuje si, kolik aut předjel. Spočítej to za něj!

Předpokládejte, že auta vyjíždějí z Košic v každém pruhu rovnoměrně a všechny projedou celou trasu.

19 Matouš občas vymýšlí neskutečné koniny. Jednou si tak z ničeho nic uvědomil, že pokud

- jedna *koňská délka* je osm stop;
- jedna *koňská síla* je výkon, který je třeba ke zvedání 75 kg rychlostí 1 m/s;
- a *koňská dávka* je 1,7 kg krmiva na 100 kg hmotnosti za den;

tyto tři jednotky mu stačí, aby z nich vytvořil systém, ve kterém bude moci vyjádřit libovolnou mechanickou fyzikální veličinu. Například *koňské zrychlení* bude *koňská délka* vynásobená *koňskou dávkou* na druhou.

Když posledně Matouš šlápl jisté slečně v tramvaji na nohu, vynadala mu, že je těžký jako kůň. Matoušovi se to však nezdálo; když si vyjádřil v koňském systému jednotku hmotnosti, vyšla mu pořádně velká hodnota. Kolik to je?

20 Katka s Vladem jedou na eskalátoru. Eskalátor má délku 120 viditelných schodů a pohybuje se rychlostí dvou schodů za sekundu. Oba nastoupili na nejnižší schod. Katka se pokojně veze, zatímco Vlado zběsile běhá mezi ní a vrchním koncem eskalátoru, a to rychlostí dva schody za sekundu směrem nahoru a šest schodů za sekundu dolů.

Kolik schodů stihne dohromady překonat, než ho Katka na vrchu eskalátoru chytí a dá mu pohlavek?

21 Marcel a Sabinka proti sobě letí v nadzvukových letadlech po dvou rovnoběžných přímkách vzdálených 1 km, každý se pohybuje rychlostí Mach 3. Kolik času uplyne mezi jejich maximálním přiblížením a okamžikem, kdy Sabinka uslyší zvuk Marcelova letadla?

Rychlost zvuku je Mach 1 = 1 km *za* 3 s.

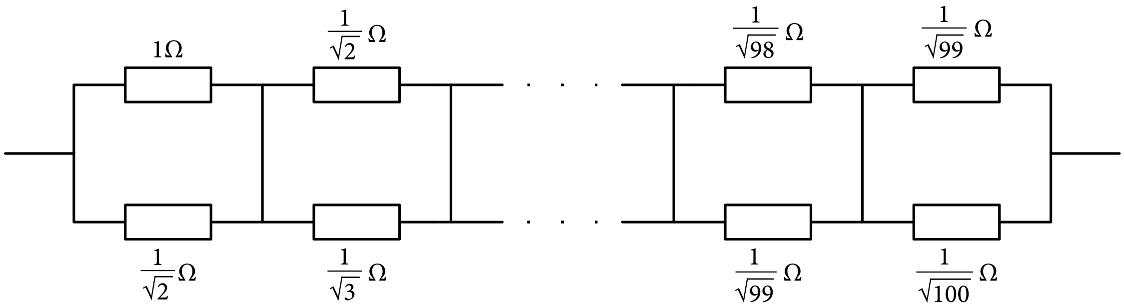
22 Marcel a Sabinka letí na svatební cestu balónem. Už teď je však jejich rozpočet napjatý, a přestože se Marcelovi povedlo půjčit si balón zadarmo, potřebuje ho ještě něčím naplnit. Helium je velmi drahé, a tak se budou muset spokojit s elektrolyticky získaným vodíkem.

Kolik bude stát naplnění balónu, jestliže prázdný balón i s novomanželi má hmotnost 1000 kg, cena elektřiny pro novomanžele je 0,2 €/kWh a celková účinnost procesu je 50 %?

Spálení vodíku s kyslíkem vyprodukuje 285,8 kJ/mol energie.

Svatební cesta probíhá při standardním tlaku a teplotě. Tlak uvnitř balónu je roven vnějšímu tlaku.

23 Samko našel obrovskou krabici všelijakých rezistorů a dlouhou cívku dokonale vodivého drátu. Vyrobil z nich žebřík, který má mezi každými dvěma příčkami na jedné straně rezistor s odporem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ Ω a na druhé rezistor s odporem $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ Ω pro n od 1 až po 99.



Jaký je celkový odpor mezi konci žebříku?

24 Výšku mořské hladiny ovlivňovanou přílivem a odlivem ve francouzském městě Saint-Malo umíme ve dnech kolem úplňku modelovat jako $A \cdot \sin(\omega t)$, kde A je amplituda a ω je frekvence taková, že příliv i odliv nastávají každých 12 hodin.

Námořníky lodi Santiano by zajímalo, jestli kotva žbluňkne už ráno doma u mola. Problém je v tom, že jejich loď dokáže vplout do přístavu jen tehdy, je-li zrovna příliv nebo je hladina nanejvýš o $A/3$ níže než při přílivu, a námořníci nevědí, kdy tato situace nastane.

Jaká je pravděpodobnost, že kotva žbluňkne doma u mola, tedy že připlují v čase, kdy se jim podaří zakotvit?

25 Marcel a Krtko měří vzdálenosti měst na Zemi různými způsoby: Marcel coby letec uvádí vzdálenost jako délku nejkratší křivky vedoucí po povrchu planety, zatímco Krtko jako krtek uvádí vzdálenost po přímé čáře, i když vede pod povrchem.

Když měřili vzdálenost mezi Zvolenem a Plaveckým Čtvrtkem, vyšel jim rozdíl délek přesně 1 m. Jakou vzdálenost naměřil Marcel?

Země je dokonalá koule s poloměrem 6371 km.

26 Adam se houpe na houpačce zavěšené na řetězech o délce L. Když se Adam v krajní poloze na okamžik zastaví, cítí přetížení 0,5 g. Jaké přetížení bude pociťovat v nejnižší poloze?

27 Katka dostala nový kovový náhrdelník, který má tvar kruhové smyčky s poloměrem r a délkovým odporem λ. V rámci oddechu se šla zatočit na kolotoči na hřišti před domem. Sedla si do vzdálenosti R

od osy otáčení a roztočila se okolo ní s úhlovou rychlostí ω. Najednou si všimla, že nějací výtržníci dali pod kolotoč obrovský magnet vytvářející magnetické pole s indukcí B, která má všude na kolotoči stejnou velikost a míří ve směru osy otáčení.

Katka se začala bát o svůj náhrdelník. Jaký proud se v něm indukuje? Předpokládejte, že Katka je ze strachu celá ztuhlá a drží se na jednom místě. Sedí v takové poloze, že náhrdelník svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°.

28 Lucka definitivně sekla se zahradničením a rozprodává vybavení před garáží. Na prodej je například odměrka z dostatečně vysoké válcové nádoby s podstavou o ploše S, která má uprostřed dna kruhový otvor sahající do poloviny jeho poloměru překrytý nehmotnou zátkou. Uvnitř nádoby se nachází menší válec s hustotou 500 kg/m^3, plochou podstavy 0,99S a výškou H, který je přichycený k zátce ve dně lankem. Po napuštění jistého kritického množství vody vnitřní válec fungující jako bójka zátku ze dna vytáhne, takže není možné do nádobky napustit víc vody.

Jaký nejmenší a jaký největší objem vody dokáže Lucka takovou odměrkou dávkovat, pokud může nastavit libovolnou délku lanka? Objem vnitřního válce je 1 l.

29 „Hromy-blesky!!!" …kutilu Danovi se zjevně zase někdo pokoušel v kanceláři uklízet. Dvě sklenice s rajčatovým protlakem jsou rozbité a navíc mu zmizela vrtačka…

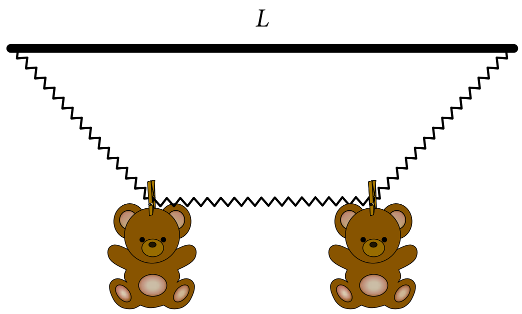
Naštěstí Danova cenná kyvadélka přežila úklid nepoškozená. Když je najednou vychýlí z rovnovážné polohy, má jejich pohyb následující vlastnosti:

- právě při každém třetím průchodu pomalejšího kyvadélka (toho s delší periodou) krajní polohou vpravo se setká s rychlejším kyvadélkem;
- a právě při každém pátém průchodu rychlejšího kyvadélka krajní polohou vlevo se setká s pomalejším kyvadélkem.

Delší z kyvadélek má závěs dlouhý 10 cm. Jakou délku závěsu má kratší kyvadélko?

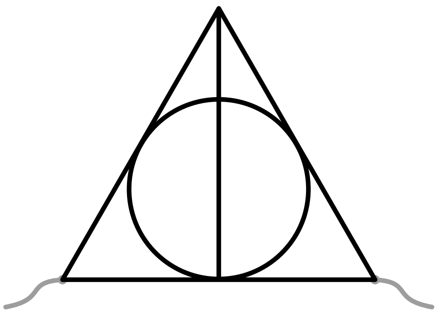
30 Týnka potřebovala usušit dva čerstvě vyprané plyšáky, oba s hmotností m. Při prvním pokusu je zavěsit se jí podařilo strhnout šňůru na prádlo. Na prázdný rám sušáku široký L tak natáhla pružinu s nulovou klidovou délkou a tuhostí k. Potom plyšáky zavěsila do třetiny a do dvou třetin délky pružiny, která pod jejich tíhou klesla.

O kolik klesne střed pružiny oproti jejím koncům?



31 Sára opět vytáhla svůj oblíbený přívěsek Relikvií smrti. Tentokrát ji zajímá, jak velký má odpor. Sářin přívěsek je tvořen rovnostranným trojúhelníkem s délkou strany a, kružnicí vepsanou do tohoto trojúhelníku a jednou z jeho výšek. Délkový odpor všech jeho součástí je λ.

Jak velký je odpor mezi dvěma vrcholy trojúhelníku, kterých se nedotýká hůlka?



32 Pán Temnot™ po dlouhém studiu ovládnul nové kouzlo černé magie: vypnutí gravitace. Zatím to sice jde jen na pár sekund a s tím až tolik škody nenapáchá, ale zřejmě se chystá na něco mnohem většího.

Chtěl by se vás zeptat – samozřejmě jen čistě akademicky a pro kamaráda – na jakou nejkratší dobu by musel vypnout gravitaci Slunce, aby Země odletěla do nekonečna?

33 Nina si na vaření zelňačky půjčila starou dvouplotýnku. Navzdory všeobecnému očekávání dvouplotýnka hřála až příliš dobře, takže po zapojení do elektřiny se zahřála na astronomických 250 °C. Při takové teplotě se jí však zelňačka začala připalovat. Stará dvouplotýnka naneštěstí neměla fukční regulaci teploty, a tak Nina musela improvizovat. Sebrala ostřikovač se speciální chladící kapalinou s teplotou 20 °C a aplikovala ji konstatním objemovým průtokem na rozpálenou plotýnku dvouplotýnky. Jaký musel být objemový průtok, aby teplota klesla na přijatelných 150 °C? Velikost povrchu varné plotýnky je 0,1 m^2 a vzhledem k její bohaté historii ji můžete považovat za absolutně černé těleso.

Speciální kapalina má konstantní měrnou tepelnou kapacitu a hustotu napříč širokým rozsahem teplot, které jsou rovny měrné teplené kapacitě a hustotě vody při pokojové teplotě. Taktéž stejně jako voda vře při teplotě 100 °C *a má také stejné měrné skupenské teplo vypařování.*

34 Kubko veze v autě vzácný náklad - svatební dort ve tvaru rotačního paraboloidu o výšce H a poloměru podstavy R. Musí proto řídit extrémně opatrně. V momentě, kdy přijíždí ke křižovatce, mu na semaforu naskočí červená, a musí proto dupnout na brzdu. S jakým největším zpomalením může Kubko brzdit, aby se dort nepřevrhl?

Efekty způsobené ryvem neuvažujte.

35 Po dlouhém a pestrém životě naše Slunce zemře. Proces umírání vypadá tak, že ze svého povrchu odhodí vrstvu hmoty do volného prostoru za působení radiálních sil.

