Ihr Lieben,

in euren Händen haltet ihr die Aufgabensammlung des 27^{th}ten Náboj Physik Wettbewerbs, der 2024 erstmals im deutschsprachigen Raum hier bei uns in Wien stattgefunden hat. In diesem Heft findet ihr alle heuer gestellten Aufgaben samt Lösungen und Lösungswegen. Falls etwas unklar ist, meldet euch bitte gerne bei uns.

Viele Personen und Organisationen haben zum Gelingen des Náboj Physiks beigetragen, denen ich herzlich danken möchte: Fakultät für Physik der Universität Wien, Erwin-Schrödinger Institut, Univ.-Prof. Dr. Markus Arndt, unseren Übersetzer*innen (Walter Hametner, Susanne Pötzi, und Norbert Schuch), sowie den internationalen Organisator*innen Katarína Nedeľková (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Prag), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapest), Urszula Goławska (Danzig), Andrzej Karbowski (Toruń), Mirela Kaczmarek (Breslau), José Francisco Romero García (Madrid) and Dmytro Rzhemovskyi (Wien).

Die Ergebnisse des internationalen Wettbewerbs finden sich auf der offiziellen Website des Náboj Physiks.

Im Namen des gesamten Organisationsteams hoffe ich, dass dir der diesjährige Náboj Physik Wettbewerb gefallen hat und wir dich auch nächstes Jahr wieder beim Náboj Physik begrüßen dürfen!

Herzliche Grüße

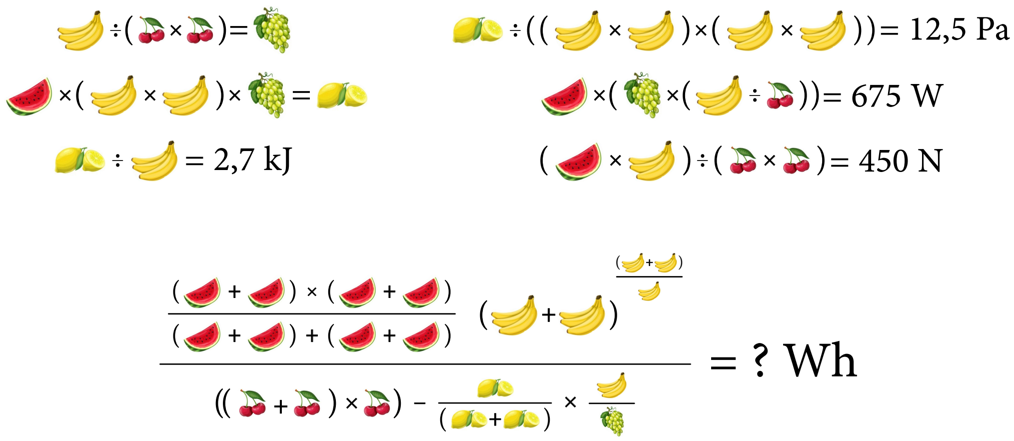
Univ.-Prof. Michael Eichmair, PhD
Organisator NÁBOJ Physik in Österreich

Jaroslav Valovčan
Hauptorganisator NÁBOJ Physik

Die Ergebnisse, das Archiv und weitere Informationen findet ihr unter `https://physics.naboj.org/`.

Aufgaben

1 95 % aller Menschen können dieses Rätsel nicht lösen. Kannst du es?



2 Thomas schaut gerne Autorennen. Bei amerikanischen Autorennen bedeutet das, drei Stunden lang nur nach links zu lenken. Da er nie genug Geld gespart hatte, um nach Amerika zu reisen, es aber dennoch live sehen möchte, ruft er seine Freunde Pato und Josef an und bittet sie darum, für ihn beim örtlichen Kreisverkehr in einem Rennen gegeneinander anzutreten. Die Jungs kamen mit ihren Klapperkisten und hielten nebeneinander an. Thomas startete das Rennen und beide fuhren mit einer halsbrecherischen aber konstanten Geschwindigkeit von 18 km/h im Kreis. Pato blieb auf der inneren Spur, einem Kreis mit einem Umfang von 100 m während Josef auf der äußeren Spur mit einem Umfang von 120 m fuhr. Wie oft wird Pato den Kreisverkehr umrundet haben, bis er Josef zum ersten Mal überholt?

Die Zeit zum Erreichen der halsbrecherischen Geschwindigkeit wird vernachlässigt.

3 Martin beobachtet oft Meteorschauer. Zu seinen Vorbereitungen für nächtelange Beobachtungen gehört unter anderem, Kaffee in einer Thermosflasche zuzubereiten (sieben Teelöffel Instantkaffee und neun Teelöffel Zucker – gerührt, nicht geschüttelt). Der Innenbehälter der Flasche ist ein Zylinder mit einer Höhe von 18 cm und einem Innenradius von 4 cm. Die Wände des Innenbehälters sind 0,5 mm dick und bestehen aus Aluminium mit einer Dichte von 2,7 g/cm^3 und einer spezifischen Wärmekapazität von 0,9 J/(g · K). Martin füllte den Innenbehälter komplett mit Kaffee, welcher eine Temperatur von 95 °C besitzt.

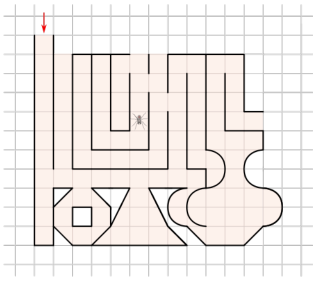
Um wie viel wird der Kaffee abkühlen, bis er ein Gleichgewicht mit dem Innenbehälter erreicht? Der Innenbehälter ist durch ein Vakuum von der äußeren Flasche getrennt, sodass angenommen werden kann, dass sie perfekt wärmeisoliert ist. Die spezifische Wärmekapazität des Kaffees ist gleich der von Wasser. Die ursprüngliche Temperatur der Flasche betrug 20 °C.

4 Barbara sitzt im Flugzeug, das gerade auf der Startbahn beschleunigt. Als Physikerin interessiert sie sich sehr für die Flugdaten. Sie nimmt also ihr Telefon zur Hand, das ihr anzeigt, dass das Flugzeug mit 2 m/s^2 beschleunigt. Andererseits wird die Geschwindigkeit des Flugzeugs normalerweise in der Einheit km/h ausgedrückt.

Was ist der Wert der Beschleunigung des Flugzeugs in der entsprechenden Einheit km/h^2?

5 Justine und Martin hatten ein Hochzeitsgeschenk erhalten: ein Glaskunstwerk aus der Werkstatt eines begnadeten Glasbläsers in Venedig. Es dauerte aber nicht lange, da verkroch sich eine Spinne tief in dem edlen Geschenk. Ihr Anblick störte den ästhetischen Eindruck des Kunstwerks so sehr, dass das frisch verheiratete Paar beschloss, die Spinne sanft mit Wasser herauszuspülen.

Wie viel Wasser müssen die beiden in das äußerst linke Rohr füllen, sodass das Quadrat mit der Spinne vollständig gefüllt wird? Ein Quadrat entspricht dabei einem Volumen von 1 l und die Abmessungen des Gefäßes sind klein genug, dass eine mögliche Kompression der Luft im Gefäß **vernachlässigt** werden darf.



6 George hat auf dem Globus gemessen, dass die Entfernung von Rio nach Hongkong 17 700 km und die Entfernung von Rio nach Tokio 18 600 km beträgt. Was ist die maximal mögliche Entfernung zwischen Tokio und Hongkong?

Die Erde ist eine Kugel mit einem Umfang von 40 000 km. *Du benötigst kein Wissen über die realen Standorte der genannten Orte.*

7 Zwei erfahrene Trackmania-Rennfahrerinnen, Theresa und Maria, fahren ein Rennen auf einer 300 m langen geraden Rennstrecke. Theresa beschleunigt sofort von der Startlinie weg mit einer konstanten Beschleunigung von 8 m/s^2. Das Auto von Maria hat Probleme mit der Zündung und startet erst eine Sekunde später, aber mit einer Beschleunigung von 9 m/s^2.

Wer von beiden wird die Ziellinie als erster überqueren, und mit wie vielen Sekunden Vorsprung?

8 Gib die Summe der Nummern aller wahren Aussagen an.

1	Wasser fließt in einem Schlauch durch eine Engstelle. Die Durchflussgeschwindigkeit ist an dieser Stelle geringer.
2	Wenn Kraft auf die Oberfläche einer Flüssigkeit ausgeübt wird, ist der Druck in jedem Punkt innerhalb der Flüssigkeit gleich.
4	Ein Körper schwimmt an der Wasseroberfläche in einem Glas. Seine Dichte muss daher geringer sein als die von Wasser.
8	Ein dünner Glaszylinder ist mit Quecksilber gefüllt. Wenn der Zylinder um 45° geneigt wird, sinkt der Druck am Boden.
16	Ein Eiswürfel schwimmt an der Oberfläche von Wasser in einem Glas mit Raumtemperatur. Der Wasserspiegel steigt, bis der Würfel vollständig geschmolzen ist.
32	Wasser kann nicht bei Temperaturen weit unter seinem Siedepunkt verdunsten.

64	Zwei Körper schwimmen an der Oberfläche einer Flüssigkeit. Der Körper, dessen Volumen oberhalb der Oberfläche der Flüssigkeit größer ist, besitzt weniger Dichte.

Für alle angeführten Körper gelten Laborbedingungen (homogenes Gravitationsfeld, Atmosphärendruck, Raumtemperatur, etc.).

9 Die Fenster des örtlichen Hallenbads werden von dicken Vorhängen verdeckt. In einem der Vorhänge ist ein kleines Loch, durch das ein einziger Sonnenstrahl auf die Wasseroberfläche im Schwimmbecken in einem Winkel von 45° trifft. Da Sonnenlicht aus vielen Farben besteht, erscheint ein Regenbogenstreifen am Boden des Schwimmbeckens. Wie lange ist dieser Streifen, wenn der Brechungsindex von Wasser für sichtbares Licht im Bereich von 1,33 – 1,34 liegt und das Schwimmbecken 2 m tief ist?

Nimm an, dass der Brechungsindex von Luft 1 *ist.*

10 Während der langen, sorglosen Sommertage hat Mark vergessen, Frostschutzmittel in den Wassertank für das Scheibenwischwasser seines PKW zu geben, sodass nicht verbrauchtes Wasser im Wassertank verblieben ist. Nun steht er halb erfroren und wild gestikulierend vor eben diesem PKW und flucht dabei leise vor sich hin, bis er endlich herausfindet, dass sich 1 kg reines Eis in seinem 2-Liter-Tank befindet.

Er füllt den Tank randvoll mit Frostschutzmittel, das bei −20 °C gefriert. Welches ist die Minimaltemperatur, bei der die so entstehende Mischung gerade noch flüssig ist, wenn die Dichte des Frostschutzmittels 800 kg/m^3 beträgt und der Gefrierpunkt sich als gewichteter Mittelwert mit den Massen der Komponenten als Gewichten berechnen lässt?

11 Auf dem örtlichen Jahrmarkt kaufte Adam einen Donut und einen riesigen Apfel. Den Donut verschlang er sofort und den Apfel sparte er sich für den Heimweg auf. Als er über eine kleine Brücke ging, sah er sein eigenes Spiegelbild im Wasser. Dies beunruhigte ihn so sehr, dass er vor Schreck den Apfel in den Teich fallen ließ. Es stellte sich heraus, dass die Dichte des Apfels zwei Drittel der Dichte des Wassers betrug.

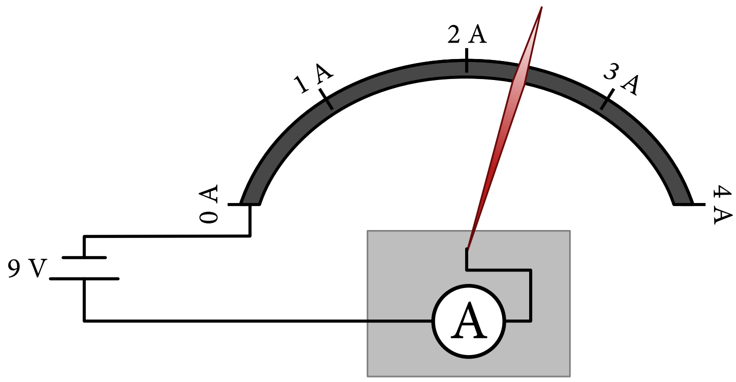
Da Adams Hände immer noch fettig vom Donut sind und er keine Umweltkatastrophe verursachen will, kniet er sich hin und beginnt, den Apfel direkt über der Wasseroberfläche anzuknabbern. Der Aufprall des Apfels im Wasser lockte jedoch auch einen hungrigen Fisch an, der unter der Oberfläche ebenfalls anfing, den Apfel zu verspeisen.

Welchen Anteil des Apfels wird Adam am Ende gegessen haben? Angesichts des massiven Vorteils durch seine Zähne, isst Adam dreimal so schnell wie der Fisch.

12 Jeremy rast mit seinem Fahrrad den Hügel hinunter. Auf einer horizontalen, ebenen Fläche bräuchte er mit seiner aktuellen Geschwindigkeit die Strecke s und die Zeit t um anzuhalten. Wie groß muss die minimale Neigung des Hügels relativ zur Horizontalen sein, damit Jeremy überhaupt nicht mehr anhalten kann?

Jeremy weiß, wie man richtig bremst, und seine Räder rutschen nie.

13 Jakob suchte zu Hause nach einem Multimeter, fand aber leider nur ein seltsames Amperemeter. Dessen Zeiger bewegt sich entlang eines dünnen leitfähigen Streifens mit einem Widerstand von 4 Ω pro Segment, wie in der Abbildung dargestellt. Er schloss dieses Wunder der modernen Elektrotechnik an eine Batterie mit einer Spannung von 9 V an. Welche Stromstärke wird dieses seltsame Amperemeter anzeigen?



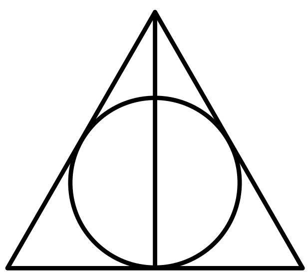
14 Patrick entdeckte eine seltsame schwarze Scheibe im Schrank seines Großvaters. Bevor er darauf einen Sojaburger servieren oder sie anstelle eines Frisbees benutzen konnte, zeigte ihm sein Großvater, dass, wenn er sie auf den Plattenspieler legt, die Nadel in die spiralförmige Rille am äußeren Rand der Scheibe positioniert und schließlich ein paar Knöpfe drückt, unheilvolles Knacken und Zischen aus den Lautsprechern ertönt, zusammen mit prähistorischer Musik.

Das Zischen und Knacken dauerte genau 20 Minuten. Wie lang ist die Rille, wenn der äußere Durchmesser der Scheibe 30 cm beträgt und die Rille 5 cm vom Zentrum entfernt endet? Die mysteriöse Scheibe drehte sich auf dem Plattenspieler mit einer Geschwindigkeit von 33⅓ Umdrehungen pro Minute.

15 Eine Poolspringerin springt von einem Sprungbrett, das sich 10 m über dem Wasserspiegel befindet, in ein Becken. Sie springt vom Brett, vollführt einen Salto und landet im Wasser. Wie viel Zeit verbringt die Springerin in der Luft, wenn sie genau die Hälfte der Sprungdauer oberhalb des Sprungbretts verbracht hat?

16 Sarah ist ein großer Harry Potter Fan. Sie nahm einen Anhänger der Heiligtümer des Todes aus ihrem Schmuckkästchen und begann ihn zu bewundern: Der Tarnumhang, der Stein der Auferstehung, der Elderstab. Und da sie auch eine neugierige Physikerin ist, fragte sie sich, wo sich der Schwerpunkt dieses Anhängers befindet.

Der Anhänger besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a, einem in das Dreieck eingeschriebenen Kreis und einer Höhe im Dreieck. Alle diese Komponenten haben die gleiche lineare Dichte. Wie weit ist der Schwerpunkt des Anhängers von dem Eckpunkt Dreiecks entfernt, der auf der Höhe liegt?



17 Andrew baute ein einfaches Katapult. Es besteht aus einem masselosen Brett der Länge $2L$ mit einer Achse in der Mitte, die an einem groben Rahmen in der Höhe L über dem Boden befestigt ist. Er fixierte ein schweres Gegengewicht aus Stein mit der Masse M an einem Ende und platzierte ein winziges Projektil mit der Masse $m < M$ in eine flache Grube am anderen Ende des Brettes.

