Kedves olvasók!

A kezeitekben a Náboj Fizika 27. évfolyamának könyvecskéjét tartjátok. A könyvecskében szerepel az összes feladat, amelyikkel idén találkozhattatok a versenyen, valamint a hozzájuk tartozó megoldások, amelyekből sokat tanulhattok. Ha nehezetekre esik bármelyiket megérteni, ne habozzatok kapcsolatba lépni velünk; szívesen tisztázunk bármit.

Ez a könyvecske nem létezhetne annak a rengeteg embernek a hatalmas erőfeszítése nélkül, akik részt vettek a Náboj Fizika megszervezésében. A legtöbbünk a pozsonyi Comenius Egyetem Matematika, Fizika és Informatika Karának hallgatója, és néhányunk ezen kívül aktívan részt vesz a felvidéki Fizikai Levelező Verseny (FKS) szervezésében.

A Náboj Fizika a nemzetközi hagyományait folytatja a 2024. évben is. A nemzetközi együttműködés megszervezéséért szeretnénk köszönetet mondani a helyi szervezőknek: Katarína Nedeľková (Pozsony), Marián Kireš (Kassa), Jakub Kliment (Prága), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapest), Urszula Goławska (Gdańsk), Andrzej Karbowski (Toruń), Mirela Kaczmarek (Wrocław), José Francisco Romero García (Madrid) és Dmytro Rzhemovskyi (Bécs).A nemzetközi megmérettetések eredményei megtalálhatóak a honlapunkon.

A teljes szervezői csapat bízik benne, hogy élveztétek a Náboj Fizikát a 2024. évben, és reméljük, hogy találkozunk a Nábojon jövőre is. Akár a versenyzők vagy a szervezők oldalán.

Jaroslav Valovčan
Főszervező

Az eredmények, az archívum és egyéb információk megtalálhatóak a `https://physics.naboj.org/` weboldalon.

Feladatok

1 Az emberek 95 %-a nem tudja megoldani ezt a feladatot! Te meg tudod?

🍌 ÷ (🍒 × 🍒) = 🍇

🍉 × (🍌 × 🍌) × 🍇 = 🍋

🍋 ÷ 🍌 = 2,7 kJ

🍋 ÷ ((🍌 × 🍌) × (🍌 × 🍌)) = 12,5 Pa

🍉 × (🍇 × (🍌 ÷ 🍒)) = 675 W

(🍉 × 🍌) ÷ (🍒 × 🍒) = 450 N

[((🍉 + 🍉) × (🍉 + 🍉)) / ((🍉 + 🍉) + (🍉 + 🍉)) · (🍌 + 🍌)^((🍌 + 🍌) / 🍌)] / [((🍒 + 🍒) × 🍒) − 🍋 / (🍋 + 🍋) × 🍌 / 🍇] = ? Wh

2 Tamás egy autóversenyt nézett. Ezúttal egy amerikai versenyt, ami azt jelenti, hogy három órán keresztül balra kanyarodnak. Mivel sosem tudott elég pénzt félretenni, hogy élőben lássa ezt Amerikában, ezért felhívta Patót és Józsefet, és megkérte őket, hogy versenyezzenek helyette a helyi körforgalomban.

A srácok rajthoz álltak a csotrogányaikkal, és Tamás elindította a versenyt. A versenyzők szédítő 18 km/h -ás sebességgel haladtak. Pató a belső sávban haladt egy 100 m kerületű körön, miközben József a külső sávban egy 120 m kerületű körön ment. Hányszor megy körbe Pató a körforgalomban, mire először megelőzi Józsefet?

Hanyagoljuk el a szédítő sebességre való felgyorsuláshoz szükséges időt.

3 Martin gyakran megfigyeli a meteoresőt. Az egész estés programra való előkészületek részeként kávét (hét teáskanál instant kávé és kilenc teáskanál cukor keverve, nem rázva) készít a vákuum termoszába. A termosz belső tárolóegysége egy 18 cm magas és 4 cm sugarú henger. A belső tárolóegység falai 0,5 mm vastagságúak és 2,7 $\mathrm{g/cm^3}$ sűrűségű alumíniumból készültek, amelynek fajlagos hőkapacitása 0,9 $\mathrm{J/(g \cdot K)}$. Martin teletöltötte a belső tárolóegységet 95 °C -os kávéval.