Uvažujte, že Slunce je koule s rotační periodou 28 dní skládající se z homogenního jádra a taktéž homogenní obálky. Poměr hmotností jádra a obálky je 1 : 1 a poměr jejich hustot je 63 : 1. Slunce při umírání odhodí celou svoji obálku a jádro zkolabuje do bílého trpaslíka – homogenní koule s poloměrem 5000 km.

Jaká bude rotační perioda vzniklého bílého trpaslíka?

36 Tok slunečních neutrin skrz Zem dosahuje asi $10^{15}\ \mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}}$. Dušan postavil obrovský detektor ve tvaru kostky s objemem 1000 $\mathrm{m^3}$, naplnil ho vodou a zjistil, že se mu v něm zachytí průměrně jedno neutrino za sekundu.

Jaká je střední volná dráha neutrina ve vodě?

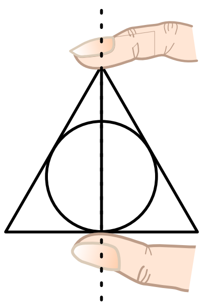
37 FKSáci se po letošní olympiádě dali na výrobu vzduchových pistolí. Vystřelovací mechanismus navrhli tak, že válec s objemem $V = 100\ \mathrm{cm^3}$ naplněný vzduchem o atmosférickém tlaku je uzavřený pístem s hmotností $M = 1$ g. Před výstřelem se vystřelovací mechanismus stlačí na objem $\frac{V}{16}$. Následně se před něj umístní náboj s hmotností $m = 2$ g. Stlačením spouště se píst uvolní a vzduch expanduje.

Na testovaní si najali dva střelce, Yusufa a Kim. Yusuf přišel pořádně nažhavený, pistoli nabil, vystřelil a bylo hotovo. FKSáci si ani nestihli všimnout, kdy zamířil. Když přisla druhá testerka, Kim, měli čas na rozdávání. Mezi nabitím a výstřelem si nejprve s chladnou hlavou nastavila klapku na levém oku, aby viděla terč pouze pravým. Následně si ještě před pravé oko umístila clonu s malým otvorem, takže na terč viděla opravdu ostře. Když už byla připravená, vzduch v pístu zcela vychladl. FKSáky teď zajímá, jaký byl podíl rychlostí Yusufovha a Kimino vystřelení náboje.

Práce vykonaná plynem při adiabatickém ději je $W = \frac{p_0 V_0 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$, kde index 0 reprezentuje počáteční stav a 1 konečný. Uvažujte, že vzduch je ideální dvojatomový plyn s $\kappa = 1{,}4$.

38 Sára do třetice vzala svůj přívěsek Relikvií smrti. Uchopila ho mezi palec a ukazováček tak, že Bezová hůlka ležela na spojnici těchto dvou prstů, a roztočila ho. Jak velký je moment setrvačnosti přívěsku okolo této osy?

Sářin přívěsek se geometricky skládá z rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a, jemu vepsané kružnice a jedné jeho výšky. Délková hustota všech jeho částí je λ.

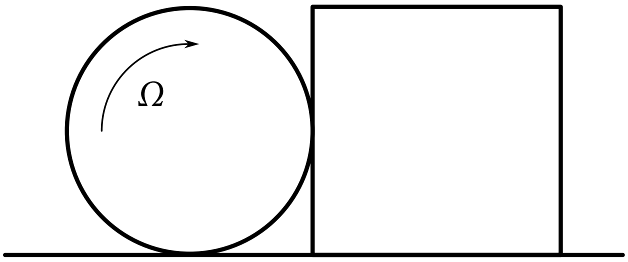


39 Babičce Justýně každé narozeniny zpíváme živijó. Každý rok ho chce slyšet s
takovou hladinou intenzity zvuku (měřenou v decibelech), kolikáté slaví narozeniny, takže jsme se museli snažit stále víc a víc. Minulý rok už jsme nezvládali zpívat dostatečně nahlas, a tak jsme museli požádat o pomoc hlučného souseda, který je schopný zpívat s hladinou intenzity zvuku 100 dB na vzdálenost 1 m.

Tento rok jsme usoudili, že už ani pomoc souseda nebude stačit, takže jsme přesunuli křeslo babičky Justýny o 30 cm blíž k příbuzenstvu. Kolikáté narozeniny letos oslavuje babička Justýna?

40 Kostka Dušan a válec Jaro se zase nepohodli a pustili se do sebe. Bez pěstí a bez nohou jejich souboj probíhal následovně: válec Jaro se roztočí na úhlovou rychlost $\Omega = 23\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a lehne si hned vedle kostky Dušana tak, aby se pohyboval směrem k němu. Kostkový Dušan je v tomto souboji poměrně pasivní, ale zajímalo by ho, na jakou největší rychlost ho Jaro urychlí.

Koeficient tření Dušana o podložku a Dušana o Jara je $f = 0{,}2$ a koeficient tření Jara o podložku je dvakrát větší. Jaro i Dušan jsou viditelně plní, homogenní a oba úplně *asimetričtí* – jejich rozměry (výška, šířka a průměr) jsou asi metr a každý váží asi metrák.



Vzorová řešení

1 Budeme veriť, že ste prešli skrytým IQ testom a pri riešení nekreslili ovocie, ale označili si každé ovocie jedným písmenom, napríklad B – banán, C – citrón, H – hrozno, M – melón a V – višňa. Ozrutnú rovnicu, ktorej riešenie nás zaujíma, vieme po jednoduchých úpravách prepísať na

$$\frac{M(2B)^2}{2V^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{H}} = ?\ \mathrm{Wh}. \tag{1.1}$$

Vďaka rovnici $\frac{B}{V^2} = H$ vieme menovateľ upraviť. Následne vynásobíme ešte jednotkou v tvare $\frac{BC}{BC}$, čím dostávame

$$\frac{M(2B)^2}{2V^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{H}} = \frac{4MB^2}{\frac{3B}{2H}} = \frac{8}{3}MBH = \frac{8}{3}\frac{C}{B}\frac{MB^2H}{C}. \tag{1.2}$$

Môžeme si všimnúť, že posledný zlomok je podľa jednej z rovníc rovný 1 a podľa ďalšej rovnice $\frac{C}{B} = 2{,}7\ \mathrm{kJ}$. To znamená, že ozrutný zlomok je rovný 7,2 kJ. Keď to chceme premeniť na Wh, stačí si uvedomiť, že 1 Wh = 3600 J. Teraz už vieme premeniť náš výsledok do požadovaných jednotiek a dostávame 2 Wh.

Pevne veríme, že od dnešného dňa už nebudete nadávať na písmenká v rovniciach.

2 Obaja pretekári jazdia rovnakou konštantnou rýchlosťou, a teda v každom čase majú prejdenú rovnakú vzdialenosť. Ak Paťo prešiel n okruhov, prešiel vzdialenosť $n \cdot 100$ m. Chceme, aby Jožko prešiel o kolo menej, a preto v tom istom momente mal prejdenú vzdialenosť $(n-1) \cdot 120$ m. Z rovnosti týchto vzdialeností máme rovnicu

$$n \cdot 100\ \mathrm{m} = (n-1) \cdot 120\ \mathrm{m}, \tag{2.1}$$

odkiaľ vyjadríme $n = 6$.

3 Čo sa s Kvíkovou kávou stane? Začne odovzdávať teplo hliníkovej nádobe, ktorá sa tým začne zohrievať. Výmena tepla prestane, keď káva bude mať rovnakú teplotu ako nádoba, pričom teplo odovzdané kávou sa rovná teplu prijatému nádobou.

Objem vnútornej nádoby je

$$V = \pi r^2 h \doteq 905\ \mathrm{ml}, \tag{3.1}$$

kde r je polomer podstavy a h je výška valcovej nádoby. Káva s hustotou vody v nádobe má teda hmotnosť $m_k = V\rho_{\mathrm{H_2O}} \doteq 905$ g, pričom má hmotnostnú tepelnú kapacitu $c_{\mathrm{H_2O}}$, a jej teplota klesla z T_k na nejakú teplotu T.

Potom tu máme hliníkovú nádobu – valec, ktorého hmotnosť je

$$m_{\mathrm{Al}} = (2\pi r^2 + 2\pi r h)\,\Delta h \rho_{\mathrm{Al}} \doteq 75\ \mathrm{g}, \tag{3.2}$$

kde Δh je hrúbka steny a ρ_{Al} je hustota hliníka. Vnútorná nádoba s hmotnostnou tepelnou kapacitou c_{Al} sa zohriala z pôvodnej T_{Al} na nejakú T, rovnakú ako káva. Kalorimetrická rovnica teda je

$$m_k c_{\mathrm{H_2O}}(T_k - T) = m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}(T - T_{\mathrm{Al}}), \tag{3.3}$$

odkiaľ ľahko vyjadríme novú teplotu kávy

$$T = \frac{m_k c_{\mathrm{H_2O}} T_k + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}} T_{\mathrm{Al}}}{m_k c_{\mathrm{H_2O}} + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}}. \tag{3.4}$$

Káva sa teda ochladila o $T_k - T \doteq 1{,}3\ °\mathrm{C}$.

$\boxed{4}$ Ak chceme premieňať jednotky, napríklad z metrov na kilometre, spravíme to tak, že hodnotu vynásobíme vhodnou jednotkou v tvare

$$1 = \frac{1\ \text{nová jednotka}}{x\ \text{starých jednotiek}}. \tag{4.1}$$

Napríklad 563 m premeníme na kilometre tak, že si napíšeme

$$563\ \mathrm{m} = 563\ \mathrm{m} \cdot \underbrace{\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}}_{1} = \frac{563}{1000}\ \mathrm{km} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} = 0{,}563\ \mathrm{km}. \tag{4.2}$$

Rovnakým spôsobom postupujeme aj pri premene $\mathrm{m/s^2}$ na $\mathrm{km/h^2}$. Keďže $1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$, vhodné jednotky na násobenie sú $\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}$ a $\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}$.

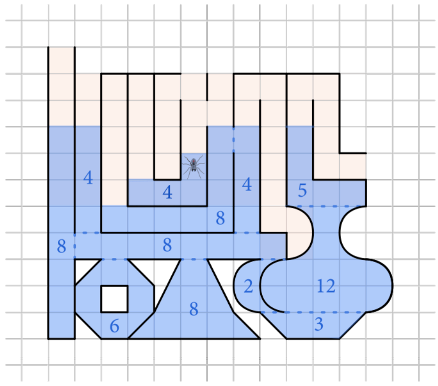
Celý výpočet by teda vyzeral takto:

$$2\ \mathrm{m/s^2} = 2\ \mathrm{m/s^2} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3600^2}{1000} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{s^2}}}{\cancel{\mathrm{s^2}}} \cdot \mathrm{km/h^2} = 25\,920\ \mathrm{km/h^2}. \tag{4.3}$$

$\boxed{5}$ Pri tom, ako voda nateká do podivuhodného skleneného výrobku, dodržiava isté pravidlá:

1. Vždy, ak môže natiecť niekam nižšie, kde ešte voda nie je, natečie tam.
2. Preto sa voľná hladina všade drží v rovnakej výške, ak jej v tom niečo nebráni.
3. Na začiatku je všade vzduch, takže ak má niekam voda natiecť, musí tam byť otvor, ktorým vzduch ujde. Ak tam otvor nie je, vzduch ďalšej vode zabráni natiecť.

Postupne, keď budeme dolievať vodu a riadiť sa týmito pravidlami, dospejeme k zaplneniu ako na obrázku 5.1.



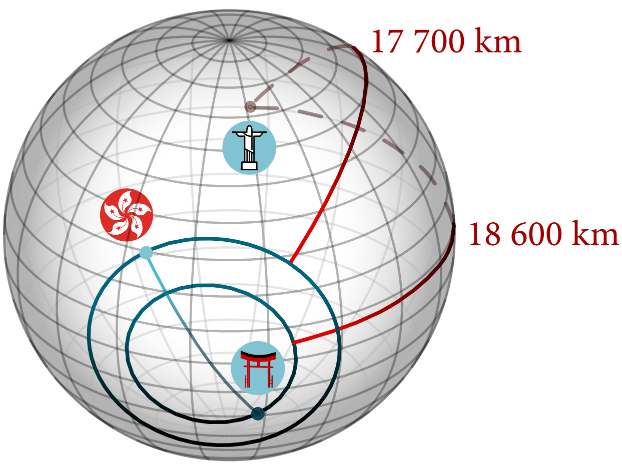
Obrázek 5.1: *Náčrt, ako sa voda rozmiestni po nádobe*

Ostáva nám už len zrátať objem natečenej vody. Ak si uvedomíme, že zrezané časti majú objem 1 l alebo 0,5 l a oblúkové časti sa navzájom doplnia na celé štvorčeky, objem natečenej vody jednoducho určíme ako 72 l.