Das Projektil liegt dort, bis Andrew das Katapult abfeuert. Der schwere Stein fällt herab und das Projektil verlässt die Grube genau dann, wenn das Brett vertikal ist.

Wie weit vom Gegengewicht entfernt wird das Projektil am Boden auftreffen?

18 Die Autobahn von Entenhausen nach Quakenbrück ist genau 400 Kilometer lang und hat vier Spuren pro Richtung.

In diesen Spuren fahren die Autos mit den Geschwindigkeiten 80 km/h, 100 km/h, 120 km/h und 160 km/h, wobei die Geschwindigkeit in jeder Spur konstant ist. Gustav, Daisy und Donald verlassen Bratislava zur gleichen Zeit, aber jeder von ihnen nimmt eine andere Spur. Nachdem sie alle in Quakenbrück angekommen sind, tauschen sie sich über ihre Reise aus.

Gustav: „Ich war in der schnellsten Spur und habe während der Fahrt 620 Autos überholt, von denen 200 in der zweitschnellsten Spur waren.“

Daisy: „Ich bin mit 120 km/h gefahren und habe insgesamt 220 Autos überholt.“

Donald ist 100 km/h schnell gefahren, weiß aber nicht mehr, wie viele Autos er überholt hat. Rechne es für ihn aus!

Nimm an, dass all Autos auf der Autobahn die gesamte Strecke fahren, nicht die Spur wechseln, und in allen Spuren jeweils gleichmäßig über die Zeit verteilt sind.

19 Matt albert gerne mit seinen Physikfreunden herum. Heute wurde ihnen klar, dass wenn

- eine *Pferdelänge* acht Fuß beträgt;
- eine *Pferdeleistung* die Leistung bezeichnet, die erforderlich ist, um eine Masse von 75 kg mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s gerade nach oben zu heben;
- und eine *Pferderation* 1,7 kg Futter pro 100 kg Masse eines Pferdes pro Tag beträgt;

…es möglich ist, ein Maßsystem zu konstruieren, in dem jede mechanische Größe ausgedrückt werden kann. Zum Beispiel wäre *Pferdebeschleunigung* eine *Pferdelänge* multipliziert mit einer *Pferderation* im Quadrat.

Wie viele Kilogramm wäre dann eine *Pferdemasse*, abgeleitet aus diesen drei Maßeinheiten?

20 Kathi und Willi fahren Rolltreppe. Diese hat auf ihrer vollen Länge 120 sichtbare Stufen, und sie bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von zwei Stufen pro Sekunde vorwärts. Beide betreten die Rolltreppe auf der untersten Stufe. Kathi als verantwortungsvolle Erwachsene bleibt auf dieser Stufe stehen, während Willi sofort wie ein Irrer zwischen Kathi und dem oberen Ende der Rolltreppe hin und herzulaufen beginnt. Er läuft mit einer Geschwindigkeit von zwei Stufen pro Sekunde aufwärts und sechs Stufen pro Sekunde abwärts.

Über wie viele Stufen ist Willi insgesamt gelaufen, bis Kathi ihn am Ende der Rolltreppe schließlich einholt und gehörig zurechtweist?

21 Mark und Sabine fliegen zwei Überschallflugzeuge, beide jeweils mit einer Geschwindigkeit von Mach 3. Die Flugbahnen sind zueinander parallele Geraden mit einem Abstand von 1 km, allerdings fliegen die beiden in entgegengesetzte Richtungen. Wie viel Zeit ist seit dem Zeitpunkt ihrer geringsten Annäherung vergangen, wenn Sabine das Geräusch von Marks Flugzeug hört?

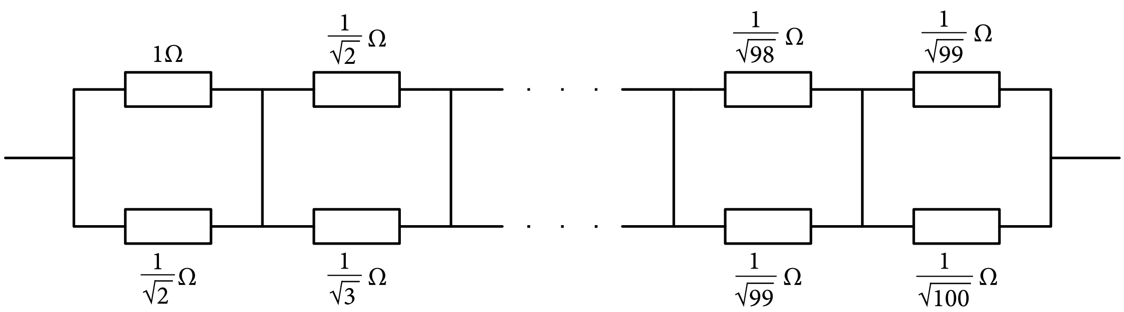
Die Schallgeschwindigkeit ist Mach 1 = 1 km in 3 s.

22 Marcel und Sabine fahren in einem Gasballon auf Hochzeitsreise. Allerdings ist ihr Budget recht knapp, und obwohl Marcel es irgendwie geschafft hat, sich kostenlos einen Ballon auszuleihen, muss er diesen noch mit etwas füllen. Helium ist teuer, sie müssen also mit elektrolytisch gewonnenem Wasserstoff auskommen.

Der leere Ballon mit dem Brautpaar hat eine Masse von 1000 kg, der Strompreis für junge Paare beträgt 0,20 €/kWh, und die Effizienz des Prozesses beträgt 50 %. Die Verbrennung von Wasserstoff mit Sauerstoff erzeugt 285,8 kJ/mol an Energie. Wie viel wird es kosten, den Ballon zu füllen?

Die Ballonfahrt findet bei Standardtemperatur und Standarddruck statt. Der Druck im Inneren des Ballons ist gleich dem Außendruck.

23 Samuel hat eine Schachtel mit vielen verschiedenen Widerständen und eine große Menge an perfekt leitfähigem Draht gefunden und daraus eine lange Leiter gebaut. Je zwei Sprossen werden von einem Widerstand mit $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega$ auf der einen Seite und einem Widerstand mit $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega$ auf der anderen Seite verbunden, wobei n im Bereich von 1 bis 99 liegt.



Wie groß ist der Gesamtwiderstand zwischen den Enden der Leiter?

24 Die Höhe des durch die Gezeiten beeinflussten Meeresspiegels in der französischen Stadt Saint-Malo kann um den Vollmond durch die Funktion $A \cdot \sin(\omega t)$ modelliert werden. A bezeichnet die Amplitude und ω bezeichnet die Frequenz derart, dass die Flut alle 12 Stunden auftritt.

Die Matrosen des Schiffes Santiano möchten gerne wissen, ob sie anlegen können wenn sie nach Hause kommen. Das Problem ist, dass das Schiff nur dann am Pier anlegen kann, wenn der Meeresspiegel nicht mehr als $A/3$ niedriger ist als bei Flut.... und die Seeleute wissen nicht, zu welcher Zeit die Flut eintritt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zu einer Zeit ankommen, zu der sie am Pier anlegen können?

25 Veronika Vogel und Manuel Maulwurf messen Abstände zwischen Orten auf der Erde auf verschiedene Arten: Veronika Vogel gibt den Abstand als kürzeste Verbindung entlang der Erdoberfläche an, während Manuel Maulwurf den Abstand als die Länge einer geraden Verbindungslinie angibt, auch wenn diese unter der Erde verläuft.

Als beide den Abstand zwischen Veronikas (auf dem Boden befindlichen) Vogelnest und Manuels Maulwurfhügel messen, unterscheiden sich die Entfernungen, die sie erhalten, um genau 1 m. Was ist der Abstand, den Veronika gemessen hat?

Die Erde ist eine Kugel mit Radius 6371 km.

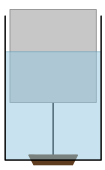
26 Paul, das Pendelgewicht, schwingt an einer Schaukel, die an Ketten der Länge L aufgehängt ist. In der Position mit der größten Auslenkung, wenn er für einen kurzen Moment zum Stillstand kommt, spürt er eine g-Kraft von 0,5 g. Welche g-Kraft spürt Paul im untersten Punkt der Schwingungsbahn?

27 Kate hat eine neue Halskette aus Silber: Die Kette hat die Form einer kreisförmigen, geschlossenen Leiterschleife mit Radius r und weist einen längenbezogenen elektrischen Widerstand λ auf. In den Ferien benutzte Kate mit dieser Kette um den Hals ein kleines Kinderkarussell auf dem örtlichen Spielplatz. Sie saß in einer Entfernung R von der Rotationsachse und begann, sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um diese zu drehen. Da bemerkte Kate, dass irgendwelche Eisenfans einen großen Magneten unter dem Karussell angebracht hatten, der ein homogenes, also überall gleich starkes, magnetisches Feld parallel zur Rotationsachse mit der magnetischen Induktion B erzeugte.

Kate begann sich Sorgen wegen ihrer Halskette zu machen: Welche Stromstärke wird in der Kette induziert? Nimm an, dass Kate starr vor Angst an einer Stelle still verharrt. Sie sitzt außerdem so, dass die Halskette einen Winkel von 30° mit der horizontalen Ebene einschließt.

28 Celine hat eine geniale Apparatur erfunden, um das Wasser zum Gießen ihrer Pflanzen zu dosieren. Die Apparatur besteht aus einem hinreichend hohen, zylindrischen Behälter mit Grundfläche S. Sie hat unten in der Mitte eine kreisförmige Öffnung, deren Radius halb so groß ist wie der Radius des Behälters, und die von einem masselosen Stöpsel verschlossen wird. Im Behälter befindet sich ein kleiner Zylinder mit einer Dichte von 500 kg/m^3, einer Grundfläche von 0,99S und der Höhe H, der mit einer Schnur mit dem Stöpsel verbunden ist. Sobald der Behälter mit einer bestimmten kritischen Menge Wasser gefüllt worden ist, hebt der innere Zylinder den Stöpsel an, so dass kein weiteres Wasser mehr eingefüllt werden kann, ohne sofort wieder abzufließen.

Was ist das kleinste Volumen $V_{\min}$ und das größte Volumen $V_{\max}$ an Wasser, das Celine auf diese Art mit ihrer Apparatur abmessen kann, wenn sie die Länge der Schnur beliebig wählen kann? Das Volumen des inneren Zylinders ist 1 l.



29 In Daniels Büro herrscht das blanke Chaos. Das einzige, was einem beim Eintreten sofort ins Auge fällt, ist sein Lieblingsspielzeug, ein Fadenpendelpaar.

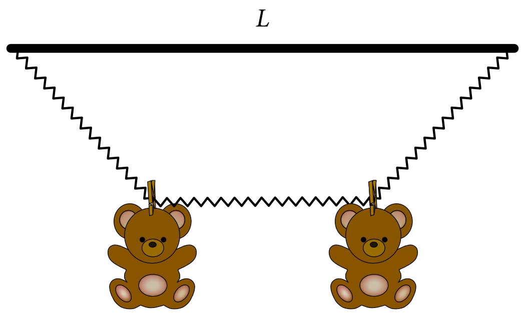
Wenn beide Pendel gleichzeitig aus ihrer Ruhelage ausgelenkt werden, hat ihre Bewegung folgende Eigenschaften:

Exakt jedes dritte Mal, wenn das langsamere Pendels seine äußerst rechte Position erreicht, trifft es dort auf das schnellere, und exakt jedes fünfte Mal, wenn das schnellere Pendel seine äußerst linke Position einnimmt, trifft es dort auf das langsamere.

Das längere der beiden Pendel hat eine Länge von 10 cm. Wie lang ist dann das kürzere Pendel?

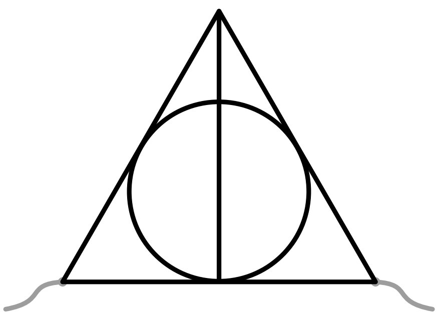
30 Michael möchte zwei Plüschtiere nach dem Waschen zum Trocknen aufhängen. Jedes der nassen Plüschtiere hat eine Masse m. Leider ist die Wäscheleine gerissen. Michael nimmt stattdessen eine masselose Feder mit Ruhelänge Null und Federkonstante k und spannt sie zwischen die beiden Aufhängungspunkte der Wäschleine, die den Abstand L voneinander haben und sich auf gleicher Höhe befinden. Dann hängt er seine Plüschtiere bei einem Drittel und zwei Dritteln der Länge der Feder auf. Durch das Gewicht der Plüschtiere hängt die Feder anschließend durch.

Wie viel tiefer wird die Mitte der Feder sein, verglichen mit den Aufhängungspunkten?



31 Sarah nimmt einmal mehr ihren geliebten Anhänger der Heiligtümer des Todes zur Hand. Dieses Mal will sie den elektrischen Widerstand ermitteln. Sarahs Anhänger besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a, einem dem Dreieck eingeschriebenen Kreis und einer Dreieckshöhe. Der längenbezogene Widerstand wird mit λ bezeichnet.

Wie groß ist der Widerstand zwischen den zwei Eckpunkten des Dreiecks, die nicht vom Zauberstab, der durch die Höhe symbolisiert wird, berührt werden?



32 Der Dunkle Lord hat einen neuen Zauberspruch erfunden, mit dem er die Gravitation abschalten kann. Im Augenblick klappt das Abschalten leider nur für eine kurze Zeit, aber er hat ohne Zweifel Größeres damit vor.

Jetzt möchte er von dir wissen (aus rein akademischem Interesse natürlich): Für wie lange müsste er die Gravitation der Sonne mindestens abschalten, damit die Erde unwiederbringlich in die Unendlichkeit davonfliegt?

33 Jakob verwendet eine alte elektrische Kochplatte für seine Kochexperimente. Die alte Kochplatte funktioniert viel besser als erwartet und heizt sich nach dem Einschalten auf eine astronomische Temperatur von 250 °C auf. Bei dieser Temperatur würde das Essen viel zu schnell anbrennen. Da die Regler der Kochplatte leider nicht mehr funktionieren, muss Jakob improvisieren, um die Kochplatte auf eine niedrigere Temperatur zu bringen. Er verwendet eine Sprühflasche mit einer speziellen Kühlflüssigkeit, die eine Temperatur von 20 °C hat, und sprüht sie mit einer konstanten Flussrate (Volumen pro Zeit) auf die heiße Kochplatte. Wie groß muss diese Flussrate sein, damit die Temperatur sich auf einen Wert von 150 °C einpendelt? Die Fläche der Kochplatte beträgt 0,1 m^2, und ihre Oberfläche ist durch den jahrelangen Gebrauch dauerhaft absolut schwarz geworden.

Die spezifische Wärmekapazität und die Dichte der speziellen Kühlflüssigkeit sind über den gesamten Temperaturbereich konstant, und sind gleich der spezifischen Wärmekapazität und Dichte von Wasser bei Raumtemperatur. Die Kühlflüssigkeit verdampft ebenso wie Wasser bei 100 °C *und hat die gleiche spezifische Verdampfungswärme.*

34 Jakob ist mit wertvoller Fracht in seinem PKW unterwegs – einer Hochzeitstorte in Form eines Rotationsparaboloids mit der Höhe H und dem Radius R an der Basis. Als er sich einer Kreuzung nähert, springt die Ampel plötzlich auf Rot und zwingt ihn zu einer Vollbremsung. Wie groß ist die maximale Bremsbeschleunigung, bei der die Torte gerade nicht umkippt?

Nimm an, dass die Torte sich durch den Bremsvorgang nicht verformt.

35 Am Ende ihrer Lebenszeit wird sich unsere Sonne in einen Weißen Zwerg verwandeln. Bei diesem Prozess stößt die Sonne eine Lage von Materie an ihrer Oberfläche radial in den Weltraum ab.

Nimm an, dass die Sonne eine rotierende Kugel mit einer Rotationsdauer von 28 Tagen ist, die aus einem homogenen kugelförmigen Kern und einer homogenen äußeren Hülle besteht. Das Masseverhältnis von Kern zu Hülle ist 1 : 1 und das Verhältnis der Dichten von Kern und Hülle ist 63 : 1. Wenn die Sonne stirbt, stößt sie ihre gesamte Hülle ab (dies geschieht unter Einfluss einer radialen Kraft), und der Kern kollabiert zu einem Weißen Zwerg – einer homogenen Kugel mit Radius 5000 km.