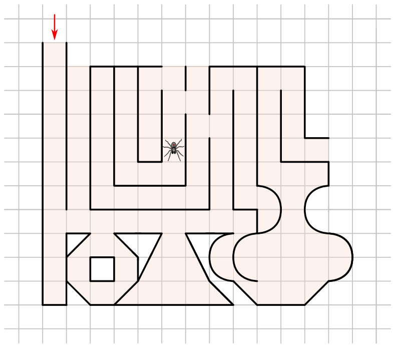
Mennyit fog hűlni a kávé, amíg termodinamikai egyensúlyba nem kerül a tároló külső részével? A belső tárolóegység a külsőtől vákuummal van elválasztva, amiről feltételezhetjük, hogy tökéletesen szigetel. A kávé fajlagos hőkapacitása megegyezik a vízével. A termosz eredeti hőmérséklete 20 °C volt.

4 Máté végre valahára felszállhatott a repülőgépére, amivel éppen a felszállásra készülnek. Tapasztalt utazóként teljesen hidegen hagyják a késések, az ordibáló kisgyerekek és az undorító száraz szendvicsek, de fizikusként érdeklik a repülési adatok. Így hát előveszi a telefonját, amely azt mutatja, hogy a repülőgép gyorsulása 2 $\mathrm{m/s^2}$. A repülőgép sebességét viszont általában km/h-ban adják meg.

Mi a repülőgép gyorsulása az ehhez passzoló $\mathrm{km/h^2}$ egységben?

5 Jusztina és Martin egy esküvői ajándékot kaptak: egy üvegalkotást, amelyet profi üvegesek készítettek Velencében. Ám hamarosan egy pók mászott bele mélyen az ajándékba. Nem tűnt túl esztétikusnak ott, ezért úgy döntöttek, hogy kiűzik.

Mennyi vizet kell beleönteniük a bal oldali legszélső csőbe, hogy a négyzet, ahol a pók található, teljesen megteljen vízzel? Vegyük figyelembe, hogy egy négyzet 1 l térfogatnak felel meg, és a méretek elég kicsik ahhoz, hogy a levegő összenyomódását **elhanyagolhassuk**.



6 Gergő megmérte a földgömbjén, hogy Rio és Hong Kong távolsága 17 700 km, Rio és Tokió pedig 18 600 km távolságra vannak egymástól. Mekkora az a lehető legnagyobb távolság, amennyire Tokió és Hong Kong még lehetnek egymástól?

A Föld egy 40 000 km *kerületű gömb. Ne vedd figyelembe, hogy a fenti helyek ténylegesen hol vannak!*

7 Két tapasztalt Trackmania versenyző, Tamás és Máté egy 300 m hosszú, egyenes pályán versenyeznek. Tamás autója egyből a startvonal után elkezd gyorsulni állandó, $8\ \mathrm{m/s^2}$-es gyorsulással. Máté autójának gyújtási problémái vannak és csak 1 másodperccel később kezd el gyorsulni, viszont $9\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással.

Ki lép át először a célvonalon és hány másodperccel nyer?

8 Adjátok meg az igaz állításokhoz tartozó számok összegét!

1	Egy slagban folyó víz átáramlik egy ponton, ahol a slag keskenyebb. Ezen a ponton az áramlás sebessége kisebb.
2	Ha erőt fejtünk ki egy folyadék felületére, akkor a nyomás a folyadékon belül minden ponton azonos.
4	Egy tárgy lebeg a víz felszínén egy pohárban. Sűrűségének ezért kisebbnek kell lennie, mint a vízé.
8	Egy keskeny üveghenger félig tele van higannyal. Ha a hengert 45°-kal megdöntjük, a henger alján a nyomás csökken.
16	Szobahőmérsékletű pohárban jégkocka lebeg a víz felszínén. A víz szintje addig emelkedik, amíg a jégkocka teljesen el nem olvad.
32	A víz nem tud elpárologni a forráspontjánál sokkal alacsonyabb hőmérsékleten.
64	Két tárgy lebeg egy folyadék felszínén. Az a tárgy, amelynek térfogata a folyadék felszíne felett nagyobb, kevésbé sűrű.

Minden, a feladatban szereplő tárgy standard viszonyok között értendő. (homogén gravitációs mező, atmoszférikus nyomás, szobahőmérséklet, stb.)