6 Skúsme úlohu najprv vyriešiť v rovine. Okolo Ria nakreslíme dve kružnice s polomermi 17 700 km a 18 600 km a hľadáme na nich dvojicu bodov, ktorých vzájomná vzdialenosť je maximálna. To nastane vtedy, keď sú body vo vzájomne opačných smeroch, a teda ich vzdialenosť je daná jednoducho súčtom vzdialeností od Ria, čiže 36 300 km.

Na guľatej Zemi to vyzerá rovnako, akurát platí, že žiadne dva body nemôžu byť od seba ďalej, než je polovica jej obvodu, čiže 20 000 km – v takom prípade už totiž bude kratšia cesta viesť opačným smerom. Kratšia vzdialenosť medzi mestami je potom iba 40 000 km − 36 300 km = 3700 km.

Alebo si môžeme uvedomiť, že pre všetky body vo vzdialenosti x od Ria platí, že sú vo vzdialenosti $\pi R - x$ od antipodálneho bodu (presne na opačnej strane Zeme). Nachádzajú sa teda na kružnici s takýmto polomerom, a my potrebujeme nájsť dvojicu najvzdialenejších bodov na kružniciach so spoločným stredom a polomermi 1400 km a 2300 km, čo je opäť 3700 km.



Obrázek 6.1: *Náčrt možných miest, kde sa podľa zadania úlohy môžu nachádzať Tokio (torii) a Hongkong (kvietok). Rio (socha Krista) sa v náčrte nachádza presne na opačnej strane zemegule.*

7 Označme si dĺžku trate $L = 300$ m a Tömášovo, resp. Maťkovo zrýchlenie $a_\mathrm{T} = 8$ m/s, resp. $a_\mathrm{M} = 9$ m/s. Čas t_T, ktorý trvalo Tömášovi dôjsť do cieľa, vieme spočítať z rovnice pre rovnomerne zrýchlený pohyb

$$L = \frac{1}{2} a_\mathrm{T} t_T^2, \tag{7.1}$$

z čoho vieme hneď vyjadriť

$$t_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2L}{a_\mathrm{T}}}. \tag{7.2}$$

Analogicky vieme vypočítať aj čas t_M, ktorý trvalo Maťkovi dôjsť do cieľa ako

$$t_M = \sqrt{\frac{2L}{a_M}} \tag{7.3}$$

K tomuto času nám stačí pripočítať $\Delta t = 1$ s, a môžeme porovnať časy v ktorých do cieľa došli Tömáš a Maťko. Po dosadení zadaných hodnôt vyjde

$$(t_M + \Delta t) - t_T = 0{,}505 \text{ s}, \tag{7.4}$$

čiže do cieľa príde prvý Tömáš, a to o 0,505 s.

8 Čísla sú mocniny dvojky, takže musíme rozhodnúť o pravdivosti všetkých tvrdení.

Hadica (1)

Platí rovnica kontinuity: čo niekam natečie, musí aj vytiecť. Objemový prietok je konštantný, a teda menší prierez znamená väčšiu rýchlosť. Výrok je **nepravdivý**.

Sila pôsobiaca na hladinu uzavretej nádoby (2)

Pascalov zákon by nám mohol niečo podobné napovedať. Lenže okrem tlaku spôsobeného našou silou je tu i tiaž kvapaliny a tlak, ktorý táto spôsobuje, sa nazýva tlakom hydrostatickým – ten je však v rôznych hĺbkach rôzny, takže výrok je **nepravdivý**.

Teleso na hladine (4)

Výrok je **nepravdivý**, či už si spomenieme na ihlu plávajúcu na hladine vďaka povrchovému napätiu, alebo na plávajúcu železnú loď.

Ortuť v odmernom valci (8)

Tlak na dne valca je tlakom hydrostatickým, ktorý závisí od toho, ako hlboko je toto dno pod hladinou. Naklonením valca sa jeho vodorovný prierez zväčší a teda výška hladiny zmenší. Zmenší sa teda i hydrostatický tlak a výrok je **pravdivý**.

Plávajúca ľadová kocka (16)

Ponorená časť ľadovej kocky zaberala taký objem, ako voda s rovnakou hmotnosťou – teda keď sa kocka roztopila, zabrala novovzniknutá voda len to miesto, ktoré zaberala ľadová kocka pod hladinu. Tvrdenie je **nepravdivé**.[1]

Vyparovanie (32)

Výrok je **nepravdivý** – aj pri nižšej teplote molekuly s najvyššou energiou z povrchu kvapaliny veselo unikajú. Pri dosiahnutí teploty varu sa kvapalina odparuje z celého objemu.

Dve telesá (64)

Aj keď má polystyrén omnoho menšiu hustotu ako drevo, môžu vedľa seba plávať veľké brvno a jedna guľôčka polystyrénu – a to je v priamom rozpore s vetou žadaní, takže je **nepravdivá**.

Sčítaním čísel pravdivých výrokov dostávame odpoveď 8.

9 Ak lúč svetla dopadá na optické rozhranie, láme sa podľa Snellovho zákona. Náš lúč dopadá pod uhlom 45° a prechádza z optického prostredia s indexom lomu 1 (vzduch) do optického prostredia s indexom lomu n (voda). Preto platí

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha} = n. \tag{9.1}$$

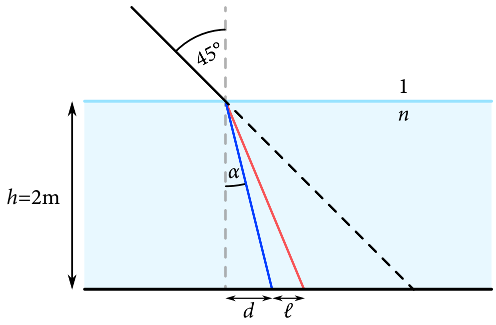
Ak nazrieme na pravouhlý trojuholník medzi lúčom, kolmicou na rozhranie v mieste dopadu (ďalej len kolmica) a dnom bazéna pomocou Pytagorovej vety, zistíme, že dráha, ktorú lúč prejde vo vode je $\sqrt{d^2 + h^2}$, kde h je hĺbka bazéna a d je vzdialenosť bodu na dne, do ktorého dopadne lomený lúč od kolmice. Pre uhol α teda vieme písať

$$\sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}, \tag{9.2}$$

Po dosadení do predchádzajúcej rovnice a následnej úprave dostávame

$$d = \frac{h}{\sqrt{2n^2 - 1}}. \tag{9.3}$$

[1] Ak by niekto uvažoval, že v dôsledku roztopenia ľadu klesla teplota vody a v dôsledku teplotnej rozťažnosti aj jej objem, dospel by k záveru, že by hladina dokonca klesla.



Obrázek 9.1: *Krajné lúče dopadajúce na dno bazéna*

Jednotlivé farebné zložky svetla sa od seba líšia (okrem iného) indexom lomu. Po dopade na rozhranie sa preto každá zložka láme mierne inak. Zo zadania vieme, že index lomu vody pre jednotlivé zložky viditeľného svetla leží v nejakom rozpätí – označme krajné hodnoty $n_{\min}$ a $n_{\max}$. Každej z nich bude zodpovedať iné d. Ich rozdiel bude zodpovedať hľadanej dĺžke svetelnej stopy na dne

$$\ell = \left| \frac{h}{\sqrt{2n_{\min}^2 - 1}} - \frac{h}{\sqrt{2n_{\max}^2 - 1}} \right|. \tag{9.4}$$

Pre hodnoty zo zadania $\ell \approx 13$ mm.

10 V nádrži je $m_ľ = 1$ kg ľadu s hustotou $\rho_ľ = 916\ \mathrm{kg/m^3}$, čiže jeho objem je $V_ľ = m_ľ/\rho_ľ \doteq 1{,}092$ l.

Ak celý objem nádrže označíme V, nemrznúca zmes zaberá objem $V_z = V - V_ľ \doteq 0{,}908$ l, a preto je jej hmotnosť $m_z = (V - V_ľ)\rho_z \doteq 0{,}727$ kg. Nová teplota tuhnutia je vážený priemer podľa hmotnosti konštituentov, teda

$$T = \frac{m_ľ T_ľ + m_z T_z}{m_ľ + m_z}, \tag{10.1}$$

kde $T_ľ$, T_z je teplota tuhnutia vody, respektíve nemrznúcej zmesi.

Pre hodnoty zo zadania to je $T \doteq -8{,}4$ °C.

11 Nech z jablka odhryzne malý kúsok ryba alebo Adam, vztlaková sila vždy spôsobí, že sa jablko ustáli v takej novej polohe, aby bola nad hladinou opäť práve taká časť jablka ako pred odhryznutím, čiže v našom prípade jedna tretina. Preto majú obaja vždy čo hrýzť bez ohľadu na to, koľko z jablka ešte ostalo. No a keďže obaja jedia celý čas a dojedia naraz, pomer veľkostí zjedených častí je určený iba pomerom rýchlostí jedenia. Odpoveď je teda $\frac{3}{4}$.

12 Povedzme, že Jaro ide rýchlosťou v_0. Počas brzdenia na rovine spomaľuje rovnomerne so spomalením a, čiže jeho rýchlosť $v(t)$ sa v čase mení ako

$$v(t) = v_0 - at. \tag{12.1}$$

Vidíme, že $v(t) = 0$ nastane, ak čas je $t = v_0/a$, čo je čas potrebný na zastavenie. Prejdená dráha je potom

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2, \tag{12.2}$$

čo znamená, že za čas $t = v_0/a$, teda pred zastavením na rovine, Jaro prešiel

$$s = \frac{1}{2} a t^2, \tag{12.3}$$

odkiaľ ľahko vyjadríme, že Jaro vie brzdiť so spomalením

$$a = \frac{2s}{t^2}. \tag{12.4}$$

Z jednoduchej trigonometrie vieme, že ak Jaro ide dole kopcom po naklonenej rovine so sklonom α, je urýchľovaný zrýchlením $g \sin \alpha$. Ak je veľkosť tohto zrýchlenia rovnaká ako veľkosť Jarovho spomalenia, nikdy nezastaví, čiže sklon kopca α vyjaríme ako

$$\frac{2s}{t^2} = g \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \frac{2s}{g t^2}. \tag{12.5}$$

13 Aj keď je obvod podivuhodný, Ohmov zákon musí platiť. V tomto prípade však elektrický odpor v obvode závisí od toho, aký prúd ukáže ampérmeter. Konkrétne ak ampérmeter ukáže prúd k ampérov, má odpor $4k\ \Omega$. Z Ohmovho zákona $U = RI$ dostávame

$$9\ \mathrm{V} = 4k\ \Omega \cdot k\ \mathrm{A}, \tag{13.1}$$

z čoho dostávame

$$k = \frac{3}{2}. \tag{13.2}$$

Po ustálení teda ampérmeter ukáže $\frac{3}{2}$ A.

14 Keďže poznáme uhlovú rýchlosť otáčania platne[2], vieme hneď určiť, že za 20 minút vykoná $20 \cdot 33⅓ = 666⅔$ otáčok. Za túto dobu teda prejde ihla celou dĺžkou jeho drážky. Z toho vyplýva, že drážka okolo stredu disku vytvorí dokopy 666⅔ drážok. Keďže priemer disku je 30 cm a drážka končí 5 cm od jeho stredu, časť disku s drážkou je široká 15 cm − 5 cm = 10 cm, takže vzdialenosť medzi dvomi ovinmi drážky je približne

$$w \approx \frac{10\ \mathrm{cm}}{666⅔} = \frac{3}{20}\ \mathrm{mm} = 0{,}15\ \mathrm{mm}. \tag{14.1}$$

Plochu pokrytú drážkou S spočítame jednoducho ako rozdiel plochy celého disku a diery v strede,

$$S \approx \pi\left((15\ \mathrm{cm})^2 - (5\ \mathrm{cm})^2\right) = 200\pi\ \mathrm{cm}^2. \tag{14.2}$$

[2] Mlčky dúfame, že Patrikov disk bola naozaj gramofónová platňa.