Was wird die Rotationsdauer des Weißen Zwergs sein?

36 Der Fluss solarer Neutrinos durch die Erde beträgt ca. $10^{15}\ m^{-2} \cdot s^{-1}$. Dirk baute einen riesigen mit Wasser gefüllten würfelförmigen Detektor mit einem Volumen von 1000 m^3. Er entdeckte, dass darin durchschnittlich pro Sekunde ein Neutrino eingefangen wird.

Was ist die mittlere freie Weglänge eines Neutrinos in Wasser?

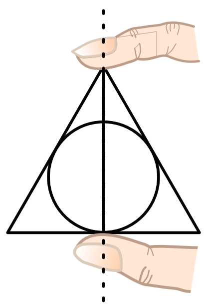
37 Nach den Olympischen Spielen waren wir fasziniert vom Pistolenschießen und bauten uns ein Luftdruckgewehr. Ein solches Luftdruckgewehr besteht aus einem Zylinder mit einem Volumen von $V = 100\ \mathrm{cm}^3$. Dieser Zylinder wird unter Standarddruck mit Luft gefüllt und mit einem Kolben der Masse mit $M = 1$ g verschlossen. Vor dem Schuss wird die Luft im Zylinder auf das Volumen $\frac{V}{16}$ komprimiert. Anschließend wird ein Projektil der Masse m vor dem Kolben platziert. Wenn man den Abzug betätigt, wird der Kolben gelöst, die Luft dehnt sich aus und beschleunigt das Projektil.

Um das Gewehr zu testen, engagierten wir zwei Schützen, Yusuf und Kim. Yusuf kam zum Schießplatz, lud die Waffe, drückte ab und ging. Als die zweite Testerin, Kim, eintraf, hatten wir jede Menge Zeit. Zwischen Laden und Schießen bedeckte sie zunächst ihr linkes Auge mit einer Klappe, so dass sie das Ziel nur mit ihrem rechten Auge sah. Dann platzierte sie vor ihrem rechten Auge eine Blende mit einer kleinen Öffnung, so dass sie das Ziel scharf sehen konnte. Während ihrer Vorbereitungen kühlte die Luft im Zylinder ab. Wir interessieren uns nun für das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Projektile von Yusuf und Kim.

Die während eines adiabatischen Prozesses geleistete Arbeit ist $W = \frac{p_0 V_0 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$, *wobei sich der Index* 0 *auf den Anfangszustand und der Index* 1 *auf den Endzustand bezieht. Luft ist ein zweiatomiges ideales Gas mit* $\kappa = 1{,}4$.

38 Sarah nimmt zum dritten Mal ihren Anhänger der Heiligtümer des Todes zur Hand. Sie hält ihn zwischen ihrem Daumen und Zeigefinger, sodass der Elderstab genau eine Linie zwischen den Fingern bildet und dreht den Anhänger. Wie groß ist das Trägheitsmoment für diese Achse?

Der Anhänger besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit einer Seitenlänge von a, dessen Inkreis und einer Höhe. Die Dichte aller Komponenten ist überall gleich und beträgt λ.



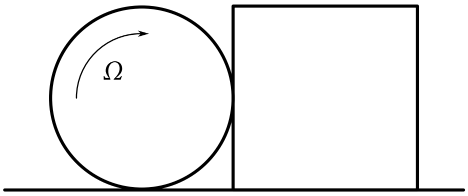
39 An jedem Geburtstag möchte Oma Julie „Happy Birthday" – gesungen von ihrer Großfamilie – hören. Damit sie das Lied gut hören kann, muss es in jener Lautstärke (gemessen in Dezibel) gesungen werden, die ihrem Alter in Jahren entspricht. Dafür mussten wir uns Jahr für Jahr mehr anstrengen. Letztes Jahr konnten wir nicht mehr lauter singen, deshalb haben wir die Hilfe unseres Nachbarn in Anspruch genommen, der gemessen in einer Entfernung von 1 m mit einer Schallintensität von 100 dB singen kann. Dieses Jahr stellten wir fest, dass selbst die Hilfe unseres Nachbarn nicht ausreichen würde.

Daher rückten wir in diesem Jahr Oma Julies Sessel zusätzlich 30 cm näher an die singenden Verwandten heran.

Wie alt wird Oma Julie dieses Jahr?

40 Danny, der Würfel, und Johny, der Zylinder, streiten sich mal wieder. Ohne Fäuste oder Beine verläuft der Kampf wie folgt: Johny versetzt sich in Drehung mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\Omega = 23\ \mathrm{s}^{-1}$, legt sich dann direkt neben Danny und beginnt, ihn in die Seite zu stoßen. Der kubische Danny ist ziemlich unbeeindruckt davon, herumgeschoben zu werden. Er stellt sich hingegen die Frage: Was ist die Höchstgeschwindigkeit die er erreichen kann, während Johny ihn schiebt?

Der Reibungskoeffizient zwischen Danny und dem Boden sowie zwischen Danny und Johny beträgt $f = 0{,}2$, und der Reibungskoeffizient zwischen Johny und dem Boden ist doppelt so groß. Alle Kanten von Danny, sowie Johnys Höhe und Durchmesser betragen 1 m, und beide wiegen 100 kg.



Lösungen

1 Du hast hoffentlich den versteckten IQ-Test bestanden und jedes Fruchtsymbol durch einen Buchstaben ersetzt. Zum Beispiel B – Banane, Z – Zitrone, T – Traube, M – Wassermelone und K – Kirsche. Die Monstergleichung lässt sich dann schreiben als

$$\frac{M(2B)^2}{2K^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{T}} = ?\ \mathrm{Wh}. \tag{1.1}$$

Zuerst ersetzen wir im Nenner K^2 mithilfe der Gleichung $\frac{B}{K^2} = T$ und dann lösen wir den Doppelbruch auf:

$$\frac{M(2B)^2}{2K^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{T}} = \frac{4MB^2}{\frac{3B}{2T}} = \frac{8}{3}\frac{MB^2T}{B}. \tag{1.2}$$

Wegen $MB^2T = Z$ vereinfacht sich der Bruch zu $\frac{8}{3}\frac{Z}{B}$. Setzen wir weiters $\frac{Z}{B} = 2{,}7\ \mathrm{kJ}$ ein, erhalten wir den Zahlenwert 7,2 kJ für den gesuchten Ausdruck. Um ihn in Wh umzuwandeln, erinnern wir uns an den Zusammenhang 1 Wh = 3600 J, was schließlich das Ergebnis 2 Wh liefert.

Du wirst dich in Zukunft hoffentlich nie wieder über Buchstaben in Gleichungen beschweren.

2 Beide Fahrer fahren mit konstanter Geschwindigkeit und haben daher zu jedem Zeitpunkt die gleiche Strecke zurückgelegt. Wenn Pato n-mal um den Kreisverkehr fährt, hat er eine Strecke von $n \cdot 100$ m zurückgelegt. Wir wissen, dass Josef beim Überholvorgang genau eine Runde weniger gefahren ist, also hat er zur gleichen Zeit eine Strecke von $(n-1) \cdot 120$ m zurückgelegt. Da die zurückgelegten Strecken gleich sein müssen, erhalten wir:

$$n \cdot 100\ \mathrm{m} = (n-1) \cdot 120\ \mathrm{m}, \tag{2.1}$$

was für $n = 6$ gilt.

3 Was passiert mit Martins Kaffee? Er wird anfangen, Wärme an den Aluminiumbehälter abzugeben, der sich dadurch erwärmt. Der Wärmeaustausch stoppt, sobald Kaffee und Behälter die gleiche Temperatur erreicht haben und die vom Kaffee abgegebene Wärme der vom Behälter aufgenommenen Wärme entspricht.

Das Volumen des Innenbehälters beträgt

$$V = \pi r^2 h \doteq 905\ \mathrm{ml}, \tag{3.1}$$

wobei r der Radius und h die Höhe des Behälters ist. Der Kaffee, dessen Dichte der von Wasser entspricht, wiegt daher $m_k = V\rho_{H_2O} \doteq 905$ g, seine spezifische Wärmekapazität ist c_{H_2O} und seine Temperatur ist von T_k auf eine niedrigere Temperatur T gesunken.

Dann gibt es noch den Behälter – einen Zylinder mit der Masse

$$m_{\mathrm{Al}} = (2\pi r^2 + 2\pi r h)\,\Delta h \rho_{\mathrm{Al}} \doteq 75\ \mathrm{g}, \tag{3.2}$$

wobei Δh die Wanddicke und ρ_{Al} die Dichte des Aluminiums ist.

Der Behälter, dessen spezifische Wärmekapazität c_{Al} ist, hat seine Temperatur von der Anfangstemperatur T_{Al} auf die gleiche Temperatur T erhöht. Die kalorimetrische Gleichung lautet daher:

$$m_k c_{\mathrm{H_2O}}(T_k - T) = m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}(T - T_{\mathrm{Al}}), \tag{3.3}$$

woraus folgt

$$T = \frac{m_k c_{\mathrm{H_2O}} T_k + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}} T_{\mathrm{Al}}}{m_k c_{\mathrm{H_2O}} + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}}. \tag{3.4}$$

Der Kaffee wird daher um $T_k - T \doteq 1{,}3\ ^\circ\mathrm{C}$ abkühlen.

4 Um Einheiten ineinander umzuwandeln, wie zum Beispiel Meter in Kilometer, können wir mit der Zahl 1, die in einer passenden Form mittels der Einheiten ausgedrückt wird, multiplizieren, also zum Beispiel

$$\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \tag{4.1}$$

So können wir z.B. 563 m in Kilometer umwandeln, indem wir schreiben

$$563\ \mathrm{m} = 563\ \mathrm{m} \cdot \underbrace{\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}}_{1} = \frac{563}{1000}\ \mathrm{km} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} = 0{,}563\ \mathrm{km}. \tag{4.2}$$

Genauso können wir auch die Einheit $\mathrm{m/s^2}$ in $\mathrm{km/h^2}$ umwandeln. Da $1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$ ist, können wir also $\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}$ und $\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}$ verwenden.

Die gesamte Rechnung ist dann

$$2\ \mathrm{m/s^2} = 2\ \mathrm{m/s^2} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3600^2}{1000} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{s}^2}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot \mathrm{km/h^2} = 25\,920\ \mathrm{km/h^2}. \tag{4.3}$$

5 Wenn das Wasser in die ungewöhnliche Glaskreation fließt, folgt es bestimmten Regeln:

1. Wenn es in einen tieferen Bereich fließen kann, tut es das auch.
2. Daher muss die mit der Umgebung in Kontakt stehende Wasseroberfläche überall auf gleicher Höhe liegen.
3. Am Anfang ist das Gefäß vollständig mit Luft gefüllt.

Wenn Wasser irgendwo hineinfließen soll, muss eine Öffnung vorhanden sein, wo die Luft entweichen kann. Fehlt diese, verhindert die Luft das weitere Eindringen von Wasser.

Schritt für Schritt, wenn wir Wasser einfüllen und diese Regeln beachten, erreichen wir den Füllstand, der in der Grafik 5.1 abgebildet wird.

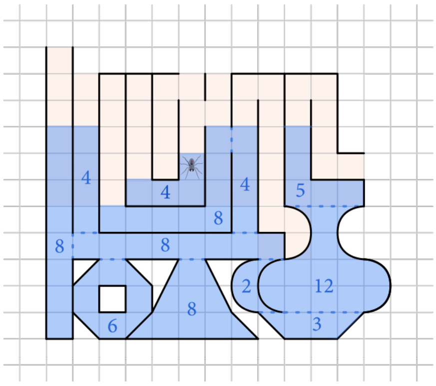


Abbildung 5.1: *Verteilung des Wassers in der Glaskreation*

Es bleibt also nur mehr das Volumen des eingefüllten Wassers zu berechnen. Sobald klar wird, dass die dreieckigen Flächenteile ein Volumen von 1 l oder 0,5 l haben und sich die von Viertelkreisbögen begrenzten Teile zu ganzen Quadraten ergänzen lassen, kann das Volumen des eingefüllten Wassers einfach ermittelt werden mit 72 l.

6 Lass uns zuerst eine Lösung auf einer flachen Erde finden. Wir zeichnen zwei Kreise um Rio mit Radien von 17 700 km und 18 600 km und versuchen dann, ein Punktpaar zu finden, dessen relative Entfernung am größten ist. Diese Punkte sind, ganz trivial, zwei Punkte auf den gegenüberliegenden Seiten von Rio, und ihre relative Entfernung ist die Summe ihrer Radien, also 36 300 km.

Auf einer realen sphärischen Erde sieht es ähnlich aus, jedoch können keine zwei Punkte weiter auseinander liegen als die Hälfte ihres Umfangs, also 20 000 km – andernfalls wäre es kürzer, sich umzudrehen und den anderen Weg zu nehmen. Die kürzere Entfernung ist dann das Komplement zum Umfang, was nur 40 000 km − 36 300 km = 3700 km beträgt.

Alternativ können wir erkennen, dass alle Punkte in einer Entfernung von x von Rio in einer Entfernung von $\pi R - x$ von dem antipodalen Punkt zu Rio (genau auf der anderen Seite des Planeten) liegen. Das bedeutet, sie liegen auf einem Kreis mit diesem Radius, und wir müssen ein Paar der am weitesten voneinander entfernten Punkte auf zwei Kreisen mit Radien von 1400 km und 2300 km finden, was wieder 3700 km ist.

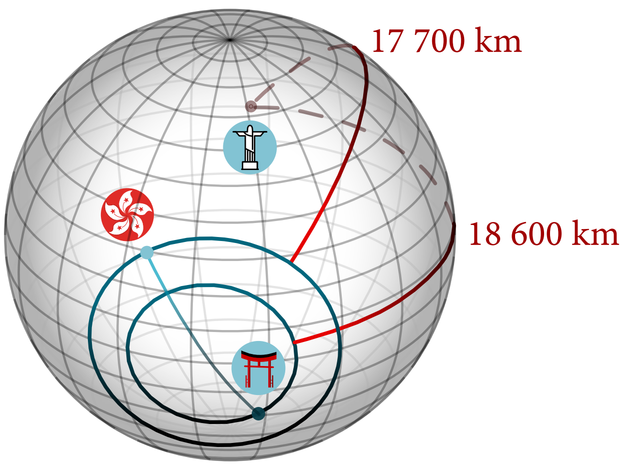


Abbildung 6.1: *Zwei mögliche Orte, an denen Tokio (Torii) und Hongkong (Blume) liegen könnten. Rio (die Christstatue) befindet sich auf der anderen Seite der Erde.*

7 Wir bezeichnen die Länge der Strecke mit $L = 300$ m und Theresas und Marias Beschleunigungen mit $a_\mathrm{T} = 8$ m/s und $a_\mathrm{M} = 9$ m/s.

Die Zeit t_T, die Theresa braucht, um die Ziellinie zu erreichen, kann mit Hilfe der Gleichung für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung,

$$L = \frac{1}{2} a_\mathrm{T} t_T^2, \tag{7.1}$$

durch Umformen hergeleitet werden; wir erhalten

$$t_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2L}{a_\mathrm{T}}}\,. \tag{7.2}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir die Fahrtzeit t_M, die Maria braucht, um die Zielline zu erreichen, nämlich

$$t_M = \sqrt{\frac{2L}{a_M}}\,. \tag{7.3}$$

Da Maria eine Sekunde später losfährt, müssen wir noch $\Delta t = 1$ s zu dieser Zeit hinzuzählen, bevor wir die Gesamtzeit vergleichen, die die beiden Fahrerinnen brauchen, um die Zielline zu erreichen.

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$(t_M + \Delta t) - t_T = 0{,}505 \text{ s}\,; \tag{7.4}$$

Theresa gewinnt also mit 0,505 s Vorsprung.

8 Die Nummern sind Potenzen von zwei, also muss der Wahrheitsgehalt aller Aussagen überprüft werden.

Schlauch (1)

Es gilt die Kontinuitätsgleichung: Was hineinfließt, muss auch wieder herausfließen. Der Volumenstrom ist konstant, weshalb bei kleinerem Querschnitt die Flüssigkeit schneller fließen muss. Die Aussage ist **falsch**.

Wirkung einer Kraft auf die Oberfläche eines geschlossenen Behälters (2)

Obwohl das Pascalsche Gesetz die Richtigkeit der Aussage suggeriert, muss zusätzlich zum Druck, der durch die auf die Oberfläche ausgeübte Kraft entsteht, das Gewicht der Flüssigkeit berücksichtigt werden. Dieses verursacht den hydrostatischen Druck, der sich mit der Tiefe ändert. Die Aussage ist daher **falsch**.