9 A helyi uszoda ablakait vastag függönyök takarják. Az egyik függönyön van egy kis lyuk, amelyen keresztül egyetlen napsugár éri a víz felszínét 45°-os szögben. Mivel a napsugár színes komponensekből áll, a medence alján egy szivárványcsík jelenik meg. Mi a hossza ennek a csíknak, ha a víz törésmutatója a látható fényre vonatkozóan 1,33 – 1,34 között van, és a medence mélysége 2 m?

Feltételezzük, hogy a levegő törésmutatója 1.

10 A hosszú, gondtalan nyári napok alatt Márk elfelejtett fagyállót önteni az autója szélvédőmosó tartályába, így ott maradt a fel nem használt víz. Márk káromkodik és hevesen gesztikulál, miközben lassan ráébred, hogy a kétliteres tartályban már 1 kg tiszta jég van.

Teletölti a tartályt téli szélvédőmosó folyadékkal, amely −20 °C-on fagy meg. Mi a legalacsonyabb hőmérséklet, amelyen az így kapott keverék még folyékony marad, ha a fagyálló sűrűsége 800 kg/m^3, és a fagyáspont a komponensek tömege szerinti súlyozott átlaggal számítható?

11 A helyi vásáron Ádám vett egy fánkot és egy hatalmas almát. A fánkot azonnal felfalta, az almát meghagyta a hazavezető sétára. Amikor átment egy kis hídon, meglátta a saját tükörképét a vízben. Ez annyira megzavarta, hogy a tóba ejtette az almát. Kiderült, hogy az alma sűrűsége a víz sűrűségének kétharmada.

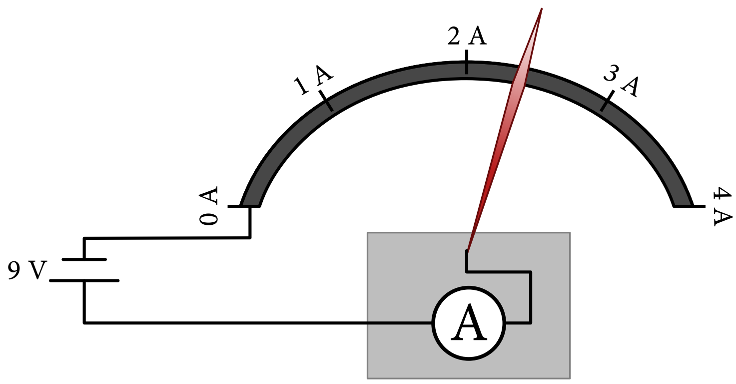
Mivel Ádám keze még mindig zsíros a fánktól, és nem akar környezeti katasztrófát okozni, térdre ereszkedett, és elkezdte rágni az almát a vízszint felett. Azonban a hirtelen fröccsenés egy éhes halat is odavonzott, amely elkezdte az almát a víz alatt is enni.

Mekkora részét eszi meg végül Ádám az almának? Figyelembe véve, hogy Ádámnak jelentős előnye van a fogak számát tekintve, háromszor olyan gyorsan eszik, mint a hal.

12 Jancsika biciklijén száguld le egy lejtőn. A pillanatnyi sebességét és a földszinttől mért magasságát figyelembe véve s útra és t időre lenne szüksége ahhoz, hogy teljesen megálljon. Mekkora a lejtő minimális dőlésszöge a vízszintes síkhoz képest, amely megakadályozná, hogy Jancsika egyáltalán meg tudjon állni?

Jancsika tud rendesen fékezni és a kereke sosem csúszik meg a talajon.

13 Jákob éppen multimétert keresett otthon, de csak egy fura ampermérőt talált. A benne lévő tű egy vékony vezető huzalon mozog végig, melynek egységnyi hosszra eső ellenállása 4 Ω, ahogy az ábra is mutatja. Jákob eme mesteri szerkezetet rákötötte egy 9 V-os elemre. Mekkora áramerősséget fog a különös ampermérő mutatni?