Nakoniec si drážku rozvinieme do tvaru veľmi dlhého obdĺžnika. Ak poznáme plochu a šírku, druhý rozmer, čiže jej dĺžku ℓ vieme určiť ako ich podiel

$$\ell \approx \frac{S}{w} = \frac{200\pi \text{ cm}^2}{0{,}15 \text{ mm}} \approx 418{,}88 \text{ m} \doteq 419 \text{ m}. \tag{14.3}$$

15 Rýchlosť skokana počas jeho skoku si môžeme rozložiť na vodorovnú a zvislú zložku. Vodorovná zložka nie je zaujímavá, pretože sa počas celého pohybu nemení. Stačí nám teda modelovať celú situáciu ako zvislý vrh. Počiatočnú rýchlosť skokana označme v_0. Jedinou pôsobiacou silou je konštantná tiažová a teda skokan padá so zrýchlením g, takže jeho rýchlosť bude lineárnou funkciou času.

Na začiatku mal skokan rýchlosť v_0 a v momente, keď prelietal úrovňou mostíka smerom nadol, mal rýchlosť $-v_0$. Rozdiel v týchto rýchlostiach je teda $2v_0$ a čas, ktorý skokan strávil nad úrovňou mostíka potom bude $\frac{2v_0}{g}$. Toto má byť polovica celkovej doby letu T, teda

$$T = \frac{4v_0}{g}. \tag{15.1}$$

Teraz si ešte vyjadríme počiatočnú rýchlosť v_0 v závislosti od výšky mostíka $h = 10$ m. Začnime od momentu, keď skokan prelieta úrovňou mostíka smerom nadol. Vtedy pre jeho rovnomerne zrýchlený pohyb nadol platí

$$h = v_0\frac{T}{2} + \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2. \tag{15.2}$$

Nakoniec z rovnice 15.1 vyjadríme v_0 a dosadíme do rovnice 15.2. Tým sa to zjednoduší na

$$h = \frac{gT^2}{4}, \tag{15.3}$$

z čoho jednoducho vyjadríme

$$T = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \approx 2 \text{ s}. \tag{15.4}$$

16 Ako prvé si rozmyslime, ako vyzerá geometria náhrdelníka. Zvislá úsečka (bazový prútik) tvorí ťažnicu, výšku a aj os uhla rovnostranného trojuholníka (plášť neviditeľnosti). Jej dĺžku vieme z Pytagorovej vety vypočítať ako $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Keďže ide o rovnostranný trojuholník, všetky ostatné ťažnice budú zároveň aj osi uhlov. Vďaka tomu vieme, že ťažisko trojuholníka bude splývať so stredom vpísanej kružnice (kameňa vzkriesenia). Jeho polomer bude zároveň aj jedna tretina dĺžky ťažnice, t. j. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Vďaka symetrii celej úlohy vieme, že ťažisko útvaru sa bude nachádzať na úsečke. Polohu ťažiska vieme potom vypočítať ako priemer vzdialeností jednotlivých ťažísk vážených ich hmotnosťou. Stačí nám teda vypočítať vertikálnu polohu ťažiska. Za počiatok, od ktorého meriame vzdialenosť, si kvôli jednoduchosti môžeme zvoliť bod, od ktorého nás zaujíma vzdialenosť ťažiska. Keďže hmotnosť je priamo úmerná dĺžke drôtu, vzdialenosť ťažiska od vrcholu trojuholníka bude

$$x = \frac{m_\triangle x_\triangle + m_\circ x_\circ + m_| x_|}{m_\triangle + m_\circ + m_|} = \frac{3a\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\pi a}{\sqrt{3}}\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4}}{3a + \frac{\pi a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3}a \doteq 0{,}555a. \tag{16.1}$$

17 Rýchlosť vystrelenia projektilu zistíme zo zákona zachovania energie. Na začiatku sa obe hmotné telesá nachádzajú vo výške L nad zemou a sú nehybné. Ich celková mechanická energia na začiatku E_1 sa teda skladá len z potenciálnej, ktorú si môžeme zvoliť ľubovoľnú, napríklad voči zemi

$$E_0 = MgL + mgL. \tag{17.1}$$

V čase, keď je lata zvislo, sa obe telesá hýbu rýchlosťou v, ale závažie je na zemi a projektil je vo výške $2L$, teda celková mechanická energia je

$$E_1 = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{17.2}$$

Keďže sa mechanická energia zachováva, platí $E_0 = E_1$, teda

$$MgL + mgL = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2, \tag{17.3}$$

odkiaľ vyjadríme rýchlosť vystrelenia projektilu

$$v = \sqrt{2gL\frac{M-m}{M+m}}. \tag{17.4}$$

Táto rýchlosť má vodorovný smer.

Odteraz sa projektil hýbe po parabole, pretože v zvislom smere je urýchľovaný tiažovým zrýchlením. My chceme vedieť, aký čas t mu potrvá prejsť zvislú vzdialenosť $2L$, aby spadol na zem. Bude to jednoducho

$$\frac{1}{2}gt^2 = 2L \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{4L}{g}}. \tag{17.5}$$

Vo vodorovnom smere sa projektil hýbe konštantnou rýchlosťou v a teda za čas t prejde vzdialenosť

$$s = vt = 2\sqrt{2\frac{M-m}{M+m}}L. \tag{17.6}$$

18 Predpokladajme, že všetci vodiči vyrazili z Košíc o 10:00 – bude sa nám jednoduchšie počítať.

Označme si jednotlivé pruhy od najpomalšieho A, B, C a D a počty áut, ktoré za minútu vyrážajú z Košíc v každom z nich a, b, c a d. Najprv si vypočítame, ako dlho trvá cesta v každom z pruhov: je to postupne 5, 4, 3⅓ a 2,5 hodiny.

Arthur v pruhu B do Bratislavy dorazil o 14:00. V najpomalšom pruhu vtedy do Bratislavy akurát prichádzali autá, ktoré z Košíc vyrazili o 09:00. Arthur teda predbehol všetky autá v pruhu A, ktoré z Košíc vyrazili medzi 09:00 a 10:00, čo je spolu $60a$ áut.

Koľko áut predbehol Peter, najrýchlejší vodič? Ak dorazil do Bratislavy o 12:30, musel predbehnúť všetky autá v pruhu C, ktoré vyrazili z Košíc medzi 9:10 a 10:00, čiže $50c$ áut. Podľa zadania ale musí byť $50c = 200$.

Ak spravíme podobnú úvahu pre oboch vodičov, zistíme, že zadanie nám hovorí nasledovné informácie:

$$\begin{aligned} 50c &= 200, \\ 150a + 90b + 50c &= 620, \\ 100a + 40b &= 220. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Odtiaľ vieme poľahky vyjadriť $a = 1$, takže tým pádom $60a = 60$ a Arthur teda cestou predbehol 60 áut.

19 Dve z jednotiek, *konská dĺžka* a *konská dávka*, vieme do sústavy SI premeniť priamo, keďže ich fyzikálny rozmer je rovno meter, resp. prevrátená sekunda:

- *konská dĺžka* ζ je 8 ft $\doteq$ 2,438 m a
- *konská dávka* δ je $\frac{1{,}7\ \mathrm{kg}}{100\ \mathrm{kg}\cdot 1\ \mathrm{d}}$, čiže asi $1{,}97 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$.

Konská sila je napriek svojmu názvu jednotkou výkonu, a teda jej rozmer musí byť rovnaký, ako má watt. Keď si do definície dosadíme hodnoty, zistíme, že jedna *konská sila* ψ zodpovedá 735,5 W[3] a fyzikálny rozmer jednotky výkonu v základných jednotkách je

$$\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m/s} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s^3}. \tag{19.1}$$

Aby sme z tohto získali konskú jednotku hmotnosti, zjavne stačí výkon predeliť druhou mocninou jednotky dĺžky a treťou mocninou jednotky prevráteného času. Teda

$$1\ \text{konská hmotnosť} = \frac{\psi}{\zeta^2 \delta^3} \doteq \frac{735{,}5\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}}{(2{,}438\ \mathrm{m})^2 \cdot (1{,}97 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1})^3} \doteq 1{,}624 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}. \tag{19.2}$$

20 Nech už Vladko behá po eskalátore akokoľvek, musia platiť dve obmedzenia:

- celkový čas jeho pobehovania musí byť rovný času, ktorý na eskalátore strávi Katka;
- nakoniec skončí pri Katke, takže celkový počet schodov prebehnutých nahor aj nadol musí byť rovnaký.

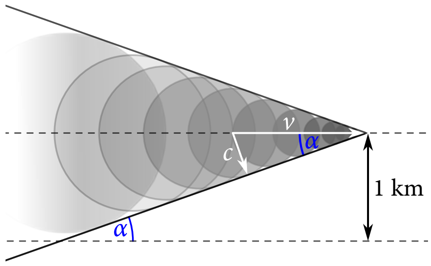
Keďže nahor beží len tretinovou rýchlosťou oproti behu nadol, pomer časov strávených behom jednotlivými smermi musí byť opačný, teda $6 : 2 = 45 : 15$. To teda znamená, že zo 60 sekúnd, ktoré na eskalátore bude stáť Katka, Vladko strávi 45 s behom nahor a 15 s behom nadol.

Celková prebehnutá vzdialenosť teda bude

$$45\ \mathrm{s} \cdot 2\ \text{schody/s} + 15\ \mathrm{s} \cdot 6\ \text{schodov/s} = 180\ \text{schodov}. \tag{20.1}$$

21 Zvuk sa v každom momente šíri od lietadla všetkými smermi rýchlosťou zvuku c voči atmosfére. Keďže sa lietadlo navyše pohybuje rýchlosťou v vyššou ako c, obálka vznikajúcich zvukových vĺn (rázová vlna) má tvar kužeľa v smere letu lietadla s vrcholovým uhlom 2α, pre ktorý platí $\sin\alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{3}$. Vrchol tohto kužeľa sa teda hýbe v smere letu lietadla (spolu s lietadlom) rýchlosťou v a jeho plášť sa šíri v smere normály rýchlosťou zvuku.

[3] Alebo 750 W, ak použijeme $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



Obrázek 21.1: *Rázová vlna od Marcelovho lietadla*

Ak by Sabinka so svojím lietadlom stála na mieste, zvuková obálka od Marcelovho lietadla by sa k nej dostala, až keď by bol Marcel vo vzdialenosti

$$1\,\mathrm{km}\cdot\cot\alpha = 1\,\mathrm{km}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{km} \tag{21.1}$$

od bodu ich maximálneho priblíženia. Keďže sa ale Sabinka hýbe rýchlosťou v v opačnom smere, obaja sa stihnú dostať iba do polovičnej vzdialenosti $\sqrt{2}$ km. Túto vzdialenosť prejde Marcel za čas

$$\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/s}} = \sqrt{2}\,\mathrm{s}. \tag{21.2}$$

22 Ak prázdny balón s mladomanželmi váži M a vodík v ňom váži m_H, dokopy bude na nafúknutý balón pôsobiť gravitačná sila $(M+m_\mathrm{H})g$. Aby sa balón vznášal, musí naň pôsobiť vztlaková sila $V\rho_\mathrm{a}g$, kde V je objem balóna a ρ_a je hustota vzduchu[4]. Rovnica pre rovnosť síl je

$$(M+m_\mathrm{H})g = V\rho_\mathrm{a}g, \tag{22.1}$$

z ktorej po dosadení $V=\frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}$, kde ρ_H je hustota vodíka, dostaneme

$$M+m_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}\rho_\mathrm{a}, \tag{22.2}$$

a odtiaľ vyjadríme hmotnosť vodíka

$$m_\mathrm{H} = \frac{M}{\frac{\rho_\mathrm{a}}{\rho_\mathrm{H}}-1}. \tag{22.3}$$

Teraz si môžeme nájsť hustotu vodíka pri bežných podmienkach $\rho_\mathrm{H} = 0{,}09\,\mathrm{kg/m^3}$ alebo využiť znalosť, že pri štandardných podmienkach má mól ľubovoľného ideálneho plynu objem 22,4 l, čiže má molárny objem $V_\mathrm{m} = 22{,}4\,\mathrm{l/mol}$. Preto hustota vodíka je

$$\rho_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{H}}{V} = \frac{m_\mathrm{H}}{nV_\mathrm{m}} = \frac{M_\mathrm{H}}{V_\mathrm{m}}, \tag{22.4}$$

[4]Predpokladáme, že objem mladomanželov je voči tomuto objemu zanedbateľný.

kde $M_\mathrm{H} = 2\ \mathrm{g/mol}$ je molárna hmotnosť molekulárneho vodíka. Rovnica 22.3 potom prejde na

$$m_\mathrm{H} = \frac{M}{\frac{\rho_\mathrm{a} V_\mathrm{m}}{M_\mathrm{H}} - 1} \doteq 73{,}7\ \mathrm{kg}, \tag{22.5}$$

a preto látkové množstvo vodíka je

$$n_\mathrm{H} = \frac{M}{\rho_\mathrm{a} V_\mathrm{m} - M_\mathrm{H}} \doteq 36{,}9\ \mathrm{kmol}. \tag{22.6}$$

Tento vodík bol vyrobený elektrolyticky. Mladomanželia ho pália, čo je proces opačný k elektrolýze. Preto ak spálením mólu vodíka získame energiu H, na jeho výrobu taktiež treba v ideálnom svete energiu H. Avšak mladomanželia v takom svete nežijú a ich elektrolýza má účinnosť η, čiže na získanie mólu vodíka treba až $\frac{H}{\eta}$ energie, a pre n_H to je energia

$$E = \frac{H}{\eta} n_\mathrm{H} = \frac{H}{\eta} \frac{M}{\rho_\mathrm{a} V_\mathrm{m} - M_\mathrm{H}}, \tag{22.7}$$

čo pre hodnoty zo zadania je približne 21 GJ alebo 5855 kWh. Pri mladomanželskej cene elektriny to stojí zhruba 1171 €.