Körper auf einer Oberfläche (4)

Die Aussage ist **falsch**, wenn wir an eine Nadel denken, die von der Oberflächenspannung an der Oberfläche gehalten wird, oder ein Schiff aus Eisen.

Quecksilber in einem Messzylinder (8)

Der Druck am Boden des Zylinders ist hydrostatischer Druck, der vom Abstand des Bodens von der Quecksilberoberfläche abhängt. urch das Neigen des Zylinders steigt sein horizontaler Querschnitt und der Flüssgkeitsspiegel sinkt gleichzeitig. Der hydrostatische Druck sinkt ebenfalls und die Aussage ist daher wahr.

Schwimmender Eiswürfel (16)

Der Teil des Eiswürfels unter Wasser nimmt genauso viel Volumen ein, wie Wasser mit demselben Gewicht wie der Eiswürfel. Wenn der Eiswürfel schmilzt, nimmt das dadurch entstehende Wasser jenen Raum ein, den der Teil des Eiswürfels unter Wasser zuvor benötigte. Die Behauptung ist **falsch**.[1]

Verdunsten (32)

Die Aussage ist **falsch** – auch bei geringerer Temperatur als dem Siedepunkt entkommen die Moleküle mit der höchsten Energie der Flüssigkeitsoberfläche. Die Flüssigkeit verdunstet. Wenn der Siedepunkt erreicht wird, verdampft die Flüssigkeit vollständig.

Zwei Körper (64)

Obwohl Styropor eine wesentlich geringere Dichte als Holz hat, kann ein großer Holzstamm neben einer kleinen Styroporkugel schwimmen – und das ist ein direktes Gegenbeispiel zur getätigten Aussage, die daher **falsch** ist.

Als Summe der Nummern der wahren Aussagen ergibt sich die Antwort 8.

9 Wenn ein Lichtstrahl auf eine Oberfläche zwischen zwei durchsichtigen Medien trifft, wird er nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz aus seiner Richtung abgelenkt. Der Sonnenstrahl aus unserer Aufgabe trifft von einem Medium mit Brechungsindex 1 (Luft) auf ein Medium mit Brechungsindex n (Wasser) in einem Winkel von 45°. Daher gilt:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha} = n. \tag{9.1}$$

Wenn wir ein rechtwinkliges Dreieck betrachten, das vom Lichtstrahl, der Normalen zur Wasseroberfläche durch den Auftreffpunkt des Lichtstrahls und dem Boden des Schwimmbeckens begrenzt wird, können wir nach dem Lehrsatz des Pythagoras die Strecke, die der Lichtstrahl im Wasser zurücklegt, durch $\sqrt{d^2 + h^2}$ ausdrücken, wobei h die Tiefe des Schwimmbeckens und d die Entfernung zwischen der Normalen und dem Auftreffpunkt des Lichtstrahls am Schwimmbeckenboden ist. Daraus ergibt sich

$$\sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}, \tag{9.2}$$

[1] Wenn man bedenkt, dass die Temperatur des Wassers durch das schmelzende Eis sinkt und in der Folge auch das Volumen durch Wärmedehnung, kommt man zum Schluss, dass der Wasserspiegel sogar sinkt.

Durch Einsetzen in die vorhergehende Gleichung, können wir d ausdrücken:

$$d = \frac{h}{\sqrt{2n^2 - 1}}. \tag{9.3}$$

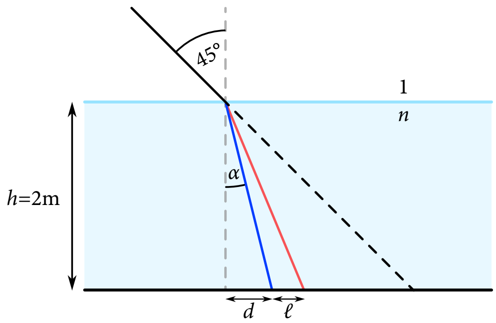


Abbildung 9.1: *Zwei verschieden stark gebrochene Lichtstrahlen, die den Boden des Schwimmbeckens erreichen.*

Einzelne Farben des Lichts unterscheiden sich (unter anderem) durch ihren Brechungsindex. Daher wird Licht jeder Wellenlänge in einem etwas anderen Winkel beim Übergang ins Wasser gebrochen. Aus der Angabe wissen wir, dass der Brechungsindex von Wasser für sichtbares Licht in einem bestimmten Intervall liegt. Wir bezeichnen dessen untere Grenze mit n_{min} und die obere Grenze mit n_{max}. Jeder der beiden Werte führt zu einem anderen Ergebnis für d. Die Differenz der beiden Werte ist die gesuchte Länge des Regenbogenstreifens am Schwimmbeckenboden

$$\ell = \left| \frac{h}{\sqrt{2n_{\text{min}}^2 - 1}} - \frac{h}{\sqrt{2n_{\text{max}}^2 - 1}} \right|. \tag{9.4}$$

Mit den gegebenen Werten erhalten wir $\ell \approx 13$ mm.

10 Im Tank befindet sich $m_\text{i} = 1$ kg Eis mit einer Dichte von $\rho_\text{i} = 916\ \text{kg/m}^3$ und daher einem Volumen von $V_\text{i} = m_\text{i}/\rho_\text{i} \doteq 1{,}092$ l.

Wenn wir das Gesamtvolumen des Tanks mit V bezeichnen, nimmt das Frostschutzmittel ein Volumen von $V_\text{a} = V - V_\text{i} \doteq 0{,}908$ l ein und besitzt damit eine Masse von $m_\text{a} = (V - V_\text{i})\rho_\text{a} \doteq 0{,}727$ kg. Der neue Gefrierpunkt ist der gewichtete Mittelwert mit den Massen der Komponenten als Gewichten, also

$$T = \frac{m_\text{i} T_\text{i} + m_\text{a} T_\text{a}}{m_\text{i} + m_\text{a}}, \tag{10.1}$$

wobei T_i und T_a die Gefrierpunkte von Wasser und Frostschutzmittel sind.

Mit den gegebenen Werten erhalten wir für den Gefrierpunkt eine Temperatur von $T \doteq -8{,}4$ °C.

11 Wann immer Adam oder der Fisch ein Stück des Apfels abbeißen, wird der Apfel aufgrund des Auftriebs eine neue Position finden, sodass der untergetauchte Teil des Apfels immer zwei Drittel seines Volumens ausmacht. Daher haben beide zu jedem Zeitpunkt etwas zu beißen, egal wie klein das verbleibende

Stück des Apfels ist. Da beide die ganze Zeit essen und gleichzeitig fertig sind, wird das Verhältnis der gegessenen Anteile durch das Verhältnis ihrer Bissgeschwindigkeiten bestimmt. Daher lautet die Antwort $\frac{3}{4}$.

12 Angenommen, Jeremys Geschwindigkeit ist v_0. Beim Bremsen auf einer horizontalen, ebenen Fläche bremst er mit konstanter Verzögerung a, sodass sich seine Geschwindigkeit $v(t)$ im Laufe der Zeit wie folgt ändert:

$$v(t) = v_0 - at. \tag{12.1}$$

Wir sehen, dass $v(t) = 0$ ist für $t = v_0/a$, was der Zeit entspricht, die zum Anhalten benötigt wird. Die zurückgelegte Strecke ist dann

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2, \tag{12.2}$$

was bedeutet, dass nach der Zeit $t = v_0/a$, also bevor Jeremy vollständig zum Stillstand kommt, er

$$s = \frac{1}{2}at^2, \tag{12.3}$$

zurückgelegt hat. Daraus lässt sich Jeremys Verzögerung leicht ausdrücken:

$$a = \frac{2s}{t^2}. \tag{12.4}$$

Einfache Trigonometrie sagt uns, dass Jeremys Beschleunigung auf einer unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigten Ebene $g \sin \alpha$ beträgt. Wenn diese Beschleunigung der Verzögerung von Jeremy entspricht, wird er nie anhalten. Für den Winkel α gilt daher

$$\frac{2s}{t^2} = g \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \frac{2s}{gt^2}. \tag{12.5}$$

13 Auch wenn die Schaltung seltsam erscheinen mag, das Ohmsche Gesetz ist hier dennoch ein gutes Werkzeug. In diesem speziellen Fall hängt der Widerstand im Stromkreis von der Stromstärke ab, die das Amperemeter anzeigt. Konkret: Wenn das Amperemeter anzeigt, dass ein Strom von k Ampere fließt, dann ist der Widerstand $4k\ \Omega$.

Aus dem Ohmschen Gesetz $U = RI$ folgt

$$9\ \mathrm{V} = 4k\ \Omega \cdot k\ \mathrm{A}, \tag{13.1}$$

and daraus,

$$k = \frac{3}{2}. \tag{13.2}$$

Das Amperemeter wird daher $\frac{3}{2}$ A anzeigen.

14 Da wir die Winkelgeschwindigkeit der Schallplatte kennen[2], können wir feststellen, dass sie nach 20 Minuten $20 \cdot 33⅓ = 666⅔$ Umdrehungen vollendet hat. In dieser Zeit bewegt sich die Nadel entlang der

[2] Wir hoffen, dass Patricks Scheibe tatsächlich eine Schallplatte war.

gesamten Rille, sodass die Rille sich 666⅔ Mal um das Zentrum der Scheibe windet. Da der Durchmesser der Scheibe 30 cm beträgt und die Rille 5 cm vom Zentrum entfernt endet, ist der gerillte Teil der Scheibe 15 cm − 5 cm = 10 cm breit.

Der Abstand zwischen zwei Windungen der Rille beträgt somit ungefähr

$$w \approx \frac{10\text{ cm}}{666\frac{2}{3}} = \frac{3}{20}\text{ mm} = 0{,}15\text{ mm}. \tag{14.1}$$

Die Fläche S, die von der Rille bedeckt wird, kann leicht als die Differenz der Fläche der gesamten Scheibe und dem nicht gerillten Teil um das Zentrum berechnet werden,

$$S \approx \pi\left((15\text{ cm})^2 - (5\text{ cm})^2\right) = 200\pi\text{ cm}^2. \tag{14.2}$$

Schließlich entwirren wir die Rille in die Form eines sehr langen Rechtecks. Wenn wir dessen Fläche und Breite kennen, ist die Länge ℓ gleich dem Quotienten dieser beiden Werte,

$$\ell \approx \frac{S}{w} = \frac{200\pi\text{ cm}^2}{0{,}15\text{ mm}} \approx 418{,}88\text{ m} \doteq 419\text{ m}. \tag{14.3}$$

15 Die Geschwindigkeit der Springerin während ihres Sprunges hat eine horizontale und eine vertikale Komponente. Diese Aufgabe lässt sich als vertikaler Wurf modellieren, die horizontale Komponente ist konstant und für die Lösung dieser Aufgabe nicht interessant.

Bezeichnen wir die Anfangsgeschwindigkeit der Springerin als v_0. Diese Geschwindigkeit ändert sich während dieser gleichförmig beschleunigten Bewegung linear, die Springerin wird mit der Gravitationsbeschleunigung g beschleunigt.

Zu Beginn hatte die Springerin eine Geschwindigkeit von v_0 und in dem Moment, in dem sie bei der Abwärtsbewegung auf der Höhe des Sprungbretts ist, beträgt ihre Geschwindigkeit $-v_0$.

Die Differenz zwischen diesen beiden Geschwindigkeiten beträgt daher $2v_0$ Die Springerin hat eine Zeit von $\frac{2v_0}{g}$ oberhalb des Sprungbretts verbracht. Das ist die Hälfte der gesamten Sprungzeit T, für die daher gilt

$$T = \frac{4v_0}{g}. \tag{15.1}$$

Drücken wir nun die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit Hilfe der Höhe des Sprungbretts $h = 10$ m aus. Wir starten in dem Moment, in dem die Springerin die Ebene des Sprungbretts passiert. Für ihre gleichmäßig beschleunigte Bewegung nach unten berechnen wir die Höhe durch

$$h = v_0\frac{T}{2} + \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2. \tag{15.2}$$

Nun setzen wir noch v_0 aus Gleichung 15.1 in Gleichung 15.2 ein. Daraus erhält man

$$h = \frac{gT^2}{4}, \tag{15.3}$$

woraus sich

$$T = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \approx 2\ \mathrm{s} \tag{15.4}$$

ergibt.

16 Betrachten wir zu Beginn die Geometrie des Anhängers: Die senkrechte Strecke im Dreieck (der Elderstab) ist die Schwerlinie, die Höhe und die Winkelsymmetrale des gleichseitigen Dreiecks (dem Tarnumhang). Die Länge dieser Strecke wird mit dem Satz von Pythagoras berechnet und beträgt $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, sind auch die anderen Schwerlinien gleich den Winkelsymmetralen. Daher ist der Schwerpunkt gleich dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises (dem Stein der Auferstehung). Sein Radius ist dann gleich einem Drittel der Schwerlinie, d. h. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Auf Grund der Symmetrie des Anhängers wissen wir, dass der Schwerpunkt auf der gegebenen Höhe liegt. Daher müssen wir nur die vertikale Position des Schwerpunkts berechnen. Wir können die Position des Schwerpunkts als das mit seiner Masse gewichtete Mittel der Positionen seiner Massenpunkte berechnen.

Der Einfachheit halber können wir den Punkt, von dem aus wir den Abstand zum Schwerpunkt messen, als Ursprung wählen. Da die Masse direkt proportional zur Länge des Drahtes ist, ist der Abstand des Schwerpunktes vom oberen Eckpunkt des Dreiecks (vom Scheitelpunkt)

$$x = \frac{m_\triangle x_\triangle + m_\circ x_\circ + m_| x_|}{m_\triangle + m_\circ + m_|} = \frac{3a\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\pi a}{\sqrt{3}}\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4}}{3a + \frac{\pi a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3}a \doteq 0{,}555a. \tag{16.1}$$

17 Die Abschussgeschwindigkeit des Projektils wird durch den Energieerhaltungssatz bestimmt. Zu Beginn befinden sich beide Körper in einer Höhe L über dem Boden und sind stationär. Ihre gesamte mechanische Energie E_0 besteht somit nur aus potentieller Energie, die wir nach Belieben wählen können, zum Beispiel in Bezug auf den Boden:

$$E_0 = mgL + MgL. \tag{17.1}$$

In dem Moment, in dem das Brett senkrecht steht, bewegen sich beide Körper mit der Geschwindigkeit v, aber das Gegengewicht liegt auf dem Boden und das Projektil befindet sich also in einer Höhe von $2L$. Die gesamte mechanische Energie beträgt daher

$$E_1 = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{17.2}$$

Auf Grund der Energieerhaltung gilt: $E_0 = E_1$, d. h.

$$MgL + mgL = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2, \tag{17.3}$$

Daraus können wir die Abschussgeschwindigkeit des Projektils ausdrücken:

$$v = \sqrt{2gL\frac{M - m}{M + m}}. \tag{17.4}$$

Die Richtung dieser Geschwindigkeit ist horizontal.

Ab diesem Zeitpunkt bewegt sich das Projektil entlang einer Parabel, da es in vertikaler Richtung durch die Schwerkraft beschleunigt wird. Wir wollen wissen, wie lange es dauert, aus einer Höhe von $2L$ zu Boden zu fallen. Das lässt sich einfach berechnen:

$$\frac{1}{2}gt^2 = 2L \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{4L}{g}}. \tag{17.5}$$

In horizontaler Richtung bewegt sich das Projektil mit konstanter Geschwindigkeit v und in der Zeit t legt es die Strecke s zurück:

$$s = vt = 2\sqrt{2\frac{M-m}{M+m}}L. \tag{17.6}$$

$\boxed{\textbf{18}}$ Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle drei Fahrer Entenhausen um 10:00 Uhr verlassen haben.

Wir bezeichnen die vier Spuren (von der langsamsten zur schnellsten) mit A, B, C und D; weiters mit a, b, c und d die Anzahl der Autos in der jeweiligen Spur, die in Entenhausen pro Minute abfahren.

Als erstes berechnen wir, wie lange die Reise in der jeweiligen Spur dauert: 5, 4, 3⅓ und 2,5 Stunden.

Donald, der in Spur B fährt, kommt um 14:00 an. Die Autos, die zur gleichen Zeit in Spur A (der langsamsten) ankommen, haben Entenhausen schon um 9:00 verlassen. Donald hat also auf seinem Weg alle Autos in Spur A überholt, die in Entenhausen zwischen 9:00 und 10:00 Uhr losgefahren sind – also $60a$ Autos.