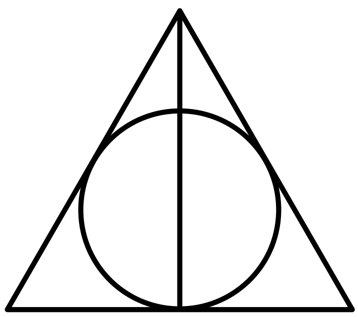
14 Patrik egy furcsa fekete lemezt talált a nagyapja szekrényében. Mielőtt azon tálalta volna a szójaburgert, vagy frizbiként használta volna, a nagyapja megmutatta neki, hogy ha a lemezt a lemezjátszóra helyezi, a tűt a lemez külső peremén lévő spirálhoronyba (barázda) illeszti, és végül megnyom néhány gombot, baljós recsegő és sziszegő hangok kezdenek szólni a hangszórókból, némi őskori zene kíséretében.

A sziszegés és recsegés pontosan 20 percig tartott. Mekkora a barázda hossza, ha a lemez külső átmérője 30 cm és a barázda 5 cm-re végződik a középpontjától? A rejtélyes lemez percenként 33⅓ fordulatszámmal forgott a lemezjátszón.

15 Kata műugró és épp élete ugrására készül. A deszka, amiről ugrani fog, a vízfelszín felett 10 m-en helyezkedik el. Kata elrugaszkodik a deszkáról, végrehajt egy szaltót, majd a vízbe csobban.

Mennyi időt töltött Kata az ugrása során a levegőben, ha az időnek pontosan a felét töltötte a deszka szintjénél magasabban?

16 Sára nagy rajongója a Harry Potter sorozatnak. Kivette az ékszerdobozából a Halál Ereklyéi medálját, és csodálni kezdte: A Láthatatlanság Köpenye, a Feltámadás Köve és a Pálcák Ura. Mivel Sára egy kíváncsi fizikus is volt, azon tűnődött, hogy hol helyezkedhet el ennek a medálnak a tömegközéppontja. A medál egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszögből, a háromszögbe írt körből és a háromszög egy magasságvonalából áll. Minden alkotóelemnek azonos a vonalmenti sűrűsége. Milyen távol van a medál tömegközéppontja a háromszög felső csúcsától?



17 Andor épített egy egyszerű katapultot. A szerkezet egy elhanyagolható tömegű, $2L$ hosszúságú deszkából áll, amit a földfelszín felett L magasságban egy zsanérral hozzárögzített egy kezdetleges kerethez. Ennek az egyik oldalára odaragasztott egy nehéz, M tömegű követ ellensúlynak. A másik oldalán pedig vájt egy sekély mélyedést, amibe egy apró, $m < M$ tömegű lövedéket helyezett.

A lövedék ott fekszik, amíg Andor meg nem húzza a kart, és el nem süti a katapultot. A nehéz kő leereszkedik, a lövedék pedig éppen akkor, amikor a deszka függőleges helyzetbe kerül, kirepül a mélyedésből.

Milyen messze fog a lövedék becsapódni a földbe?

18 A Pozsony és Prága között húzódó autópálya 400 kilométer hosszú, és mindkét irányban négy sávval rendelkezik. Ezekben a sávokban a következő sebességekkel haladhatnak az autók: 80 km/h, 100 km/h, 120 km/h és 160 km/h. Péter, Pál és Artúr egyszerre indultak el Pozsonyból, de különböző sávokban, mert az autóik más-más sebességgel képesek haladni. Miután megérkeztek, megosztották egymással a tapasztalatikat:

Péter: „A leggyorsabb sávban haladtam, és 620 autót előztem meg, amelyek közül 200 a második leggyorsabb sávban ment!”

Pál: „120 km/h -val haladtam, és összesen 220 autót előztem meg!”

Artúr 100 km/h -val ment, de nem emlékszik, hány autót előzött meg. Számold ki neki!

Feltételezd, hogy az autók minden sávban egyszerre indulnak el, és mind megteszik a teljes utat.

19 Máté szeret a fizikus barátaival szórakozni. Ma a következő gondolat lovagolt be az elméjükbe:

- egy *lóhossz* nyolc láb;
- egy *lóerő* a 75 kg -os tömeg 1 m/s-al egyenesen fölfelé emeléséhez szükséges teljesítmény;
- és egy *lóadag* a 100 kg tömegre jutó 1,7 kg napi takarmány;

létrehozható egy olyan mértékegységrendszer, amelyben ezekkel bármilyen mechanikai mennyiség kifejezhető. Például a *lógyorsulás* az egy *lóhossz* és az egy *lóadag* négyzetének a szorzata lenne.

Hány kilogramm egy *lótömeg*, ami egy, a fenti háromból levezethető nagy tömegegység?