23 Vidíme, že medzi každými dvomi článkami rebríčka máme dokonalý vodič. Rebrík teda vieme rozdeliť na sériové zapojenie 99 paralelných obvodov, ktorého celkový odpor by sme už mali vedieť algoritmicky spočítať. Odpor n-tého článku rebríka spočítame ako odpor paralelného zapojenia dvoch rezistorov,

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ \Omega \parallel \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ \Omega = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\ \Omega} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ \Omega}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\ \Omega. \tag{23.1}$$

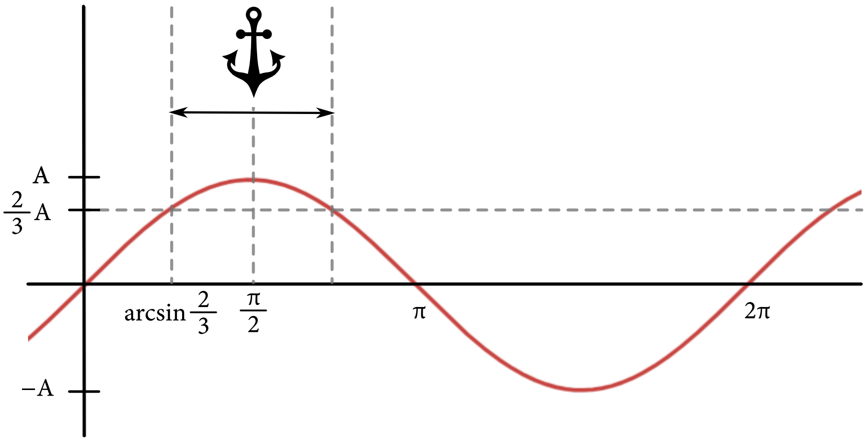
Teraz vieme zapojenie zredukovať na 99 sériovo zapojených rezistorov a ostáva nám sčítať ich odpory. To nevyzerá jednoducho… našťastie asi jediná rozumná vec, ktorú vieme spraviť, je rozšíriť každú hodnotu vhodným výrazom, aby sme eliminovali odmocniny v menovateli:

$$R = \sum_{n=1}^{99} R_n = \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right) \Omega = \sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \Omega. \tag{23.2}$$

V tomto už ľahko identifikujeme takzvaný *teleskopický rad*: okrem posledného kladného a prvého záporného polčlena sa v ňom všetko navzájom pohluší a my dostaneme výsledok

$$\sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \Omega = \left(\sqrt{100} - \cancel{\sqrt{99}} + \cancel{\sqrt{99}} - \sqrt{98} + \ldots - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1} \right) \Omega = 10\ \Omega - 1\ \Omega = 9\ \Omega. \tag{23.3}$$

24 Výška morskej hladiny v čase sa bude správať ako škálovaný sínus, takže si jeden nakreslíme. Perióda bude zjavne nie 2π ale 12 h. Zadanie sa pýta, pre akú časť hodnôt argumentu funkcie (vodorovnej osi) je hodnota vyššia ako $\frac{2}{3}A$. A toto vôbec nebude závisieť od toho, či je perióda funkcie 2π alebo 12 h – pre jednoduchosť si teda nakreslime taký s periódou 2π.



Obrázek 24.1: *Priebeh výšky morskej hladiny s vyznačeným časom vhodným na zakotvenie*

Z obrázku je zrejmé, že nás bude zaujímať, v akom čase bude funkcia dosahovať hodnotu $\frac{2}{3}A$. Presne to vieme vypočítať ako $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$.

Aká časť jednej periódy dlhej 2π je medzi $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ a $\frac{\pi}{2}$? Je to

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \tag{24.1}$$

a takéto kúsky sú dva, teda celková pravdepodobnosť je

$$2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \doteq 0{,}267\,72 \doteq 26{,}8\ \%. \tag{24.2}$$

25 Postavme sa do stredu Zeme a označme si uhol medzi miestami α. Vzdialenosť, ktorú nameria Marcel, je $R\alpha$ a vzdialenosť, ktorú nameria Krtko, ľahko spočítame ako podstavu rovnoramenného trojuholníka, konkrétne

$$2R \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{25.1}$$

Tieto dve vzdialenosti sa majú líšiť o $\Delta\ell = 1$ m. Z toho dostávame rovnicu

$$R\alpha = 2R \sin\frac{\alpha}{2} + \Delta\ell. \tag{25.2}$$

Túto rovnicu by sme chceli vyriešiť pre α. To vôbec nie je jednoduché! Ba dokonca až analyticky nemožné! Budeme sa preto musieť uspokojiť s približným riešením, napríklad numericky binárnym vyhľadávaním alebo pomocou Taylorovho rozvoja. Pre funkciu sínus platí

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots. \tag{25.3}$$

Keďže $\Delta\ell$ je malé, môžeme očakávať, že bude malé aj α, vezmeme len prvý netriviálny člen a dostaneme

$$R\alpha = R\alpha - R\frac{\alpha^3}{24} + \Delta\ell, \tag{25.4}$$

odkiaľ úpravou vyjadríme

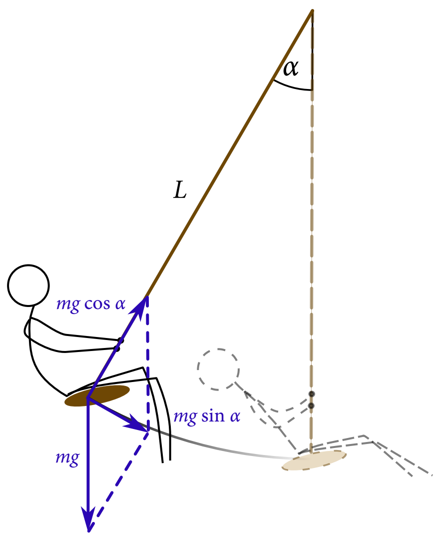
$$R\alpha = R\sqrt[3]{\frac{24\,\Delta\ell}{R}} = \sqrt[3]{24R^2\,\Delta\ell}. \tag{25.5}$$

Toto je presne hľadaná Marcelova vzdialenosť. Po dosadení vyjde 99,2 km.

26 Na Adama pôsobia vždy len dve sily: tiažová, smerujúca vždy nadol s veľkosťou mg, a ťahová od reťaze, ktorej veľkosť sa môže meniť, ale zato smeruje vždy do závesu hojdačky. Preťaženie, ktoré Adam cíti, je v každom okamihu rovné súčtu všetkých kontaktných síl, čo je v našom prípade všetko okrem tiažovej, čiže opäť len ťahová sila od reťaze. Stačí nám teda zistiť, akou silou naňho reťaz pôsobí v najnižšom bode.

V úvrate, teda v najvyššom bode pohybu, sa Adam nehýbe. Aby v tomto bode neostal visieť naveky, musí naňho pôsobiť nejaké zrýchlenie. Keďže Adam je reťazou viazaný na pohyb po časti kružnice, jeho smer je jednoznačne určený a jeho veľkosť je zatiaľ neznáma. Poznáme však preťaženie, čiže silu od reťaze, ktorá smeruje k závesu, a jej veľkosť je $m \cdot 0{,}5\,g$, a tiež tiažovú silu mg.

Keď si pôsobiace sily nakreslíme pre všeobecný uhol výchylky α, z trigonometrie zistíme, že veľkosť dostredivej sily od reťaze je v krajnej polohe $mg\cos\alpha$. Odtiaľ vieme, že v našom prípade musí byť uhol maximálnej výchylky rovný 60°, keďže $\cos 60° = 0{,}5$.



Obrázek 26.1: *Sily pôsobiace na Adama v úvrate*

Teraz vypočítame rýchlosť v najnižšom bode. Tá pochádza z premeny rozdielu potenciálnych energií v najvyššom a najnižšom bode na kinetickú energiu, a o nej vieme, že je rovná

$$\Delta U = mg(L - L\cos 60°) = mg\frac{L}{2}, \tag{26.1}$$

a teda

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL}. \tag{26.2}$$

Nakoniec spočítame ťahovú silu v reťaziach v najnižšom bode. Tá bude dvojakého pôvodu: dostredivá, ktorá spôsobuje, že sa Adam aj tam pohybuje po kružnici, s veľkosťou $\frac{mv^2}{L}$, a navyše reakcia hojdačky na stále prítomnú tiažovú silu mg. Ich súčtom je

$$F = ma = \frac{mv^2}{L} + mg = mg + mg = 2mg \tag{26.3}$$

a teda zdanlivé zrýchlenie pociťované Adamom bude spolu

$$a = \frac{2mg}{m} = 2\,g. \tag{26.4}$$

27 Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie hovorí, že indukované napätie je rovné zápornej časovej zmene magnetického indukčného toku cez slučku. Magnetický indukčný tok vypočítame ako $\Phi = BS\cos\theta$, kde B je veľkosť magnetickej indukcie, ktorá prechádza plochou S, a vstupuje do nej pod uhlom θ.

V našom prípade je S plocha, ktorej obvod tvorí náhrdelník. Ten je zrejme na Katkinom krku, a teda má tvar Katkinho krku, ktorý sa nemení. Veľkosť magnetickej indukcie B sa podľa zadania tiež nemení. A keďže sa Katka točí len okolo osi otáčania kolotoča, ani uhol θ sa nemení.

Toto všetko znamená, že magnetický indukčný tok Katkiným náhrdelníkom sa v čase nemení, a preto sa v ňom neindukuje žiadne napätie, a teda ani prúd.

28 Označme si plochu podstavy bójky S_b, jej hustotu ρ_b a jej objem V_b; ďalej plochu otvoru S_o a dĺžku lanka ℓ. Nech v kritickej situácii voda v nádobe siaha do výšky h. Vtedy je pod hladinou časť bójky vysoká $v = h - \ell$. Sily pôsobiace na bójku musia byť v rovnováhe, teda platí

$$F_G + F = F_{\text{vz}}, \tag{28.1}$$

kde F_G je tiažová sila, F_{vz} je vztlaková sila a F je sila, ktorou pôsobí lanko na bójku. V kritickom prípade je sila od lanka rovná tlakovej sile, ktorou je zátka zatláčaná do otvoru,[5] t. j. $F = p_h S_o$, kde p_h je hydrostatický tlak pri dne. Po vyjadrení všetkých síl dostávame

$$S_b H \rho_b g + h\rho g S_o = S_b(h - \ell)\rho g, \tag{28.2}$$

kde ρ je hustota vody.

Najmenší objem vody, ktorý dokážeme napustiť, zrejme zodpovedá situácii, keď bójku priviažeme čo najtesnejšie ku dnu, teda $\ell \to 0$. V takom prípade dostaneme

$$h = \frac{S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}H \tag{28.3}$$

[5] Ak by bola väčšia, uvoľnilo by to zátku.

a tomu zodpovedajúci objem

$$V_{\min} = (S - S_b)h = \frac{S - S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}V_b. \tag{28.4}$$

Najväčší možný objem vody, ktorý dokážeme odmerkou namerať, zodpovedá situácii, keď zátka povolí práve vtedy, keď voda zaleje bójku až po jej horný okraj, teda keď $h = H + \ell$. To sa stane vtedy, keď je dĺžka lanka

$$\ell = \left(\frac{S_b}{S_o}\frac{\rho - \rho_b}{\rho} - 1\right)H, \tag{28.5}$$

čomu zodpovedá objem

$$V_{\max} = S\ell + (S - S_b)H = \left[\frac{S}{S_o}\left(1 - \frac{\rho_b}{\rho}\right) - 1\right]V_b. \tag{28.6}$$

Podľa zadania $S_o = \frac{S}{4}$ a $S_b = 0{,}99S$. Pre hodnoty zo zadania dostávame minimálny objem $V_{\min} = \frac{1}{148}$ l a maximálny objem $V_{\max} = 1$ l.