Wie viele Autos hat Gustav überholt? Er kommt um 12:30 an und hat alle Autos in Spur C überholt, die zwischen 9:10 und 10:00 in Entenhausen losgefahren sind, also $50c$ Autos. Laut Aufgabenstellung ist diese Zahl 200, also gilt $50c = 200$. Wenn wir die selbe Analyse für Gustav und für Daisy für jede der Spuren rechts von ihnen machen und entsprechend den Information, die wir haben, die von ihnen überholten Autos zusammenzählen, erhalten wir schließlich den folgenden Satz von Gleichungen:

$$\begin{aligned} 50c &= 200, \\ 150a + 90b + 50c &= 620, \\ 100a + 40b \quad\quad\;\; &= 220. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Daraus können wir $a = 1$ bestimmen, also gilt $60a = 60$, d.h. Donald hat 60 Autos überholt.

$\boxed{\textbf{19}}$ Zwei der Einheiten, *Pferdelänge* und *Pferderation*, können direkt in SI-Einheiten umgewandelt werden, da ihre Dimensionen Meter bzw. reziproke Sekunden sind: - 1 *Pferdelänge* ζ ist 8 ft $\doteq$ 2,438 m und - 1 *Pferderation* δ ist $\frac{1{,}7\ \mathrm{kg}}{100\ \mathrm{kg}\cdot 1\ \mathrm{d}}$, oder zirka $1{,}97 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$. Eine *Pferdeleistung* ist, wie der Name schon sagt, eine Leistungseinheit und ihre Dimension muss der eines Watts entsprechen. Setzen wir in die gegebene Definition ein, so sehen wir, dass eine *Pferdeleistung* ψ 735,5 W entspricht. [3].

In Basiseinheiten ist die Dimension eines Watts gleich

$$\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m/s} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3. \tag{19.1}$$

[3] Oder 750 W, wenn wir $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ verwenden.

Um daraus eine Masseneinheit zu erhalten, müssen wir die Leistungseinheit durch das Quadrat einer Längeneinheit und durch die dritte Potenz einer reziproken Zeiteinheit dividieren. Dann gilt

$$1\ \text{Pferdemasse} = \frac{\psi}{\zeta^2\delta^3} \doteq \frac{735{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}}{(2{,}438\ \text{m})^2\cdot(1{,}97\cdot10^{-7}\ \text{s}^{-1})^3} \doteq 1{,}624\cdot10^{22}\ \text{kg}. \tag{19.2}$$

20 Unabhängig davon, wie Willi sich bewegt, müssen zwei Bedingungen auf jeden Fall erfüllt sein:

Willi läuft genau so lange, wie Kathi auf der Rolltreppe fährt. Er muss am Ende auf derselben Stufe wie Kathi stehen, also gleich oft die Rolltreppe rauf wie runter gelaufen sein.

Willis Geschwindigkeit aufwärts ist nur ein Drittel so groß wie abwärts. Die Gesamtzeiten für das Abwärts- und Aufwärtslaufen müssen sich indirekt dazu wie $6 : 2 = 45 : 15$ verhalten. Da Kathi offensichtlich 60 Sekunden lang auf der Rolltreppe steht, läuft Willi insgesamt 45 s aufwärts und 15 s abwärts.

Insgesamt legt er daher eine Strecke zurück von

$$45\ \text{s}\cdot 2\ \text{Stufen/s} + 15\ \text{s}\cdot 6\ \text{Stufen/s} = 180\ \text{Stufen}. \tag{20.1}$$

21 Zu jedem Zeitpunkt breitet sich Schall vom sich bewegenden Flugzeug in alle Richtungen mit der Schallgeschwindigkeit c relativ zur umgebenden Luft aus. Da sich das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit v größer als die Schallgeschwindigkeit bewegt, hat die Einhüllende der erzeugten Schallwelle (Schockwelle) die Form eines Kegels, der in Flugrichtung zeigt und einen Öffnungswinkel 2α aufweist, der sich aus $\sin\alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{3}$ ergibt. Die Kegelspitze bewegt sich in Richtung des Flugzeugs (gemeinsam mit der Schallquelle) mit der Geschwindigkeit v und der Kegelmantel breitet sich senkrecht dazu mit der Schallgeschwindigkeit c aus.

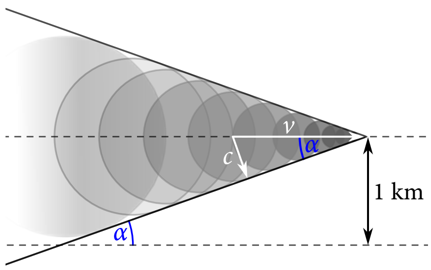


Abbildung 21.1: *Schockwelle aus Marks Flugzeug*

Wenn Sabine mit ihrem Jet in Ruhe wäre, würde der Überschallknall von Marks Flugzeug sie erreichen, sobald Mark eine Entfernung von

$$1\ \text{km}\cdot\cot\alpha = 1\ \text{km}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1} = 2\sqrt{2}\ \text{km} \tag{21.1}$$

vom Punkt ihrer geringsten Entfernung hat. Da sich Sabine aber mit der Geschwindigkeit v in die entgegengesetzte Richtung bewegt, legen beide nur die halbe Strecke $\sqrt{2}$ km zurück. Mark legt diesen Weg zurück in

$$\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/s}} = \sqrt{2}\,\mathrm{s}. \tag{21.2}$$

22 Bezeichnen wir die Masse des leeren Ballons mit den Frischvermählten mit M und die Masse des Wasserstoffs darin m_H, so beträgt die gesamte auf den aufgeblasenen Ballon wirkende Schwerkraft $(M + m_\mathrm{H})g$. Damit der Ballon schweben kann, muss eine nach oben gerichtete Auftriebskraft $V\rho_\mathrm{a}g$ auf ihn wirken, wobei V das Volumen des Ballons und ρ_a die Dichte der Luft ist.^[Wir gehen hier davon aus, dass das Volumen des Brautpaares im Vergleich zu diesem Volumen vernachlässigbar ist.

Kräftegleichheit gilt, wenn

$$(M + m_\mathrm{H})g = V\rho_\mathrm{a}g. \tag{22.1}$$

Wir substituieren in dieser Gleichung $V = \frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}$, wobei ρ_H die Dichte des Wasserstoffs ist, und erhalten

$$M + m_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}\rho_\mathrm{a}, \tag{22.2}$$

und daraus kann man die Masse des Wasserstoffs wie folgt ausdrücken:

$$m_\mathrm{H} = \frac{M}{\frac{\rho_\mathrm{a}}{\rho_\mathrm{H}} - 1}. \tag{22.3}$$

Nun kennt man die Dichte von Wasserstoff unter Standardbedingungen $\rho_\mathrm{H} = 0{,}09\ \mathrm{kg/m^3}$ oder verwende die Tatsache, dass unter Standardbedingungen ein mol eines Gases ein Volumen von 22,4 l einnimmt, d. h. dieses Gas hat ein molares Volumen von $V_\mathrm{m} = 22{,}4\ \mathrm{l/mol}$.

Daraus ergibt sich die Dichte von Wasserstoff:

$$\rho_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{H}}{V} = \frac{m_\mathrm{H}}{nV_\mathrm{m}} = \frac{M_\mathrm{H}}{V_\mathrm{m}}, \tag{22.4}$$

wobei $M_\mathrm{H} = 2\ \mathrm{g/mol}$ die molare Masse von Wasserstoff ist.

Aus Gleichung 22.3 folgt dann

$$m_\mathrm{H} = \frac{M}{\frac{\rho_\mathrm{a}V_\mathrm{m}}{M_\mathrm{H}} - 1} \doteq 73{,}7\ \mathrm{kg}, \tag{22.5}$$

und daher beträgt die Menge an benötigtem Wasserstoff

$$n_\mathrm{H} = \frac{M}{\rho_\mathrm{a}V_\mathrm{m} - M_\mathrm{H}} \doteq 36{,}9\ \mathrm{kmol}. \tag{22.6}$$

Dieser Wasserstoff wurde durch Elektrolyse hergestellt. Danach wird er von den Frischvermählten wieder verbrannt, was der gegenteilige Prozess zur Elektrolyse ist. Wenn man durch Verbrennung eines Mols Wasserstoff die Energie H erhält, so erfordert seine Herstellung in einer idealen Welt auch die Energiemenge H. Die Frischvermählten leben jedoch nicht in einer solchen Welt, und ihre Elektrolyse hat eine Wirksamkeit von η, das heißt, die benötigte Energiemenge, um ein mol Wasserstoff zu erhalten, beträgt $\frac{H}{\eta}$. Für n_H ist das die Energie

$$E = \frac{H}{\eta} n_{\mathrm{H}} = \frac{H}{\eta} \frac{M}{\rho_{\mathrm{a}} V_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{H}}}, \tag{22.7}$$

was für die gegebenen Werte ungefähr 21 GJ oder 5855 kWh. Bei dem Preis für elektrische Energie, den die Neuvermählten zahlen, kostet diese Energiemenge 1171 €.

23 Je zwei Paare von Querstreben sind durch eine widerstandslose Sprosse miteinander verbunden. Daher können wir die Widerstandsleiter in 99 in Serie geschaltete Parallelschaltkreise aufteilen, deren Gesamtwiderstand gesucht ist. Der Widerstand des n-ten Abschnitts der Leiter lässt sich mit der Formel für die Parallelschaltung von Widerständen berechnen zu

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega \parallel \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,\Omega. \tag{23.1}$$

Dadurch vereinfacht sich die Schaltung zu 99 in Serie geschalteten Widerständen, deren Summe zu bilden ist. Das sieht zwar nicht besonders einfach aus, glücklicherweise ist aber die einzig sinnvolle Umformung, die wir vornehmen können, jeden der Brüche mit einem geeigneten Faktor zu erweitern, um den Nenner wurzelfrei zu machen:

$$R = \sum_{n=1}^{99} R_n = \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \right) \Omega = \sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \Omega. \tag{23.2}$$

Dieser Ausdruck ist eine sogenannte Teleskopsumme: Bis auf den letzten positiven und den ersten negativen Term heben sich alle anderen Terme paarweise auf, und wir erhalten das Ergebnis

$$\sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \Omega = \left(\sqrt{100} - \cancel{\sqrt{99}} + \cancel{\sqrt{99}} - \sqrt{98} + \ldots - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1} \right) \Omega = 10\,\Omega - 1\,\Omega = 9\,\Omega. \tag{23.3}$$

24 Der Meeresspiegel verhält sich im Laufe der Zeit wie eine Sinusfunktion, also zeichnen wir eine solche: die Sinusfunktion hat eine Periode von 2π; in unserem Fall beträgt die Periode 12 h.

Die Frage ist nun, für welchen Anteil von Argumenten (Werten auf der horizontalen Achse) die Amplitude größer als $\frac{2}{3}A$ ist. Dieser relative Anteil hängt nicht davon ab, ob die Periode 2π or 12 h ist – also zeichnen wir der Einfachheit halber eine Sinusfunktion mit einer Periode von 2π.

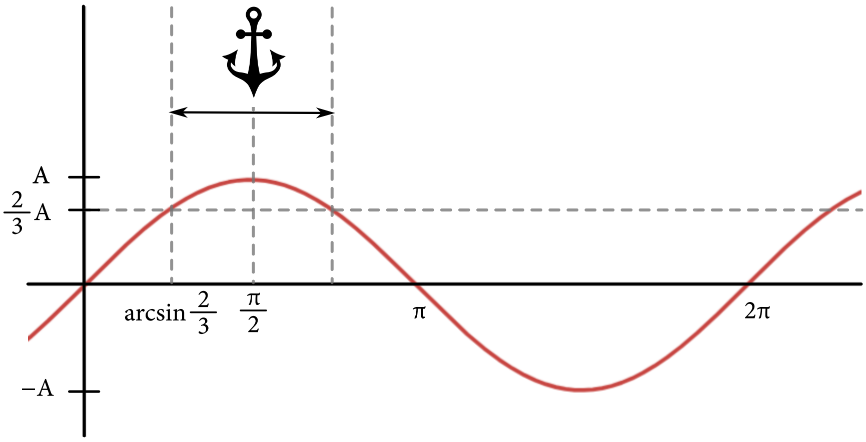


Abbildung 24.1: *Der Verlauf des Meeresspiegels, die Zeit, zu der man am Pier anlegen kann, ist gekennzeichnet*

In der Abbildung sieht man, dass wir uns dafür interessieren, wann die Funktion den Wert $\frac{2}{3}A$ erreicht. Diesen Zeitpunkt kann man als $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ exakt berechnen.

Welcher Anteil einer Periode der Länge 2π liegt zwischen $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ und $\frac{\pi}{2}$? Es ist

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi}. \tag{24.1}$$

Davon gibt es zwei Zeitintervalle, also beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \doteq 0{,}267\,72 \doteq 26{,}8\,\%. \tag{24.2}$$

$\boxed{25}$ Vom Mittelpunkt der Erde betrachtet liegen die beiden Punkte (Vogelnest und Maulwurfshügel) um einen Winkel α auseinander. Der Abstand, den Veronika Vogel misst, ist $R\alpha$ (die Länge des Kreisbogens), wobei R der Erdradius ist. Der Abstand, den Manuel Maulwurf misst, lässt sich aus dem entsprechenden gleichschenkligen Dreieck mit Öffnungswinkel α bestimmen und ist

$$2R\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{25.1}$$

Diese zwei Längen sollen sich genau um $\Delta\ell = 1$ m unterscheiden. Es muss also gelten

$$R\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2} + \Delta\ell. \tag{25.2}$$

Wir müssen diese Gleichung nach α auflösen. Das ist nicht einfach – tatsächlich ist es sogar unmöglich, eine geschlossene Form für das Ergebnis anzugeben. Wir müssen uns daher mit einer näherungsweisen Lösung zufrieden geben, z.B. indem wir uns durch numerisches Einsetzen schrittweise an das Ergebnis herantasten, oder indem wir die Taylorreihe des Sinus verwenden, nämlich

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots . \tag{25.3}$$

Da $\Delta\ell$ klein ist (verglichen mit dem Erdradius), erwarten wir, dass auch der Winkel α klein ist. Es sollte also reichen, nur die ersten Terme in 25.3 zu verwenden. Wenn wir nur den ersten Term verwenden, $\sin x \approx x$, erhalten wir $\alpha \approx \alpha + \Delta\ell$ – diese Näherung ist also zu ungenau. Wir nehmen also noch den nächsten Term mit, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, und erhalten

$$R\alpha = R\alpha - R\frac{\alpha^3}{24} + \Delta\ell, \tag{25.4}$$

woraus wir durch Umformen

$$R\alpha = R\sqrt[3]{\frac{24\,\Delta\ell}{R}} = \sqrt[3]{24R^2\,\Delta\ell} \tag{25.5}$$

erhalten.

Dies ist gerade der gesuchte Abstand, den Veronika Vogel gemessen hat. Einsetzen ergibt 99,2 km.

26 Auf Adam wirken in diesem Problem nur zwei Kräfte: die Gravitationskraft mit der Größe mg und die Zugkraft der Ketten der Schaukel. Deren Größe ist variabel, jedoch zeigt sie immer zentripetal, also in Richtung der Aufhängung. Die g-Kraft, die Adam empfindet, ist gleich der Summe aller Kontaktkräfte, was in diesem Fall nur die Zugkraft der Ketten beinhaltet. Wir müssen daher lediglich deren Größe am tiefsten Punkt bestimmen. An den Positionen mit der größten Auslenkung seiner Bahn bewegt sich Adam überhaupt nicht. Da er dort jedoch nicht bleibt, muss auf ihn eine Kraft wirken; und da er an die Schwingungsbahn gebunden ist, muss diese Kraft tangential zur Bahn verlaufen und zurück in Richtung des tiefsten Punktes zeigen. Gleichzeitig muss die Zugkraft $m \cdot 0{,}5\,g$ betragen, und die Gravitationskraft ist wie immer mg.

Wenn wir die wirkenden Kräfte für einen allgemeinen Winkel der maximalen Auslenkung α, skizzieren, sehen wir, dass die Größe der zentripetalen Kraft $mg\cos\alpha$ ist. Das bedeutet, dass in Adams Fall α 60° betragen muss, da $\cos 60° = 0{,}5$.