20 Kati és Vili mozgólépcsőn utaznak. A mozgólépcső hossza 120 látható lépcsőfok, és másodpercenként két lépcsőfoknyi sebességgel halad. Mindketten az alsó lépcsőfokra lépnek fel. Kati, mint felelősségteljes felnőtt, nyugodtan áll ott, míg Vili izgatottan kezd szaladgálni fel-alá közte és a mozgólépcső teteje között. Felfelé két lépcsőfok/másodperc, míg lefelé hat lépcsőfok/másodperc sebességgel halad.

Hány lépcsőfokon fog összesen átfutni, mire Kati eléri a mozgólépcső tetejét, és jól leszidja őt?

21 Marcell és Szabina két külön szuperszonikus sugárhajtású repülőgéppel repül, mindketten Mach 3 sebességgel, két, egymástól 1 km-re fekvő párhuzamos vonal mentén, ellentétes irányban. Mennyi idő telik el onnantól, hogy a repülőgépük egymáshoz a legközelebb helyezkedik el, addig, hogy Szabina meghallja Marcell repülőgépének hangját?

A hang sebessége Mach 1 = 1 km 3 s *alatt.*

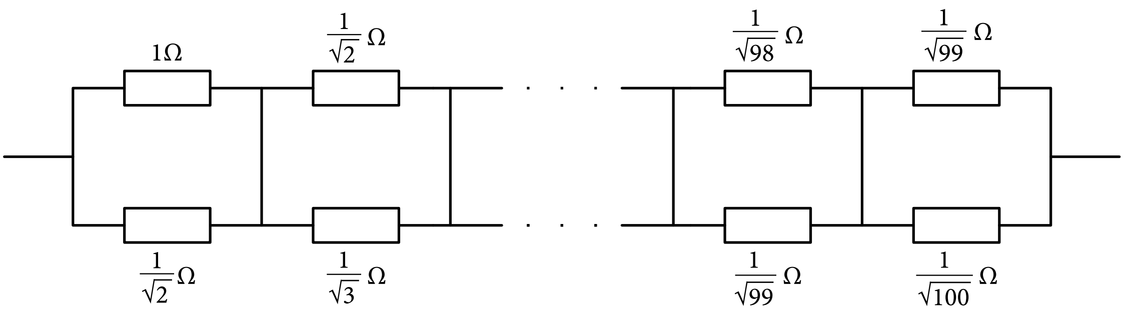
22 Marci és Szabina nászútjukra egy hőlégballonnal szeretnének elutazni. Mivel pénzügyileg szűkölködnek, még annak ellenére se tudták megtölteni héliummal a ballont, hogy Marci azt ingyen szerezte, hisz a hélium nagyon drága. Így maradtak az elektrolízissel előállított hidrogén mellett.

Mennyibe fog kerüli nekik a hőlégballon feltöltése, ha annak a tömege velük együtt 1000 kg, az áram ára 0,20 €/kWh és a teljes folyamat hatásfoka 50 %? A hidrogén oxigénnel való elégése során 285,8 kJ/mol energia szabadul fel.

A nászút végig standard nyomáson, és hőmérsékleten történik. Valamint a ballon belső nyomása megegyezik a külső nyomással.

23 Samu talált egy nagy dobozt, tele különböző ellenállásokkal és egy nagy tekercs tökéletes vezetőképességű vezetékkel, és úgy döntött, hogy épít belőlük egy létrát.

Minden két fok közé helyezett az egyik oldalra egy $\frac{1}{\sqrt{n}}$ Ω-os ellenállást, és a másik oldalra egy $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ Ω-os ellenállást, ahol n egész, 1-től 99-ig.



Mekkora az eredő ellenállás a létra két vége között?

24 Az árapály tengerszintre való hatását a francia Saint-Malo városában telihold környékén $A \cdot \sin(\omega t)$ módon lehet leírni, ahol A az amplitúdója és ω a frekvenciája úgy, hogy a legnagyobb dagály 12 óránként történik.

A Santiano hajó matrózai szeretnék tudni, hogy kiköthetnek-e, amikor hazatérnek. A probléma az, hogy a hajó csak akkor tud kikötni a mólónál, ha a vízszint legfeljebb $A/3$-al alacsonyabb a dagálykor tapasztalható értéknél… és a matrózok nem tudják mikor van dagály.