$\boxed{\textbf{29}}$ Informácia zo zadania, že pri každom treťom prechode pomalšieho kyvadielka s periódou T_1 krajnou polohou vpravo sa tam stretne s rýchlejším s periódou T_2 (pričom $T_1 > T_2$) nám hovorí, že medzi dvomi takýmito okamihmi vykoná pomalšie kyvadlo tri periódy a rýchlejšie nejaký počet n periód, teda

$$3T_1 = nT_2. \tag{29.1}$$

Druhá informácia o stretávaní v ľavej krajnej polohe nám zase hovorí, že medzi dvomi takými okamihmi vykoná rýchlejšie kyvadlo päť periód a pomalšie nejaký počet m periód, čiže

$$mT_1 = 5T_2. \tag{29.2}$$

Vôbec nezáleží na tom, či sa v zadaní kyvadlá stretávajú vľavo alebo vpravo. Vykonávajú totiž harmonický pohyb a ak sa takto stretávajú vľavo aj vpravo, na oboch stranách sa stretnú po vykonaní piatich, respektíve troch periód. Preto ani nie je dôležité, či Dano na začiatku vychýlil kyvadlá doľava alebo doprava.

Ak vydelíme rovnice 29.1 a 29.2, dostaneme

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad mn = 15. \tag{29.3}$$

Jedným riešením tejto rovnice je $m = 15$, $n = 1$, ale toto riešenie v tejto úlohe nedáva zmysel, lebo ak sa pozrieme do prvého odseku tohto riešenia, vieme, že ak pomalšie kyvadlo spraví tri periódy a rýchlejšie n periód, musí byť $n > 3$. Druhým riešením rovnice 29.3 je $m = 3$, $n = 5$, čo spĺňa našu požiadavku. To znamená, že kyvadlá majú periódy v pomere 3 : 5.

Perióda kyvadla s dĺžkou závesu ℓ je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{29.4}$$

Ak si toto napíšeme pre naše kyvadlá so závesmi dĺžky ℓ_1 a ℓ_2 a dáme to do pomeru, máme

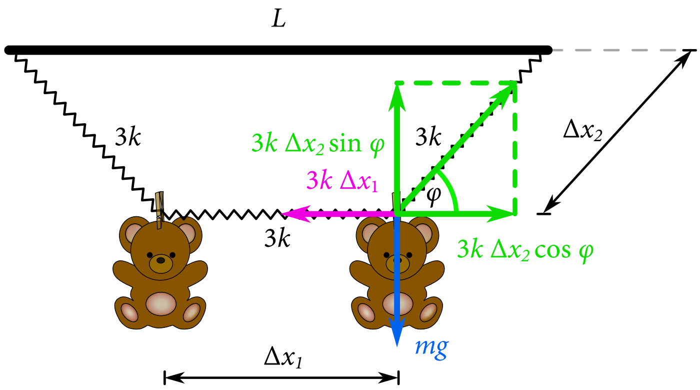
$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}. \tag{29.5}$$

Zo zadania poznáme $\ell_1 = 10$ cm a z rovnice 29.5 vyjadríme

$$\ell_2 = \ell_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \tag{29.6}$$

čo pre pomer $T_2 : T_1 = 3 : 5$ dáva výsledok $\ell_2 = 3{,}6$ cm.

30 Ako prvé si uvedomme, že ak máme pružinu tuhosti k a rozdelíme ju na tri rovnaké kúsky, každý kúsok bude mať tuhosť $3k$. Ak by sme totiž natiahli pôvodnú pružinu silou F, každá jej tretina by sa natiahla o jednu tretinu natiahnutia celej. Zároveň ale na každú tretinu pôsobí rovnaká sila F, z čoho dostávame trojnásobnú tuhosť.



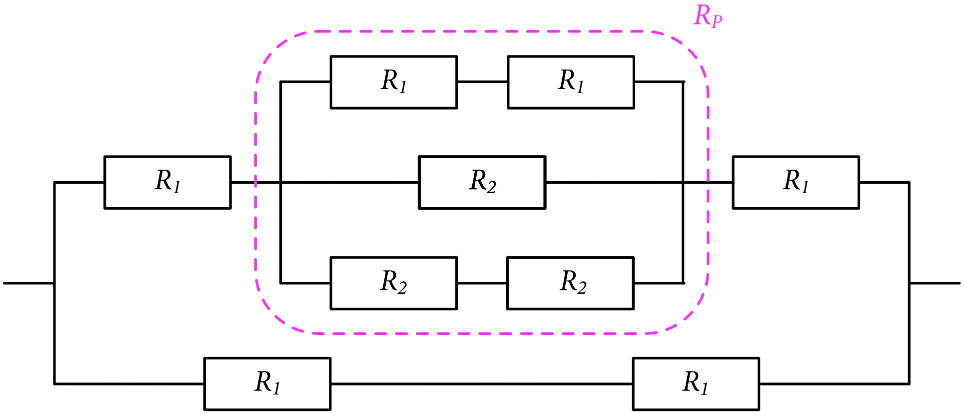
V mieste závesu každého z plyšákov pôsobia dokopy tri sily. Pozrime sa na pravý. Prvá, tiažová, má veľkosť mg a smeruje kolmo dole. Druhá, od pružiny, smeruje priamo doľava k druhému plyšáku a má veľkosť $3k\,\Delta x_1$. Tretia zviera vo všeobecnosti uhol φ s vodorovným smerom a má veľkosť $3k\,\Delta x_2$. Tretiu silu si môžeme rozdeliť na vodorovnú zložku $3k\,\Delta x_2 \cos\varphi$ a vertikálnu zložku $3k\,\Delta x_2 \sin\varphi$, pričom vieme, že sústava je nehybná a teda vertikálna musí mať velkosť mg a horizontálna $3k\,\Delta x_1$. Všimnime si, že vzdialenosť, o ktorú klesne stred pružiny, je presne $\Delta x_2 \sin\varphi$. Túto hodnotu vieme z rovnosti vertikálnych síl vyjadriť ako

$$\Delta x_2 \sin\varphi = \frac{mg}{3k}. \tag{30.1}$$

31 Ako sme už ukázali vo vzorovom riešení úlohy 16, výška trojuholníka je $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, polomer kružnice je $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ a jej stred je identický s ťažiskom trojuholníka.

Ako prvé zistíme, že ak by sme pripojili zdroj napätia na body, medzi ktorými meriame odpor, cez výšku trojuholníka (bazový prútik) nebude tiecť žiadny prúd. Ak by sme zdroj napätia pripojili opačne, mal by tadiaľ tiecť prúd opačným smerom. No zároveň zisťujeme, že zapojenie vyzerá úplne identicky ako predtým, takže prúdy musia tiecť rovnako. Platí teda $I = -I$, čo spĺňa jedine $I = 0$.

Analogickou úvahou vieme zistiť, že žiadny prúd nebude tiecť ani medzi kružnicou a trojuholníkom v ich spodnom bode dotyku. Keďže cez tento uzol nebude tiecť prúd, vieme ho rozpojiť a schému si ešte viac zjednodušiť. Po prekreslení teda dostávame schému na obrázku [@-fig:deathly-hallow-2:sol].



Obrázek 31.1: *Prekreslenie odporovej siete tvorenej Sáriným príveskom*

Použili sme označenie $R_1 = \frac{\lambda a}{2}$ pre odpor polovice strany trojuholníka a $R_2 = \frac{a\pi\lambda}{3\sqrt{3}}$ pre odpor jednej tretiny kružnice. Toto je už len sériovo-paralelné zapojenie rezistorov, ktorého výsledný odpor vieme vypočítať podľa známych pravidiel:

- odpor sériovo zapojených rezistorov je súčtom ich odporov;
- prevrátená hodnota odporu paralelne zapojených rezistorov je súčtom prevrátených hodnôt ich odporov.

Ak si odpor trojice paralelných vetiev označíme R_P, platí preň

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2} = \frac{3R_1 + R_2}{2R_1R_2} \quad \Rightarrow \quad R_P = \frac{2R_1R_2}{3R_1 + R_2}. \tag{31.1}$$

Následne pre celkový odpor prívesku platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1 + \frac{2R_1R_2}{3R_1+R_2}} = \frac{6R_1 + 3R_2}{2R_1(3R_1 + 2R_2)} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2}{3}\frac{3R_1 + 2R_2}{2R_1 + R_2}R_1 = \frac{\lambda a}{6}\frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \doteq 0{,}563\lambda a. \tag{31.2}$$

$\boxed{32}$ Keď gravitačné pôsobenie od Slnka zmizne, Zem bude pokračovať po priamke rovnomernou rýchlosťou, ktorá je rovná jej pôvodnej obežnej rýchlosti a táto priamka je dotyčnicou k jej pôvodnej dráhe. Navyše by sme mali tušiť, že ak by bola gravitácia vypnutá dostatočne dlho, unikne do nekonečna. Medzi týmito krajnými prípadmi ostane obiehať po nejakej elipse.

Tieto dva osudy oddeľuje situácia, v ktorej bude celková mechanická energia (po zapnutí gravitácie) nulová. Keďže bez gravitácie tu žiadna potenciálna energia neexistuje, kinetická energia sa nemení. Stačí nám teda zistiť, za akú dobu Zem doletí na miesto, kde súčet jej kinetickej a potenciálnej energie po zapnutí gravitácie bude akurát rovný nule:

$$T + U(r) = 0. \tag{32.1}$$

Potenciálna energia Zeme v centrálnom gravitačnom poli je

$$U(r) = -\frac{GM_\odot m_\oplus}{r}, \tag{32.2}$$

zatiaľ čo kinetická energia Zeme $T = \frac{m_\oplus v^2}{2}$ ostáva konštantná. Pre známy polomer dráhy d si veľkosť rýchlosti v vieme vyjadriť napríklad z rovnosti dostredivej a gravitačnej sily,

$$\frac{v^2}{d} = \frac{GM_\odot}{d^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_\odot}{d}. \tag{32.3}$$

Po dosadení rovníc 32.2, 32.3 do rovnice 32.1 a predelení hmotnosťou Zeme $m_\oplus$ teda musí platiť

$$\begin{aligned} \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{v^2}{2}, \\ \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{GM_\odot}{2d} \quad \Rightarrow \quad r = 2d. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Zem teda musí doletieť do vzdialenosti od Slnka rovnej dvojnásobku polomeru jej pôvodnej dráhy. Keďže však neletí smerom od Slnka, ale po dotyčnici, dĺžku tejto dráhy musíme spočítať z Pytagorovej vety ako $L = \sqrt{(2d)^2 - d^2} = \sqrt{3}d$. Obežnú rýchlosť môžeme vypočítať explicitne, ale jednoduchšie bude si uvedomiť, že pri rovnomernom pohybe po kružnici musí jeden celý obeh trvať práve jeden rok. Platí teda

$$v = \frac{2\pi d}{1\,\mathrm{a}} \tag{32.5}$$

a Pán Temnôt™ bude musieť gravitáciu vypnúť aspoň na

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{3}d}{2\pi d} \cdot 1\,\mathrm{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\mathrm{a} \doteq 101\,\mathrm{d}, \tag{32.6}$$

čiže o trochu viac než tri mesiace.

$\boxed{33}$ Absolútne čierna dvojplatnička rozohriata na astronomickú teplotu T_0 sa chladí vyžarovaním. Pri rovnovážnej teplote vyžaruje s takým výkonom, aký je jej dodávaný z elektrickej siete. To jest

$$P = S\sigma T_0^4, \tag{33.1}$$

kde S je jej plocha a σ je Stefanova-Boltzmannova konštanta.