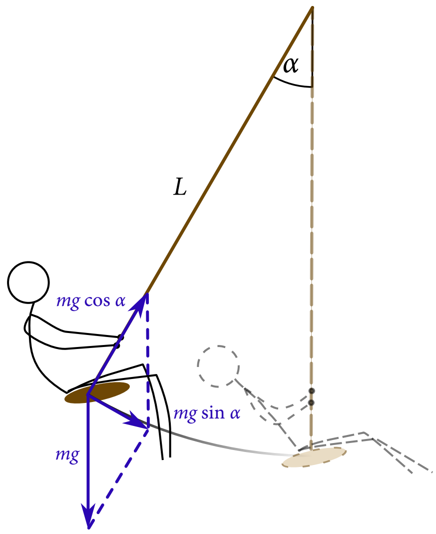


Abbildung 26.1: *Kräfte, die bei maximaler Auslenkung auf Adam wirken*

Nun müssen wir Adams Geschwindigkeit am tiefsten Punkt berechnen. Diese ergibt sich aus der Umwandlung der Differenz der potenziellen Energien zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt seiner Bahn in kinetische Energie:

$$\Delta U = mg(L - L\cos 60^\circ) = mg\frac{L}{2}, \tag{26.1}$$

woraus folgt

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL}. \tag{26.2}$$

Schließlich bestimmen wir die Größe der Zugkraft der Ketten und die entsprechende g-Kraft. Diese setzt sich wieder aus zwei Komponenten zusammen: der Zentripetalkraft, die dafür sorgt, dass Adam auf der Bahn verbleibt und der Reaktion der Schaukel auf Adams Gewichtskraft. Ihre Summe ist

$$F = ma = \frac{mv^2}{L} + mg = mg + mg = 2mg. \tag{26.3}$$

und die Größe der scheinbaren Beschleunigung, die Adam empfindet, beträgt somit

$$a = \frac{2mg}{m} = 2\,g. \tag{26.4}$$

27 Das Faradaysche Induktionsgesetz sagt aus, dass die induzierte Spannung gleich der negativen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife ist. Der magnetische Fluss wird berechnet durch $\Phi = BS\cos\theta$, wobei B die Größe des Magnetfeldes ist, das in einem Winkel θ durch die Fläche S der Leiterschleife geht.

In unserem Fall ist S die von der Halskette aufgespannte Fläche. Offensichtlich liegt diese um Kates Hals, passt sich dessen Form an und ändert ihre Fläche nicht. Die magnetische Induktion B ist ebenfalls konstant laut Angabe. Und da Kate sich nur um die Achse des Karussells dreht, ändert sich auch der Winkel θ nicht.

Alles in allem bedeutet das, dass sich der magnetische Fluss durch Kates Halskette nicht mit der Zeit ändert und deshalb keine Spannung und in der Folge auch keine Stromstärke induziert werden.

28 Wir bezeichnen die Grundfläche des Schwimmers mit S_s, seine Dichte mit ρ_s und sein Volumen mit V_s, weiters die Fläche der Öffnung am Boden mit S_o und die Länge der Schnur mit ℓ. Zudem sei h die Höhe des Wassers (vom Boden ab gemessen) in der Grenzsituation, wenn der Stöpsel gerade eben aufgeht. Der Teil des Schwimmers, der dann unter Wasser ist, hat dann die Höhe $v = h - \ell$.

Die Kräfte, die auf den Schwimmer wirken, müssen im Gleichgewicht sein. Es sind dies die Gewichtskraft F_G des Schwimmers, die auf ihn wirkende Auftriebskraft F_a und die Kraft F, mit der der Schwimmer an der Schnur zieht. Somit gilt

$$F_G + F = F_a. \tag{28.1}$$

Konkret haben wir $F_G = HS_s\rho_s g$ und $F_a = vS_s\rho_w g$, wobei ρ_w die Dichte des Wassers ist.

Im Grenzfall, in dem der Stöpsel gerade eben aufgeht, ist die auf die Schnur wirkende Kraft genau gleich der Kraft, die der Wasserdruck p am Boden des Gefäßes auf die Öffnung ausübt, d.h. $F = pS_o$. Der Wasserdruck in einer Tiefe h ist $p = \rho_w gh$, und somit gilt $F = \rho_w ghS_o$. Wenn wir all dies in 28.1 einsetzen, erhalten wir

$$HS_s\rho_s g + hS_o\rho_w g = (h - \ell)S_s\rho_w g. \tag{28.2}$$

Was sind jetzt das kleinste und das größte Volumen and Wasser, das wir auf diese Weise abmessen können? Das kleinste Volumen können wir erreichen, indem wir den Schwimmer möglichst nah am Boden anbinden, also $\ell = 0$ wählen (anders ausgedrückt macht die Herleitung der Gleichung 28.2 nur für $\ell \geq 0$ Sinn). In diesem Fall erhalten wir nach Einsetzen von $\ell = 0$ in 28.2 und Umformen

$$h = \frac{S_s}{S_s - S_o}\frac{\rho_s}{\rho_w}H \tag{28.3}$$

und entsprechend als minimales Volumen

$$V_{\text{min}} = (S - S_s)h = \frac{S - S_s}{S_s - S_o}\frac{\rho_s}{\rho_w}V_s \tag{28.4}$$

(wobei wir im letzten Schritt $HS_s = V_s$ ersetzt haben).

Das größtmögliche Volumen erreichen wir, wenn der Schwimmer ganz unter Wasser ist (anders ausgedrückt gilt die Herleitung der Formel 28.2 nur bis zu diesem Punkt, und wenn wir darüber hinaus mehr Wasser einfüllen, würde sich lediglich die Kraft auf den Stöpsel erhöhen, aber nicht die Auftriebskraft – wenn er also an diesem Punkt noch nicht aufgegangen ist, wird er gar nicht mehr aufgehen). Der Punkt, an dem der Schwimmer gerade ganz unter Wasser ist, ist erreicht, wenn $h = H + \ell$. Wenn wir dies in 28.2 einsetzen und nach ℓ auflösen, erhalten wir

$$\ell = \left(\frac{S_s}{S_o}\frac{\rho_w - \rho_s}{\rho_w} - 1\right)H, \tag{28.5}$$

was einem maximalen Volumen

$$V_{\text{max}} = S\ell + (S - S_s)H = \left[\frac{S}{S_o}\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_w}\right) - 1\right]V_s, \tag{28.6}$$

entspricht, wobei wir wieder $HS_s = V_s$ verwendet haben.

Laut Aufgabenstellung ist $S_o = \frac{S}{4}$ und $S_s = 0{,}99S$, und außerdem $\rho_s/\rho_w = \frac{1}{2}$. Mit diesen Werten erhalten wir $V_{\text{min}} = \frac{1}{148}\,\text{l}$ und $V_{\text{max}} = 1\,\text{l}$.

29 Laut Aufgabenstellung trifft das langsamere Pendel mit der Periode T_1 bei jeder dritten maximalen Auslenkung nach rechts auf das schnellere mit der Periode T_2 (es gilt also $T_1 > T_2$). In dieser Zeit führt das langsamere Pendel drei Schwingungen aus und das schnellere eine unbekannte Anzahl von n Schwingungen. Daher gilt

$$3T_1 = nT_2. \tag{29.1}$$

Die zweite wichtige Information ist, dass in der Zeit, in der das schnellere Pendel fünf Schwingungen ausführt, das langsamere m Schwingungen ausführt:

$$mT_1 = 5T_2. \tag{29.2}$$

Es spielt keine Rolle, ob sich die Pendel links oder rechts treffen. Beide führen eine einfache harmonische Bewegung aus und, wenn sie sich wie beschrieben links und rechts treffen, treffen sie sich auf beiden Seiten nach jeweils fünf bzw. drei Perioden. Daher ist es auch unerheblich, ob Daniel die Pendel am Anfang nach links oder rechts ausgelenkt hat.

Wenn wir die Gleichungen 29.1 und 29.2 dividieren, erhalten wir

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad mn = 15. \tag{29.3}$$

Eine rechnerische Lösung dieser Gleichung ist $m = 15$, $n = 1$, die aber keinen Sinn macht – aus dem ersten Absatz geht hervor, dass, wenn das langsamere Pendel 3-mal hin und her schwingt, das schnellere n Perioden dafür benötigt, sodass n größer als 3 sein muss. Die zweite Lösung von Gleichung 29.3 ist $m = 3$, $n = 5$, die alle Bedingungen erfüllt. Das bedeutet, dass die Pendel Schwingungsdauern im Verhältnis von 3 : 5 besitzen.

Die Periode eines Fadenpendels mit der Länge ℓ beträgt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{29.4}$$

Wenn wir diesen Zusammenhang für beide Pendel mit den Längen ℓ_1 und ℓ_2 anschreiben und das Verhältnis der Schwingungsdauern berücksichtigen, ergibt sich

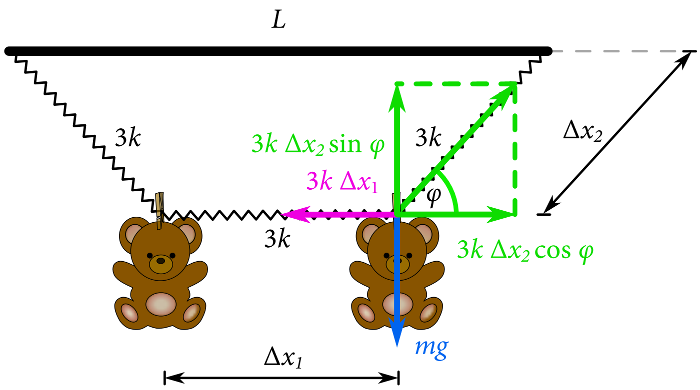
$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}. \tag{29.5}$$

Aus der Angabe geht hervor, dass $\ell_1 = 10$ cm ist, und aus Gleichung 29.5 erhalten wir

$$\ell_2 = \ell_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \tag{29.6}$$

was für das Verhältnis $T_2 : T_1 = 3 : 5$ das Ergebnis $\ell_2 = 3{,}6$ cm liefert.

30 Wenn wir eine Feder mit Federkonstante k haben und sie in drei gleiche Teile teilen, entspricht jedes der Drittel einer Feder mit Federkonstante $3k$: Wenn wir die Feder mit einer Kraft F dehnen und sie sich um dabei um $\Delta\ell$ ausdehnt, gilt $\frac{F}{\Delta\ell} = k$. Jedes Drittel dehnt sich dann um $\frac{\Delta\ell}{3}$ aus, was einer Federkonstanten von $\frac{F}{\Delta\ell/3} = 3k$ entspricht.



Betrachten wir nun den Punkt, an dem das rechte Plüschtier aufgehängt ist. Hier wirken drei Kräfte. Erstens die Schwerkraft des Plüschtiers, die Betrag mg hat und senkrecht nach unten zeigt. Zweitens die Kraft vom Teil der Feder, der die beiden Plüschtiere verbindet. Diese Kraft zeigt waagerecht nach links und hat den

Betrag $3k\,\Delta x_1$. Schließlich drittens die Kraft vom Teil der Feder, der zum rechten Aufhängungspunkt geht. Diese Kraft hat den Betrag $3k\,\Delta x_2$ und wirkt in einem Winkel φ zur Waagerechten. Wir können sie in eine horizontale Komponente mit Betrag $3k\,\Delta x_2 \cos\varphi$ und eine vertikale Komponente mit Betrag $3k\,\Delta x_2 \sin\varphi$ zerlegen.

Im Gleichgewicht müssen sowohl die horizontalen als auch die vertikalen Kräfte jeweils gleich sein. Da der gesuchte Höhenunterschied h genau $h = \Delta x_2 \sin\varphi$ ist, reicht es, die Gleichheit der vertikalen Kräfte zu verwenden,

$$3k\,\Delta x_2 \sin\varphi = mg,$$

um

$$h = \Delta x_2 \sin\varphi = \frac{mg}{3k} \tag{30.1}$$

zu erhalten.

31 Wie wir bereits in der Lösung zur Aufgabe 16 gesehen haben, ist die Höhe des Dreiecks $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, der Radius des Kreises beträgt $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, und der Kreismittelpunkt ist identisch mit dem Schwerpunkt des Dreiecks.

Als erstes zeigen wir, dass durch die Höhe des Dreiecks kein Strom fließt. Dies lässt sich mit der Achsensymmetrie des Anhängers argumentieren. Man kann aus ihr unmittelbar folgern, dass alle Punkte entlang der Höhe dasselbe elektrische Potential aufweisen müssen, die Spannung zwischen ihnen als Potentialdifferenz null ist und daher auch kein Strom fließt. Für die Vorstellung einfacher ist der Gedanke, dass wir eine Spannungsquelle an die beiden Kontaktpunkte anschließen und so einen Stromfluss erzeugen. Wenn wir die Pole vertauschen, fließen nun alle Ströme in entgegengesetzter Richtung. Durch die Symmetrie hat sich aber – von der Rückseite betrachtet – durch die Umpolung nichts geändert. Entlang der Höhe fließt der Strom nach wie vor in dieselbe Richtung. Das bedeutet, dass für die zugehörige Stromstärke $I = -I$ gilt, was nur für $I = 0$ der Fall sein kann.

Analog folgt aus der Achsensymmetrie, dass zwischen dem Kreis und dem Dreieck über den Kontaktpunkt des Kreises mit der Basis des Dreiecks kein Strom fließt. Die nicht stromführenden leitenden Verbindungen können wir weglassen, ohne die Stromflüsse zu verändern, und dadurch eine vereinfachte Ersatzschaltung gewinnen. Das Ergebnis ist die in abbildung 31.1 ersichtliche Widerstandskombination.

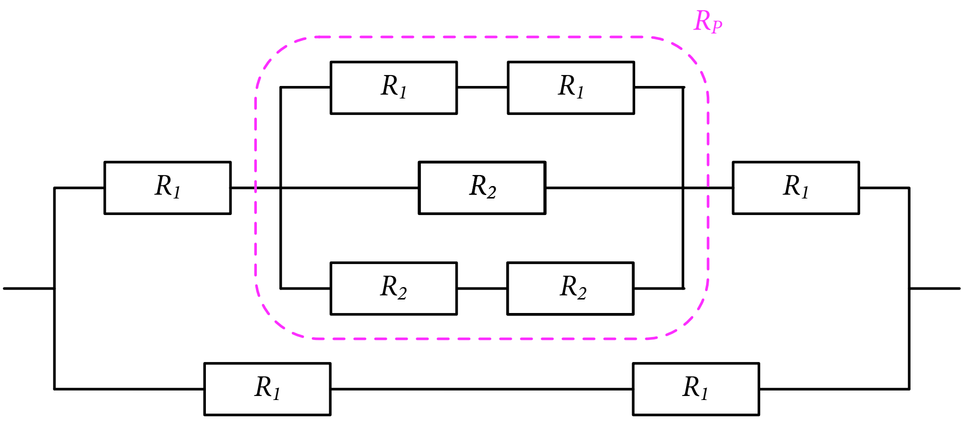


Abbildung 31.1: *Ersatzschaltbild der Widerstände in Sarahs Anhänger*

In der Abbildung wurden $R_1 = \frac{\lambda a}{2}$ für den elektrischen Widerstand einer halben Dreiecksseite und $R_2 = \frac{a\pi\lambda}{3\sqrt{3}}$ für den elektrischen Widerstand eines Drittelkreisbogens gewählt. Das Ersatzschaltbild ist lediglich eine Kombination aus Serien- und Parallelschaltungen elektrischer Widerstände, deren Gesamtwiderstand wir nach den bekannten Regeln berechnen können:

Der elektrische Widerstand in Serie geschalteter Einzelwiderstände ist die Summe ihrer elektrischen Widerstände. Der Kehrwert des elektrischen Widerstands parallel geschalteter Widerstände ist die Summe der Kehrwerte ihrer elektrischen Widerstände.

Wenn wir den Ersatzwiderstand der inneren Parallelschaltung aus drei Leiterzweigen mit R_P bezeichnen, erhalten wir durch Anwenden von Regel 2:

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2} = \frac{3R_1 + R_2}{2R_1R_2} \quad \Rightarrow \quad R_P = \frac{2R_1R_2}{3R_1 + R_2}. \tag{31.1}$$

Schließlich folgt damit für den Gesamtwiderstand R des Anhängers:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1 + \frac{2R_1R_2}{3R_1+R_2}} = \frac{6R_1 + 3R_2}{2R_1(3R_1 + 2R_2)} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2}{3}\frac{3R_1 + 2R_2}{2R_1 + R_2}R_1 = \frac{\lambda a}{6}\frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \doteq 0{,}563\lambda a. \tag{31.2}$$

32 Sobald die Gravitationskraft der Sonne auf die Erde verschwindet, wird sich die Erde geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegen (also mit der Geschwindigkeit und Richtung, die sie auf ihrer ursprünglichen Umlaufbahn hatte). Die Trajektorie der Erde wird also einer Tangente an die ursrpüngliche Umlaufbahn folgen.