Keď ju chladíme kvapalinou, nejaká časť tohto výkonu P' sa použije na zohrievanie a odparovanie kvapaliny, a to konkrétne vieme zapísať ako

$$P = S\sigma T_1^4 + P', \tag{33.2}$$

kde T_1 je teplota chladenej dvojplatničky. Kvapalina teda dostáva výkon

$$P' = S\sigma\left(T_0^4 - T_1^4\right). \tag{33.3}$$

Za čas t prijme kvapalina teplo $Q = P't$, čo sa využije na zohriatie a odparenie kvapaliny hmotnosti m, hmotnostnej tepelnej kapacity c, merného skupenského tepla vyparovania l o teplotu ΔT, čo vieme konkrétne zapísať ako $Q = mc\,\Delta T + ml$. V našom prípade je $\Delta T = 80$ °C, lebo kvapalina sa zohrieva z 20 °C na 100 °C, a potom sa odparí a odíde z povrchu. Máme teda

$$P't = mc\,\Delta T + ml. \tag{33.4}$$

Už len zapíšeme m ako $V\rho$ a za P' dosadíme z rovnice 33.3, aby sme mohli vyjadriť objemový prietok

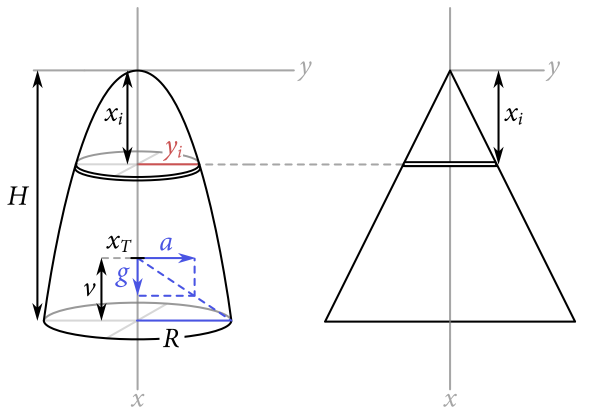
$$\frac{V}{t} = \frac{S\sigma(T_0^4 - T_1^4)}{\rho(c\,\Delta T + l)}. \tag{33.5}$$

Pre hodnoty zo zadania to je 0,094 ml/s.

34 Aby sme vedeli zodpovedať na otázku, potrebujeme nájsť ťažisko paraboloidu. Umiestnime ho do súradnicovej sústavy tak, ako na obrázku. Povrch paraboloidu potom možno popísať funkciou $y = k\sqrt{x}$. Keďže bod $[H;R]$ leží na povrchu paraboloidu, platí $R = k\sqrt{H}$, odkiaľ $k = \frac{R}{\sqrt{H}}$, teda $y = \frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{x}$.

Ťažisko paraboloidu leží na osi paraboloidu vo výške v. Túto výšku nájdeme tak, že si paraboloid rozdelíme na vhodne zvolené kúsky a ťažisko nájdeme ako vážený priemer ťažísk týchto kúskov. Vhodne zvolenými kúskami sú v tomto prípade veľmi tenké horizontálne plátky. Potom x-ovú súradnicu ťažiska nájdeme ako

$$x_T = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i} = \frac{\sum\limits_i \sigma\pi y_i^2 \cdot x_i}{M} = \frac{\sum\limits_i \sigma\pi \frac{R^2}{H} x_i \cdot x_i}{M}. \tag{34.1}$$



Obrázek 34.1: *Horizontálny rez paraboloidom a trojuholníkom. V oboch prípadoch hmotnosť vrstvičky rastie lineárne so vzdialenosťou od vrchola, preto obe telesá majú ťažisko v rovnakej výške.*

Všimnime si, že hmotnosť jednotlivých kúskov $m_i = \sigma\pi\frac{R^2}{H}x_i$ rastie lineárne so súradnicou. Rovnakú vlastnosť má aj trojuholník: ak ho nakrájame na prúžky – dĺžka, a teda aj hmotnosť jednotlivých prúžkov rastie lineárne s ich vzdialenosťou od vrcholu.[6] Pre trojuholník ale vieme, že jeho ťažisko leží v tretine výšky,

[6] Platí tu akási analógia Cavalieriho princípu.

preto aj paraboloid bude mať rovnakú vlastnosť, teda

$$v = \frac{H}{3}. \tag{34.2}$$

Teraz už len potrebujeme nájsť maximálne prípustné spomalenie auta. Pre to zrejme platí, že v limitnom prípade bude výsledné zrýchlenie (tiažové plus spomalenie v dôsledku brzdenia) smerovať od ťažiska do hrany podstavy paraboloidu. Z podobnosti trojuholníkov teda dostávame

$$\frac{a}{g} = \frac{R}{\frac{H}{3}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3Rg}{H}. \tag{34.3}$$

$\boxed{35}$ Slnko si rozdelíme na jadro a vonkajšiu vrstvu, ktorá je pri umieraní odhodená. Pretože pri procese odhodenia pôsobia sily len v radiálnom smere, nemôže to zmeniť moment hybnosti jadra. Preto nás zaujíma iba pôvodný moment hybnosti jadra, ktorý sa zachová. Na jeho výpočet budeme potrebovať hmotnosť a polomer jadra.

Z pomeru hustôt v zadaní vieme, že

$$\rho_o = \frac{\rho_j}{63}, \tag{35.1}$$

kde ρ_j a ρ_o sú hustoty jadra a obálky.

Okrem toho, ak od objemu Slnka odčítame objem jadra, dostaneme objem obálky

$$V_o = \frac{m_o}{\rho_o} = \frac{m_☼}{\rho_☼} - \frac{m_j}{\rho_j}. \tag{35.2}$$

Ak využijeme, že $m_j = m_o = m_☼/2$ a dosadíme za ρ_o z rovnice 35.1, dostaneme pre hustotu jadra

$$\rho_j = 32\rho_☼ = 32\frac{m_☼}{V_☼} = \frac{24}{\pi}\frac{m_☼}{r_☼^3}. \tag{35.3}$$

Polomer guľového jadra z jeho hmotnosti a hustoty vypočítame ako

$$r_j = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{m_j}{\rho_j}} = \frac{r_☼}{4}. \tag{35.4}$$

Označme si moment zotrvačnosti jadra na začiatku I_0 (keď má polomer $r_☼/4$) a na konci I. Zachovanie momentu hybnosti vyjadríme v tvare

$$I_0\omega_0 = I\omega, \tag{35.5}$$

kde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ je uhlová frekvencia otáčania a $T_0 = 28$ d je perióda otáčania na začiatku, pričom $\omega = 2\pi/T$ je konečná uhlová frekvencia a T je hľadaná perióda otáčania. Dosadením a úpravou dostaneme

$$T = T_0\frac{I}{I_0}. \tag{35.6}$$

Stačí nám teda vypočítať pomer I/I_0. Moment zotrvačnosti gule hmotnosti m a polomeru r je

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \tag{35.7}$$

V našom prípade jadro skolabuje do menšej gule, a teda sa mu mení len polomer. Preto v pomere I/I_0 sa vykráti všetko okrem štvorca polomerov, teda

$$T = T_0\frac{r_{\mathrm{WD}}^2}{r_{\mathrm{j}}^2} = 16T_0\frac{r_{\mathrm{WD}}^2}{r_{\odot}^2}. \tag{35.8}$$

kde $r_{\mathrm{WD}} = 5000$ km je konečný polomer bieleho trpaslíka. Po dosadení hodnôt dostaneme $T \doteq 1975$ s.

36 Tok slnečných neutrín si označme $\Phi = 10^{15}/(\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s})$. Ide o počet neutrín, ktoré preletia plochou veľkou 1 m^2 a kolmou na spojnicu so Slnkom za čas 1 s. Môžeme teda písať

$$\Phi = \frac{\Delta N}{S\,\Delta t}, \tag{36.1}$$

kde ΔN je počet neutrín, S je plocha a Δt je čas. Ešte si označme objem detektora $V = 1000\ \mathrm{m}^3$ a frekvencia interakcií medzi neutrínami a vodou $R = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Tú môžeme zapísať ako

$$R = \frac{\Delta N_{\mathrm{int}}}{\Delta t}, \tag{36.2}$$

kde ΔN_{int} je počet neutrín, ktoré za čas Δt interagujú s vodou.

Pretože neutrína interagujú s vodou veľmi slabo, môžeme predpokladať, že tok Φ je v celom objeme detektora konštantný. Preto si predstavme, že máme veľké množstvo vody, v ktorej sa šíria neutrína s konštantným tokom Φ. Avšak namiesto toho, aby sme uvažovali, že neutrína pri interakcii zaniknú (to by znížilo tok), predstavíme si, že po interakcii pokračujú ďalej. Každé neutríno teda letí vodou neporušené a vždy po prejdení strednej voľnej dráhy ℓ zinteraguje.

Teraz si predstavme, že plochou S za čas Δt preletí ΔN neutrín. Teda každé neutríno interaguje raz v objeme $S\ell$. Vyjadrime si veličinu $\frac{R}{V}$, ktorá má význam počtu interakcií na jednotku objemu a jednotku času. Teda

$$\frac{R}{V} = \frac{\Delta N}{S\ell\,\Delta t} = \frac{\Phi}{\ell}. \tag{36.3}$$

Z toho vieme hneď vypočítať

$$\ell = \frac{\Phi V}{R}, \tag{36.4}$$

čo je číselne rovné $\ell = 10^{18}$ m $\doteq 106$ ly.

37 Začnime s Yusufom. Zadanie nám zjavne chce povedať, že piest stláčal tak rýchlo, že tepelná výmena medzi plynom a okolím bola za ten čas zanedbateľná. Šlo teda o adiabatický dej. Označme p_{Y} tlak vzduchu a $V_0 = \frac{V}{16}$ objem vzduchu po stlačení. Z adiabatického zákona potom platí

$$p_{\mathrm{Y}}V_0^{\kappa} = pV^{\kappa}, \tag{37.1}$$

kde $p = 101\,325$ Pa je atmosférický tlak. Z tohto odvodíme

$$p_\mathrm{Y} = p\frac{V^\kappa}{V_0^\kappa} = 16^\kappa p. \tag{37.2}$$

Pri vystrelení plyn expanduje znova adiabaticky na pôvodný objem V. Môžeme vypočítať prácu vykonanú plynom pri adiabatickom deji a túto prácu položiť rovnú kinetickej energii piestu a projektilu,

$$\frac{1}{2}(m+M)v_\mathrm{Y}^2 = \frac{p_\mathrm{Y}V_0 - pV}{\kappa - 1}, \tag{37.3}$$

kde v_Y je rýchlosť Yusufovho projektilu. Dosadením za p_Y z rovnice 37.2 a V_0 dostaneme

$$v_\mathrm{Y} = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(16^{\kappa-1} - 1\right)} \approx 185{,}2\ \mathrm{m/s}. \tag{37.4}$$

Teraz sa pozrime na Kimin výstrel. Tá piest stlačila tiež adiabaticky, ale potom ho nechala vychladnúť na teplotu okolia pri konštantnom *objeme*. Keďže nás ale nezaujíma tento *proces*, ale iba jeho konečný stav, môžeme sa na to pozrieť ako na izotermické stlačenie. Teda tlak p_K po stlačení vieme vypočítať ako

$$p_\mathrm{K}V_0 = pV \quad \Rightarrow \quad p_\mathrm{K} = p\frac{V}{V_0} = 16p. \tag{37.5}$$

Tu si ale musíme uvedomiť, že v tomto prípade sa pri adiabatickom výstrele dosiahne v pieste atmosférický tlak skôr ako pri dosiahnutí celého objemu V. Náboj je teda urýchľovaný iba do dosiahnutia nejakého čiastočného objemu V_1, kde sa tlaky vyrovnajú (tlak bude teda rovný atmosférickému tlaku p). Piest teda začne spomaľovať, projektil však poletí ďalej. Z adiabatického zákona vieme odvodiť

$$p_\mathrm{K}V_0^\kappa = pV_1^\kappa, \tag{37.6}$$

a dosadením z rovnice 37.5 dostaneme

$$V_1 = \left(\frac{p_\mathrm{K}}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} V_0 = 16^{\frac{1}{\kappa}-1}V. \tag{37.7}$$

Teraz opäť vypočítame prácu, ktorú vykoná plyn, keď adiabaticky expanduje z objemu V_0 na objem V_1, a položíme ju rovnú kinetickej energii piestu a projektilu,

$$\frac{1}{2}(m+M)v_\mathrm{K}^2 = \frac{p_\mathrm{K}V_0 - pV_1}{\kappa - 1}. \tag{37.8}$$

Dosadením $p_\mathrm{K}V_0 = pV$ a V_1 z rovnice 37.7 dostaneme

$$v_\mathrm{K} = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1 - 16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}, \tag{37.9}$$

čo po dosadení dáva 96,1 m/s.