Je nachdem, wann die Gravitationskraft wieder angeschaltet wird, können zwei Dinge passieren: Entweder die Erde wird wieder in eine elliptische Umlaufbahn um die Sonne eingefangen, oder sie ist schon zu weit weg dafür und entfernt sich unendlich weit von der Sonne.

Die beiden Fälle unterscheiden sich durch das Vorzeichen der Gesamtenergie (also der Summe aus der potentiellen Energie im Gravitationsfeld der Sonne und der kinetischen Energie der Erde): Wenn die Gesamtenergie positiv ist, hat die Erde genügend kinetische Energie, um sich unendlich weit von der Sonne zu entfernen (wo die potentielle Energie Null ist), andernfalls nicht.

Der kritische Abstand r, von dem an die Erde der Sonne entkommt, ist also genau dort, wo die Gesamtenergie Null wird, d.h.

$$T + U(r) = 0, \tag{32.1}$$

wobei $T = \frac{m_♁ v^2}{2}$ die kinetische Energie und

$$U(r) = -\frac{GM_\odot m_♁}{r} \tag{32.2}$$

die potentielle Energie der Erde im Abstand r von der Sonne bezeichnet.

Ohne Gravitationskraft bewegt sich die Erde mit konstanter Geschwindigkeit und somit konstanter kinetischer Energie. Diese Geschwindigkeit v können wir aus der ursprünglichen kreisförmigen Umlaufbahn mit Radius d bestimmen. Da auf einer kreisförmigen Umlaufbahn Graviationskraft und Fliehkraft gleich sind, haben wir

$$\frac{v^2}{d} = \frac{GM_\odot}{d^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_\odot}{d}. \tag{32.3}$$

Wenn wir die Gleichungen 32.2, 32.3 in Gleichung 32.1 einsetzen und durch $m_♁$ Dividieren, erhalten wir (nach Gleichsetzen und Dividieren durch $GM_\odot$)

$$\begin{aligned} \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{v^2}{2}, \\ \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{GM_\odot}{2d} \qquad \Rightarrow \qquad r = 2d. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Die Erde muss also mindestens doppelt soweit von der Sonne entfernt sein wie zu dem Zeitpunkt, als die Gravitation abgeschaltet wurde, um dem Schwerefeld der Sonne zu entkommen. Da sie sich aber nicht radial von der Sonne wegbewegt, sondern entlang einer Tangente and die ursprüngliche Umlaufbahn mit Radius d, müssen wir den Satz den Pythagoras verwenden, um die von der Erde dabei zurückgeleget Entfernung L zu bestimmen, nämlich $L = \sqrt{(2d)^2 - d^2} = \sqrt{3}d$.

Wir können jetzt mit Hilfe der Formel 32.3 für die Geschwindigkeit v die nötige Zeit $t = L/v$ berechnen. Um dazu nicht die G, $M_\odot$ und d verwenden zu müssen, können wir benutzen, dass ein voller Umlauf der Erde genau ein Jahr dauert; somit ist die Geschwindigkeit der Erde also

$$v = \frac{2\pi d}{1\,\mathrm{a}}. \tag{32.5}$$

Der Dunkle Lord muss die Gravitation also für mindestens

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{3}d}{2\pi d} \cdot 1\,\mathrm{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\mathrm{a} \doteq 101\,\mathrm{d} \tag{32.6}$$

oder etwas weniger als drei Monate abgeschaltet lassen.

33 Ohne Kühlflüssigkeit gibt die Kochplatte ihre Energie bei solch hohen Temperaturen als Strahlungswärme ab. Im thermischen Gleichgewicht, wenn die Kochplatte sich auf die Temperatur T_0 aufgeheizt hat, ist die abgestrahlte Wärme gleich der Leistung der Kochplatte. Da sie absolut schwarz ist, ist die abgestrahlte Leistung durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz gegeben,

$$P = S\sigma T_0^4, \tag{33.1}$$

wobei S die Fläche der Kochplatte ist und σ die Stefan-Boltzmann-Konstante.

Wenn die Platte mittels der Flüssigkeit gekühlt wird, wird ein Teil P' dieser Leistung zum Erwärmen und Verdampfen der Flüssigkeit verwendet. Somit gilt

$$P = S\sigma T_1^4 + P', \tag{33.2}$$

wobei T_1 die neue Gleichgewichtstemperatur der gekühlten Kochplatte ist. Somit ist

$$P' = S\sigma\left(T_0^4 - T_1^4\right) \tag{33.3}$$

die Leistung, die zum Erwärmen und Verdampfen der kontinuierlich zugeführten Flüssigkeit verwendet wird.

Über einen Zeitraum t absorbiert die Flüssigkeit die Wärmeenergie $Q = P't$. Diese wird zum Erwärmen und Verdampfen einer Flüssigkeitsmenge mit Masse m, spezifischer Wärmekapazität c, und spezifischer Verdampfungswärme l verwendet. Wenn wir den Temperaturunterschied, um den die Flüssigkeit bis zum Verdampfen erwärmt werden muss, mit ΔT bezeichnen, gilt also $Q = mc\,\Delta T + ml$. In unserem Fall ist $\Delta T = 80$ °C (die Flüssigkeit muss von 20 °C auf 100 °C erwärmt werden, anschließend verdampft sie und verlässt die Oberfläche, wird also nicht weiter erwärmt). Somit gilt

$$P't = mc\,\Delta T + ml. \tag{33.4}$$

Wenn wir mit V das Volumen der Flüssigkeit, das über den Zeitraum t verwendet wurde, und mit ρ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnen, dann gilt $m = V\rho$. Wenn wir jetzt Gleichung 33.3 sowie $m = V\rho$ in Gleichung 33.4 einsetzen und nach der Flussrate V/t der Flüssigkeit auflösen, erhalten wir

$$\frac{V}{t} = \frac{S\sigma(T_0^4 - T_1^4)}{\rho(c\,\Delta T + l)}. \tag{33.5}$$

Mit den Werten aus der Aufgabenstellung ergibt dies 0,094 ml/s.

34 Zur Beantwortung der Aufgabenstellung muss der Schwerpunkt des Paraboloids bekannt sein. Wähle das Koordinatensystem wie in der Abbildung vorgegeben. Die Begrenzungslinie des Paraboloidquerschnitts kann mit der Funktion $y = k\sqrt{x}$ beschrieben werden. Da der Punkt $[H; R]$ auf dieser Kurve liegt, ergibt sich aus $R = k\sqrt{H}$ die Konstante $k = \frac{R}{\sqrt{H}}$, und damit $y = \frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{x}$.

Der Schwerpunkt des Paraboloids liegt auf der Rotationsachse in der Höhe v über der Basis. Die Höhe kann berechnet werden, indem wir das Paraboloid in passend gewählte Einzelteile zerlegen und den Schwerpunkt als gewichteten Mittelwert der Schwerpunkte der Einzelteile anschreiben. Im konkreten Fall ist eine Zerlegung in dünne, annähernd zylinderförmige Scheibchen senkrecht zur Rotationsachse sinnvoll. Dadurch erhalten wir mit der Dichte ρ und der Masse des Paraboloids M die x-Koordinate des Paraboloidschwerpunkts

$$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \sigma\pi y_i^2 \cdot x_i}{M} = \frac{\sum_i \sigma\pi \frac{R^2}{H} x_i \cdot x_i}{M}. \tag{34.1}$$

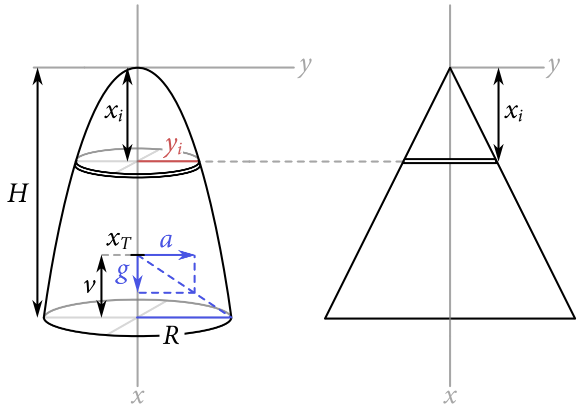


Abbildung 34.1: *Horizontale Schnitte eines Rotationsparaboloids und eines Dreiecks. In beiden Fällen steigt die Masse des Schnittes linear mit der Entfernung von der Spitze. Daher muss der Schwerpunkt beider Objekte in derselben Höhe liegen.*

Beachte, dass die Masse der dünnen Scheibchen $m_i = \sigma\pi\frac{R^2}{H}x_i$ proportional zur x-Koordinate ist. Dasselbe gilt für ein Dreieck, das wir in Streifen parallel zur Basis zerlegen – deren Länge und damit ihre Masse wächst proportional zur Entfernung von der Spitze.[4] Bekannt ist, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks bei einem Drittel seiner Höhe liegt. Dies muss sich analog auf das Rotationsparaboloid übertragen lassen, also

$$v = \frac{H}{3}. \tag{34.2}$$

Nun ist nur noch die maximal zulässige Bremsverzögerung des PKW zu ermitteln. Für diesen Grenzwert muss die Gesamtbeschleunigung (Bremsverzögerung des PKW plus Erdbeschleunigung) vom Schwerpunkt aus in Richtung der Basiskreislinie zeigen. Aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{a}{g} = \frac{R}{\frac{H}{3}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3Rg}{H}. \tag{34.3}$$

35 Wir teilen die Sonne in Kern und Hülle auf, wobei die Hülle abgestoßen wird. Da beim Abstoßen nur radiale Kräfte wirken, ändert dieser Prozess den Drehimpuls des Kerns nicht. Ebenso ändert der anschließende Kollaps des verbliebenen Kerns zu einem Weißen Zwerg den Drehimpuls nicht. Wir müssen also lediglich den Drehimpuls des Kerns vor dem Tod der Sonne bestimmen – er ist dann gleich dem Drehimpuls des verbleibenden Weißen Zwergs.

Laut Aufgabenstellung gilt für das Verhältnis der Dichten

$$\rho_{\mathrm{H}} = \frac{\rho_{\mathrm{K}}}{63}, \tag{35.1}$$

wobei ρ_{K} die Dichte des Kerns und ρ_{H} die Dichte der Hülle ist. Wenn nun m_H und m_K die Masse von Hülle und Kern bezeichnen, gilt für die Volumina von Hülle und Kern $V_{\mathrm{H}} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{\rho_{\mathrm{H}}}$ und $V_{\mathrm{K}} = \frac{m_{\mathrm{K}}}{\rho_{\mathrm{K}}}$. Wir können jetzt das Volumen der Hülle V_{H} als Differenz des Volumens der Sonne $V_{☼} = \frac{m_{☼}}{\rho_{☼}}$ und dem Volumen des Kerns

[4] Das ist in etwa analog zum Cavalierschen Prinzip

ausdrücken,

$$V_H = \frac{m_H}{\rho_H} = \frac{m_☼}{\rho_☼} - \frac{m_K}{\rho_K}. \tag{35.2}$$

Wenn wir verwenden, dass $m_K = m_H = m_☼/2$ ist und außerdem noch ρ_H aus Gleichung 35.1 einsetzen, erhalten wir für die Dichte des Kerns

$$\rho_K = 32\rho_☼ = 32\frac{m_☼}{V_☼} = \frac{24}{\pi}\frac{m_☼}{r_☼^3}. \tag{35.3}$$

Wenn wir jetzt $V_K = \frac{4\pi}{3}r_K^3$ verwenden und nach r_K auflösen, erhalten wir

$$r_K = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{m_K}{\rho_K}} = \frac{r_☼}{4}, \tag{35.4}$$

wobei wir wieder $m_K = m_☼/2$ verwendet haben.

Wenn wir das Trägheitsmoment des Kerns am Anfang (wenn er den Radius $r_☼/4$ hat) mit I_0 bezeichnen und am Ende (als Weißer Zwerg) mit I, sowie die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten mit $\omega_0 = 2\pi/T_0$ (wobei $T_0 = 28$ d die Rotationsdauer der Sonne ist) und $\omega = 2\pi/T$ (wobei T die gesuchte Rotationsdauer des Weißen Zwergs ist), gilt wegen Drehimpulserhaltung

$$I_0\omega_0 = I\omega, \tag{35.5}$$

und somit

$$T = T_0\frac{I}{I_0}. \tag{35.6}$$

Wir müssen also nur noch das Verhältnis der Trägheitsmomente I/I_0 berechnen. Das Trägheitsmoment einer Kugel mit Masse m und Radius r ist

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \tag{35.7}$$

In unserem Fall bleibt die Masse gleich, da der Kern zum Weißen Zwerg kollabiert, und lediglich der Radius ändert sich. Wenn wir den Radius des Weißen Zwergs mit $r_{WZ} = 5000$ km bezeichnen, gilt also

$$T = T_0\frac{r_{WZ}^2}{r_K^2} = 16T_0\frac{r_{WZ}^2}{r_☼^2}. \tag{35.8}$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir $T = 1975$ s.

36 Bezeichnen wir den Fluss solarer Neutrinos mit $\Phi = 10^{15}/(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s})$. Diese Größe bezeichnet die Anzahl an Neutrinos, die in 1 s eine Fläche von 1 m² normal auf die Verbindungslinie zur Sonne passieren. Wir können

$$\Phi = \frac{\Delta N}{S\,\Delta t}, \tag{36.1}$$

schreiben, wobei ΔN die Anzahl der Neutrinos, S die Fläche und Δt die Dauer bezeichnet.

Weiters bezeichnen wir das Volumen des Detektors mit $V = 1000\ \mathrm{m}^3$ und die Häufigkeit der Interaktionen von Neutrinos und dem Wasser mit $R = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Das ist äquivalent zu

$$R = \frac{\Delta N_{\mathrm{int}}}{\Delta t}, \tag{36.2}$$

wobei ΔN_{int} die Anzahl der Neutrinos bezeichnet, die mit Wasser innerhalb eines Zeitintervalls Δt reagieren.

Da die Neutrinos nur sehr selten interagieren, können wir davon ausgehen, dass der Fluss Φ über das gesamte Volumen des Detektors konstant ist. Somit können wir uns eine riesige Menge Wasser vorstellen, durch die sich die Neutrinos mit konstanten Fluss Φ bewegen. Anstatt anzunehmen, dass das Neutrino nach einer Reaktion verschwindet (was den Fluss vermindern würde), nehmen wir an, dass das Neutrino nach der Reaktion seinen Weg fortsetzt.

Jedes Neutrino fliegt somit ungestört durch den Detektor und interagiert durchschnittlich jedes Mal, wenn es die Distanz ℓ zurücklegt.

Stell' dir nun die ΔN Neutrinos vor, die alle in der Zeit Δt durch eine bestimmte Fläche mit dem Flächeninhalt S fliegen – das bedeutet, dass im Durchschnitt jedes Neutrino in einem Volumen von $S\ell$ genau einmal interagiert. Die Anzahl der Wechselwirkungen pro Volumen- und Zeiteinheit $\frac{R}{V}$ können wir nun folgendermaßen berechnen:

$$\frac{R}{V} = \frac{\Delta N}{S\ell\,\Delta t} = \frac{\Phi}{\ell}. \tag{36.3}$$

Daraus lässt sich

$$\ell = \frac{\Phi V}{R}, \tag{36.4}$$

ausdrücken und der Wert $\ell = 10^{18}\ \mathrm{m} \doteq 106\ \mathrm{ly}$ finden.

37 Beginnen wir mit Yusuf. Da er die Luft sehr schnell komprimierte, können wir annehmen, dass der Wärmeaustausch zwischen der Luft im Gewehr und der Umgebung vernachlässigbar war. Es handelt sich also um einen adiabatischen Prozess. Bezeichnen wir den Luftdruck als p_{Y} und das Volumen der Luft nach der Kompression als $V_0 = \frac{V}{16}$. Auf Grund der adiabatischen Zustandsänderung wissen wir

$$p_{\mathrm{Y}} V_0^{\kappa} = p V^{\kappa}, \tag{37.1}$$

wobei $p = 101\,325\ \mathrm{Pa}$ den atmosphärischen Standarddruck bezeichnet. Daraus leiten wir

$$p_{\mathrm{Y}} = p\frac{V^{\kappa}}{V_0^{\kappa}} = 16^{\kappa} p \tag{37.2}$$

ab.

Beim Abfeuern des Gewehrs expandiert das Gas adiabatisch, bis sein ursprüngliches Volumen V wieder erreicht ist. Die während dieses adiabatischen Prozesses verrichtete Arbeit setzen wir mit der kinetischen Energie des Kolbens und des Projektils gleich:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_{\mathrm{Y}}^2 = \frac{p_{\mathrm{Y}} V_0 - pV}{\kappa - 1}, \tag{37.3}$$

wobei v_Y die Geschwindigkeit von Yusufs Projektil ist. Durch Substitution von p_Y aus Gleichung 37.2 und V_0, erhalten wir

$$v_Y = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(16^{\kappa-1}-1\right)} \approx 185{,}2\ \mathrm{m/s}. \tag{37.4}$$

Betrachten wir nun den Schuss von Kim: Auch sie komprimierte die Luft adiabatisch, aber ließ der Luft danach Zeit, sich bei konstantem Volumen auf Umgebungstemperatur abzukühlen. Da wir ja nicht am Prozess selbst interessiert sind, sondern nur am Ausgang dieses Prozesses, kann man diesen Vorgang als isotherme Kompression betrachten. Daher berechnet man den Druck p_K nach der Kompression folgendermaßen

$$p_K V_0 = pV \quad \Rightarrow \quad p_K = p\frac{V}{V_0} = 16p. \tag{37.5}$$

Auch in diesem Fall läuft der Vorgang während des Schießens sehr schnell und daher adiabatisch ab. Im Zylinder wird Atmosphärendruck erreicht, bevor das vollständige Volumen V erreicht wird.

Das Projektil wird daher nur bis zu jenem Zeitpunkt beschleunigt, an dem der Zylinder ein bestimmtes Teilvolumen V_1 bzw. der Druck im Zylinder den Atmosphärendruck p erreicht. Der Kolben wird nun gebremst, während das Projektil sich auf seiner Bahn weiterbewegt.

Für adiabatische Zustandsänderungen gilt:

$$p_K V_0^\kappa = pV_1^\kappa, \tag{37.6}$$

und durch Substitution von Gleichung 37.5, erhalten wir

$$V_1 = \left(\frac{p_K}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} V_0 = 16^{\frac{1}{\kappa}-1} V. \tag{37.7}$$

Nun berechnen wir nochmals Arbeit, die vom Gas bei der adiabatischen Expansion von Volumen V_0 zu V_1 verrichtet wird. Das Resultat setzen wir gleich der kinetischen Energie von Kolben und Projektil,

$$\frac{1}{2}(m+M)v_K^2 = \frac{p_K V_0 - pV_1}{\kappa-1}. \tag{37.8}$$

Durch Substitution von $p_K V_0 = pV$ und V_1 aus Gleichung 37.7 erhalten wir

$$v_K = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}, \tag{37.9}$$

woraus wir durch Substitution 96,1 m/s erhalten.

Das Verhältnis von v_Y zu v_K ist daher

$$\frac{v_Y}{v_K} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(16^{\kappa-1}-1\right)}}{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}} = \sqrt{\frac{16^{\kappa-1}-1}{1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}}},$$

woraus man, nach Einsetzen von $\kappa = 1{,}4$, $\frac{v_Y}{v_K} \doteq 1{,}93$ erhält.

38 Lass uns mit der Geometrie beginnen.Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a, hat einen Inkreisradius von $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ und eine Höhe von $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Der Anhänger besteht aus einem gleichseitigem Dreieck mit Seitenlänge a, einem Kreis mit Radius r und einer Strecke mit Länge v. Aus der Angabe wissen wir, die Rotationsachse liegt in dieser Strecke, also ist ihr Trägheitsmoment gleich $I_| = 0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

Das Trägheitsmoment des Kreises ist bereits eine größere Herausforderung. Wir wissen, dass das Trägheitsmoment eines Körpers berechnet werden kann, indem der Körper in kleine Stücke unterteilt wird und die Trägheitsmomente dieser Teile aufsummiert werden, also $I = \sum_i m_i \rho_i^2$, wo m_i ist die Masse des i-ten Teils und ρ_i ist der Normalabstand dieses Teils zur Rotationsachse. Im Fall, dass die Rotationsachse durch den Mittelpunkt des Kreises, normal zur Ebene, in der dieser liegt, verläuft, ist das Trägheitsmoment des Kreises gleich

$$I_\odot = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = mr^2. \tag{38.1}$$

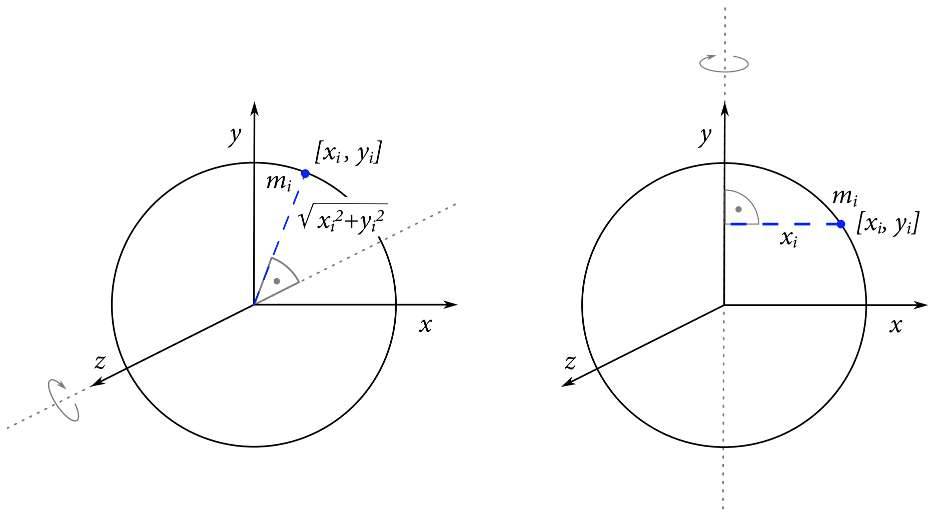


Abbildung 38.1: *Das Verhätnis zwischen den Trägheitsmomenten eines Kreises um zwei verschiedene Achsen druch seinen Mittelpunkt: eine Achse senkrecht zur Kreisebene und eine Achse in der Kreisebene*

Allerdings liegt hier dir Rotationsachse in der Ebene des Kreises, daher

$$I_\varnothing = \sum_i m_i x_i^2. \tag{38.2}$$

Wir können unsere Koordinaten frei wählen, deshalb gilt natürlich $2I_\varnothing = I_\odot$, wodurch wir

$$I_\varnothing = \frac{1}{2}mr^2 \tag{38.3}$$

erhalten.

Die Masse des Kreises ist $m = \lambda 2\pi r$, daher

$$I_\varnothing = \lambda \pi r^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{72}\lambda a^3. \tag{38.4}$$

Nun fehlt uns nur noch das Trägheitsmoment des Dreiecks. Das Trägheitsmoment eines Stabes, der normal zur Drehachse, welche in dessen Mittelpunkt liegt ist $I_- = \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{12}\lambda a^3$. Danach rufen wir uns ins Gedächtnis, dass das Trägheitsmoment eines Massepunktes lediglich vom Normalabstand des Punktes zur Drehachse abhängt. Im Fall eines geneigten Stabes müssen wir also die Masse des Stabes in dieser Entfernung berechnen. Durch die homogene Verteilung der Masse ist dies hier recht simpel und das Trägheitsmoment des Dreiecks ist letztendlich gleich dem Trägheitsmoment eines Stabes mit dreifacher Masse, also $I_\triangle = 3I_- = \frac{1}{4}\lambda a^3$.

Zu guter Letzt müssen die einzelnen Trägheitsmomente natürlich noch addiert werden, um das Gesamtträgheitsmoment von

$$I = I_| + I_\varnothing + I_\triangle = \frac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3. \tag{38.5}$$

zu erhalten.

$\boxed{39}$ Zunächst müssen wir uns darüber im Klaren sein, was wir berechnen möchten. Der Schallintensitätspegel ist ein Maß für die Schallintensität I und gibt an, wie viel Schallenergie pro Fläche pro Zeit übertragen wird. Der Schallintensitätspegel L ist der Logarithmus des Verhältnisses von Schallintensität zur Referenzschallintensität I_0 und wird in Bel oder in Dezibel gemessen:

$$L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{B}] = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{dB}] \tag{39.1}$$

Wenn eine Schallquelle die Schallleistung P abgibt, ist die Schallintensität im Abstand r von der Quelle $I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$ und der entsprechende Schallintensitätspegel ist

$$L(r) = 10\log\left(\frac{P}{4\pi I_0 r^2}\right) = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.2}$$

Nun können wir mit den Berechnungen beginnen. Laut Aufgabe entspricht der Schallintensitätspegel jedes Jahr dem Alter von Oma Julie. Wenn Oma Julie heuer den L-ten Geburtstag feiert, so war ihr Alter vor zwei Jahren

$$L - 2 = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.3}$$

Voriges Jahr kam der Nachbar zur Hilfe. Wir bezeichnen die Schallleistung, mit der unser Nachbar singen kann mit Π. Omas Alter war daher

$$L - 1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.4}$$

Heuer stellten wir zusätzlich Julies Lehnstuhl um die Strecke d näher an die singenden Gratulanten, daher ist ihr Alter

$$L = 10\log(P+\Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r-d). \tag{39.5}$$

Subtraktion der Gleichung 39.3 von Gleichung 39.4 ergibt

$$1 = 10\log(P+\Pi) - 10\log(P) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\Pi}{\sqrt[10]{10}-1} \tag{39.6}$$

und durch Subtraktion der Gleichung 39.4 von Gleichung 39.5 erhält man

$$1 = 20\log(r) - 20\log(r-d) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10}-1}. \tag{39.7}$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung 39.3 ein, so erhält man

$$L = 2 + 10\log\left(\frac{\Pi}{\sqrt[10]{10}-1}\right) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10}-1}\right). \tag{39.8}$$

Um nun Oma Julies Alter zu bestimmen, müssen wir die Schallleistung des Nachbarn mit Hilfe des Schallintensitätspegels, den er erzeugen kann, ausdrücken. Kann der Nachbar einen Schallintensitätspegel von Λ in einer Entfernung von ρ erzeugen, so gilt:

$$\Lambda = 10\log(\Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(\rho). \tag{39.9}$$

Nach Einsetzen in Gleichung 39.8 erhalten wir schließlich

$$L = 2 + \Lambda - 10\log\left(\sqrt[10]{10}-1\right) + 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10}-1}{\sqrt[20]{10}} \cdot \frac{\rho}{d}\right), \tag{39.10}$$

was mit den gegebenen Zahlenwerten bedeutet, dass Oma Julie heuer ihren 99. Geburtstag feiert. Herzliche Gratulation!

40 Als Erstes zeichnen wir alle Kräfte ein, die auf den Würfel und den Zylinder wirken.

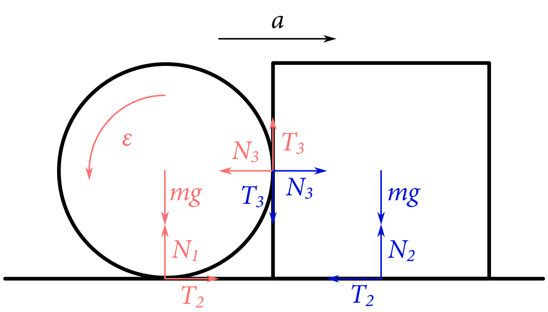


Abbildung 40.1: *Skizze der Kräfte, die auf Zylinder und Würfel wirken*

Mit diesen Kräften können wir die Bewegungsgleichungen aufstellen. Es sind insgesamt fünf. Zwei für die Bewegung der Körper in vertikaler Richtung,

$$\begin{aligned} N_1 + f_3 N_3 &= mg, \\ N_2 - f_3 N_3 &= mg, \end{aligned} \tag{40.1}$$

zwei für die Bewegung der Körper in horizontaler Richtung,

$$\begin{aligned} ma - f_1 N_1 + N_3 &= 0, \\ ma + f_2 N_2 - N_3 &= 0, \end{aligned} \tag{40.2}$$

und eine für die Rotation des Zylinders:

$$I\varepsilon - f_1 N_1 R - f_3 N_3 R = 0, \tag{40.3}$$

wobei a die Beschleunigung des Zylinders und des Würfels in horizontaler Richtung ist.

Diese muss für beide Körper gleich groß sein, sonst würde der Zylinder aufhören, den Würfel zu schieben, und der Kampf wäre vorbei. $I = \frac{1}{2} m R^2$ ist das Trägheitsmoment des Zylinders, und ε ist seine Winkelbeschleunigung.

Durch Lösen dieses riesigen Gleichungssystems erhalten wir:

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(1 - 4f^2)}{2 + f^2} g, \\ \varepsilon &= \frac{4f + 3f^2 - 4f^3}{2 + f^2} \frac{2g}{R}. \end{aligned} \tag{40.4}$$

Wann erreicht der Würfel nun die Höchstgeschwindigkeit? Die einzige Kraft, die das gesamte System beschleunigen kann, ist der Schlupf des Zylinders gegenüber der Auflagefläche. Sobald der Geschwindigkeitsüberschuss abgebaut ist, wird das System aufgrund der Reibung zwischen dem Würfel und der Auflagefläche langsamer. Der Schlupf des Zylinders endet nach der Zeit τ nach Start des Schiebevorgangs, wenn die Bedingung

$$a\tau - \Omega R + \varepsilon R \tau = 0 \tag{40.5}$$

erfüllt ist, also die Umfangsgeschwindigkeit eines Punktes auf der Oberfläche des Zylinders dessen Horizontalgeschwindigkeit entspricht und somit die Relativgeschwindigkeit zwischen Zylinder und Auflagefläche null wird.

Daraus können wir die maximale Geschwindigkeit ableiten, auf die Danny beschleunigt wird:

$$v = a\tau = a \frac{\Omega R}{\varepsilon R + a} = \Omega R \frac{1 - 4f^3}{9 + 6f - 12f^2} \doteq 0{,}99\ \mathrm{m/s}, \tag{40.6}$$

was ungefähr einem Meter pro Sekunde entspricht.

Antworten

1 2 Wh

2 6

3 1,3 °C

4 25 920 km/h^2

5 72 l

6 3700 km

7 Theresa, um 0,505 s

8 8

9 13 mm

10 −8,4 °C

11 $\frac{3}{4}$

12 $\arcsin \frac{2s}{gt^2}$

13 $\frac{3}{2}$ A

14 $\frac{400\pi}{3}$ m ≐ 419 m

15 2 s

16 $\frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3} a \doteq 0{,}555a$

17 $L\sqrt{8\dfrac{M-m}{M+m}}$

18 60

19 $1{,}624 \cdot 10^{22}$ kg, *akzeptiere Ergebnisse im Intervall* $1{,}62 \cdot 10^{22}$ kg – $1{,}66 \cdot 10^{22}$ kg.

20 180

21 $\sqrt{2}\ \mathrm{s} \doteq 1{,}41\ \mathrm{s}$

22 1171 €, *akzeptiere Ergebnisse im Intervall* 1150 € – 1180 €.

23 $9\ \Omega$

24 $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\arcsin\frac{2}{3}}{\pi} \doteq 26{,}8\ \%$

25 99,2 km, *akzeptiere Ergebnisse im Intervall* 99 km – 99,3 km.

26 $2\,g$

27 0 A

28 $V_{\mathrm{min}} = \dfrac{1}{148}\ \mathrm{l},\ V_{\mathrm{max}} = 1\ \mathrm{l}$

29 3,6 cm

30 $\dfrac{mg}{3k}$

31 $\dfrac{a\lambda}{6}\dfrac{4\pi + 9\sqrt{3}}{\pi + 3\sqrt{3}} \doteq 0{,}563a\lambda$

32 $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\ \mathrm{a} \doteq 101\ \mathrm{d} \doteq 8{,}7 \cdot 10^{6}\ \mathrm{s}$

33 0,094 ml/s

34 $\dfrac{3Rg}{H}$

35 1975 s ≐ 33 min

36 10^{18} m ≐ 106 ly

37 1,93

38 $\dfrac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3$

39 99

40 0,99 m/s

Aufgaben

Martin ‚Kvík' Baláž
Jozef Csipes
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Jakub ‚Andrej' Kliment
Katarína Nedeľková
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös

Grafiken

Katarína Nedeľková

Lektor:innen

Martin ‚Kvík' Baláž