Podiel v_Y a v_K je teda

$$\frac{v_\mathrm{Y}}{v_\mathrm{K}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(16^{\kappa-1}-1\right)}}{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}} = \sqrt{\frac{16^{\kappa-1}-1}{1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}}},$$

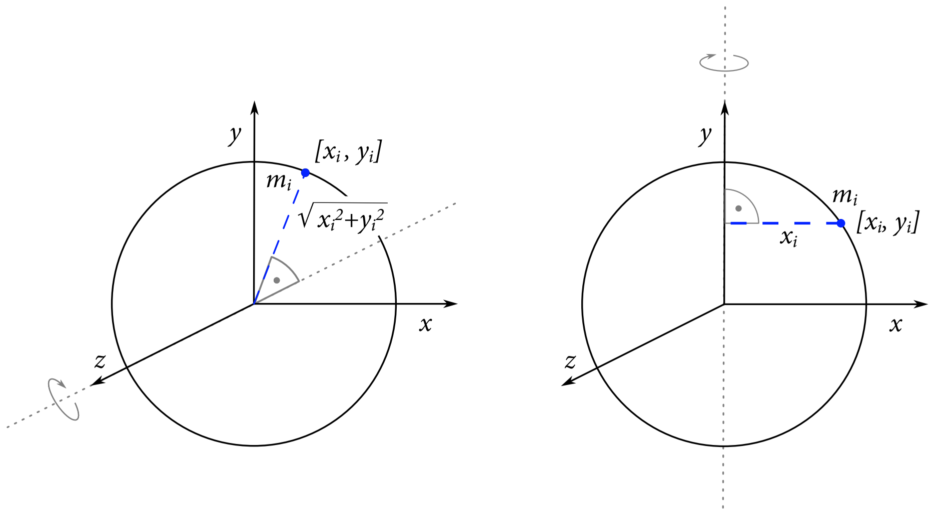
čo po dosadení $\kappa = 1{,}4$ vyjde $\frac{v_\mathrm{Y}}{v_\mathrm{K}} \doteq 1{,}93$.

$\boxed{38}$ Začnime tým, že vyriešime geometriu. Ak má rovnostranný trojuholník dĺžku strany a, jemu vpísaná kružnica má polomer $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ a výška tohto trojuholníka je $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Prívesok pozostáva z rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky a, kružnice s polomerom r a úsečky dĺžky v. Zo zadania vieme, že os otáčania prechádza cez celú úsečku, takže jej moment zotrvačnosti je $I_| = 0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

Moment zotrvačnosti kružnice je väčšia výzva. Všeobecne je moment zotrvačnosti aditívna veličina a teda ho vieme vypočítať tak, že teleso rozkúskujeme na malé kúsky a sčítame príspevok každého z nich k celkovému momentu zotrvačnosti, teda $I = \sum\limits_i m_i\rho_i^2$, kde m_i je hmotnosť i-teho kúska a ρ_i je vzdialenosť tohto kúska od osi otáčania. Ak by os otáčania prechádzala stredom kružnice kolmo na rovinu kružnice, bol by jej moment zotrvačnosti

$$I_\odot = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = mr^2. \tag{38.1}$$



Obrázek 38.1: *Vzťah medzi momentami zotrvačnosti pre kružnicu rotujúcu okolo dvoch osí prechádzajúcich jej stredom: osi kolmej na jej rovinu a osi ležiacej v jej rovine*

My však máme os otáčania ležiacu v rovine kružnice, preto

$$I_\varnothing = \sum_i m_i x_i^2. \tag{38.2}$$

Keď si uvedomíme, že túto súradnicu môžeme pomenovať ľubovoľne, zjavne platí $2I_\varnothing = I_\odot$, teda

$$I_\varnothing = \frac{1}{2}mr^2. \tag{38.3}$$

Hmotnosť kružnice je ale $m = \lambda 2\pi r$, preto

$$I_{\varnothing} = \lambda \pi r^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{72}\lambda a^3. \tag{38.4}$$

Ešte nám zostáva moment zotrvačnosti trojuholníka. Ten pozostáva z troch tyčiek. Moment zotrvačnosti tyčky kolmej na os otáčania okolo stredu je $I_{-} = \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{12}\lambda a^3$. Keď si uvedomíme, že moment zotrvačnosti hmotného bodu závisí len od kolmej vzdialenosti od osi otáčania, v prípade sklonenej tyčky nám stačí vypočítať množstvo hmoty tyčky v danej vzdialenosti. To je tu ale veľmi jednoduché: obe šikmé tyčky majú hmotu distribuovanú rovnomerne po celej dĺžke, takže v každej vzdialenosti od osi bude spolu trikrát viac hmoty, ako pri samotnej kolmej tyčke. Preto $I_{\triangle} = 3I_{-} = \frac{1}{4}\lambda a^3$.

Na záver už len sčítame jednotlivé príspevky a dostaneme výsledok

$$I = I_{|} + I_{\varnothing} + I_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3. \tag{38.5}$$

39 Prv, než sa pustíme do počítania, objasnime si, čo ideme počítať. Hladina intenzity zvuku je veličina, ktorá popisuje, akú energiu prenesie zvuková vlna jednotkovou plochou za jednotku času. Presnejšie povedané, toto popisuje intenzita zvuku I. Hladina intenzity zvuku L je len logaritmus podielu intenzity zvuku I a nejakej referenčnej intenzity I_0 a udáva sa v beloch, resp. v decibeloch:

$$L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{B}] = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{dB}] \tag{39.1}$$

Ak zdroj zvuku má akustický výkon P, intenzita zvuku vo vzdialenosti r od zdroja je $I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$ a príslušná hladina intenzity potom

$$L(r) = 10\log\left(\frac{P}{4\pi I_0 r^2}\right) = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.2}$$

Keď už toto všetko vieme, môžeme začať počítať. Podľa zadania vieme, že každý rok sa hladina intenzity spevu rovná babičkinmu veku. Ak babička Justína tento rok oslavuje L-té narodeniny, pred dvomi rokmi zrejme platilo

$$L - 2 = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.3}$$

Minulý rok už prišiel na pomoc sused. Ak sused vie vyvinúť akustický výkon Π, minulý rok muselo platiť

$$L - 1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.4}$$

Tento rok navyše posúvame babičkino kreslo o d bližšie k spievajúcim gratulantom, preto bude platiť

$$L = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r - d). \tag{39.5}$$

Rozdiel rovníc 39.3 a 39.4 dáva

$$1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(P) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1} \tag{39.6}$$

a z rozdielu rovníc 39.4 a 39.5

$$1 = 20\log(r) - 20\log(r - d) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1}. \tag{39.7}$$

Po dosadení do rovnice platnej pred dvomi rokmi dostávame

$$L = 2 + 10\log\left(\frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1}\right) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1}\right). \tag{39.8}$$

Na to, aby sme dokázali určiť vek babičky Justíny, musíme ešte prepočítať akustický výkon prizvaného suseda na hladinu intenzity zvuku, ktorú vie vyvinúť. Ak na vzdialenosť ρ dokáže vyvinúť hladinu intenzity Λ, platí

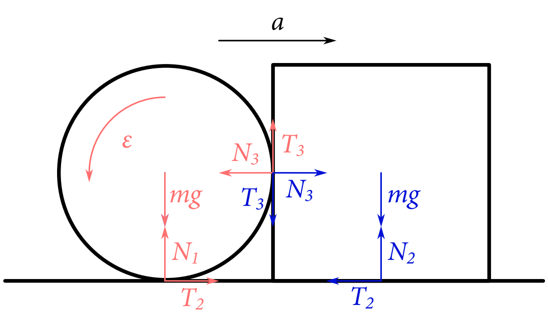
$$\Lambda = 10\log(\Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(\rho). \tag{39.9}$$

Po dosadení do rovnice 39.8 konečne dostávame

$$L = 2 + \Lambda - 10\log\left(\sqrt[10]{10} - 1\right) + 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10} - 1}{\sqrt[20]{10}} \cdot \frac{\rho}{d}\right), \tag{39.10}$$

čo pre hodnoty zo zadania prezrádza, že babička Justína tento rok oslavuje 99 rokov. Gratulujeme!

40 Začneme tým, že nakreslíme všetky sily, ktoré na kocku a valec pôsobia.



Obrázek 40.1: *Náčrt síl pôsobiacich na valec a kocku*

Keď už máme sily, vieme si napísať pohybové rovnice. Bude ich dohromady päť. Dve pre pohyb telies vo vertikálnom smere

$$\begin{aligned} N_1 + f_3 N_3 &= mg, \\ N_2 - f_3 N_3 &= mg, \end{aligned} \tag{40.1}$$

dve pre pohyb telies v horizontálnom smere

$$
\begin{aligned}
ma - f_1 N_1 + N_3 &= 0, \\
ma + f_2 N_2 - N_3 &= 0,
\end{aligned}
\tag{40.2}
$$

a jedna pre rotáciu valca

$$
I\varepsilon - f_1 N_1 R - f_3 N_3 R = 0, \tag{40.3}
$$

kde a je translačné zrýchlenie valca a kocky. Tie si musia byť rovné, lebo inak by valec prestal kocku tlačiť a bolo by po súboji. $I = \frac{1}{2}mR^2$ je moment zotrvačnosti valca a ε je jeho uhlové zrýchlenie.

Vyriešením tejto gargantuóznej sústavy rovníc dostaneme

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{f(1-4f^2)}{2+f^2} g, \\
\varepsilon &= \frac{4f + 3f^2 - 4f^3}{2+f^2} \frac{2g}{R}.
\end{aligned}
\tag{40.4}
$$

Kedy bude mať kocka najväčšiu rýchlosť? Jediná sila, ktorá môže sústavu urýchľovať, pochádza od prešmykovania valca, takže až valec prešmykovať prestane, sústava začne kvôli treniu kocky o podložku spomaľovať. No a valec prestane prešmykovať v čase τ od začiatku, pre ktorý platí

$$
a\tau - \Omega R + \varepsilon R \tau = 0, \tag{40.5}
$$

teda v čase, keď sa obvodová rýchlosť bodu na povrchu valca vyrovná s jeho translačnou rýchlosťou.

Odtiaľ vieme vyjadriť maximálnu rýchlosť, na ktorú je Dušan urýchlený

$$
v = a\tau = a \frac{\Omega R}{\varepsilon R + a} = \Omega R \frac{1 - 4f^3}{9 + 6f - 12f^2} \doteq 0{,}99\ \mathrm{m/s}, \tag{40.6}
$$

čiže asi meter za sekundu.

Výsledky

1 2 Wh

2 6

3 1,3 °C

4 25 920 km/h^2

5 72 l

6 3700 km

7 Tömáš, o 0,505 s.

8 8

9 13 mm

10 −8,4 °C

11 $\frac{3}{4}$

12 $\arcsin \frac{2s}{gt^2}$

13 $\frac{3}{2}$ A

14 $\frac{400\pi}{3}$ m ≐ 419 m

15 2 s

16 $\dfrac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3} a \doteq 0{,}555a$

17 $L\sqrt{8\dfrac{M-m}{M+m}}$

18 60

19 $1{,}624 \cdot 10^{22}$ kg, *uznejte řešení v intervalu* $1{,}62 \cdot 10^{22}$ kg – $1{,}66 \cdot 10^{22}$ kg.

20 180

21 $\sqrt{2}\ \mathrm{s} \doteq 1{,}41\ \mathrm{s}$

22 1171 €, *uznejte řešení v intervalu* 1150 € – 1180 €.

23 $9\ \Omega$

24 $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\arcsin \frac{2}{3}}{\pi} \doteq 26{,}8\ \%$

25 99,2 km, *uznejte řešení v intervalu* 99 km – 99,3 km.

26 $2\,g$

27 0 A

28 $V_{\mathrm{min}} = \dfrac{1}{148}\ \mathrm{l},\ V_{\mathrm{max}} = 1\ \mathrm{l}$

29 3,6 cm

30 $\dfrac{mg}{3k}$

31 $\dfrac{a\lambda}{6}\dfrac{4\pi + 9\sqrt{3}}{\pi + 3\sqrt{3}} \doteq 0{,}563a\lambda$

32 $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\ \mathrm{a} \doteq 101\ \mathrm{d} \doteq 8{,}7 \cdot 10^{6}\ \mathrm{s}$

33 0,094 ml/s

34 $\dfrac{3Rg}{H}$

35 1975 s ≐ 33 min

36 10^{18} m ≐ 106 ly

37 1,93

38 $\dfrac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3$

39 99

40 0,99 m/s

Autoři příkladů

Martin ‚Kvík' Baláž
Jozef Csipes
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Jakub ‚Andrej' Kliment
Katarína Nedeľková
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös

Obrázky

Katarína Nedeľková

Technická úprava

Martin ‚Kvík' Baláž