Mi a valószínűsége, hogy ki fognak tudni kötni a mólónál, azaz olyankor érkeznek, amikor kiköthetnek?

25 Max és Miki különböző módon mérnek távolságot két pont között a Földön. Max, a pilóta, a távolságot a földgömb felületén legrövidebben behúzható ívvel adja meg, míg Miki, aki bankrabló, egy egyenes vonallal adja meg a távolságot annak ellenére is, ha ez épp a földfelszín alatt van.

Amikor mindketten külön-külön megmérték a bank és a repülőtér között a távolságot, eredményeiket összehasonlítva észrevették, hogy a két eredmény különbsége éppen 1 m. Mekkora távolságot mért Max?

Feltételezzük hogy a Föld egy gömb, amelynek sugara 6371 km.

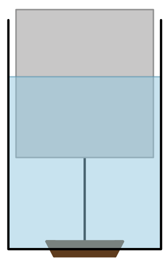
26 Bálint egy L hosszúságú láncok által felfüggesztett hintán hintázik. Az egyik szélső helyzetben, amikor a legmagasabban van és megáll egy pillanatra, 0,5 g gyorsulásnak megfelelő kényszererőt érzékel. Hány g gyorsulásnak megfelelő kényszererőt érzékel, amikor a legalacsonyabban van?

27 Kata kapott egy fém nyakláncot. Ez egy kör alakú hurokból áll, aminek a sugara r és az ellenállása λ. Nyaralása alatt egy helyi játszótéren körhintázott. A körhinta forgástengelyétől R távolságban ült és ω szögsebességgel forgott. Ekkor észrevette, hogy néhány csintalan gyerek egy nagy mágnest helyezett a körhinta alá, amelynek mágneses indukciója, B, állandó nagyságú, és a forgástengellyel párhuzamosan van irányítva.

Kata elkezdett aggódni a nyaklánca miatt: mekkora áram indukálódik benne? Feltételezzük, hogy Kata ijedtében mozdulatlan marad. Olyan helyzetben ül a körhintán, hogy a nyakán lévő nyaklánc 30° szöget zár be a vízszintessel.

28 Luca tervezett egy zseniális eszközt, amivel pont a megfelelő mennyiségű vízzel tudja meglocsolni a növényeit. Az adagoló egy S alapterületű, megfelelően magas, hengerszerű tároló, amely az alapja közepén rendelkezik egy, a sugár felét lefedő kör alakú nyílással, amit egy dugó zár. A tartályban van egy kisebb, 500 kg/m^3 sűrűségű, 0,99S alapterületű, és H magasságú henger, ami egy zsinórral van összekötve a dugóval. Az edény kritikus mennyiségű vízzel való feltöltése után a belső henger felemeli a dugót, megakadályozva a víz további hozzáadását.

Mennyi a legkevesebb és legtöbb víz térfogata, amit Luca ezzel a merőeszközzel adagolhat, ha a zsinórt bármilyen hosszúra engedheti? A belső henger térfogata: 1 l.



29 Dani irodája szörnyű rendetlenség. Az egyetlen dolog, amin belépéskor megakadhat a szemed, az ő nagyrabecsült játéka: egy ingapár.

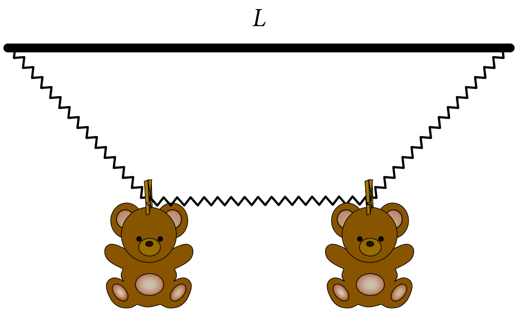
Amikor az ingákat egyszerre eltérítik az egyensúlyi helyzetükből, a mozgásuk a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Pontosan minden harmadik alkalommal, amikor a lassabb inga áthalad a jobb oldali szélső helyzetén, ott találkozik a gyorsabb ingával, és
- Pontosan minden ötödik alkalommal, amikor a gyorsabb inga áthalad a bal oldali szélső helyzetén, ott találkozik a lassabb ingával.

A hosszabb inga zsinórjának hossza 10 cm. Mekkora a rövidebb inga zsinórjának hossza?

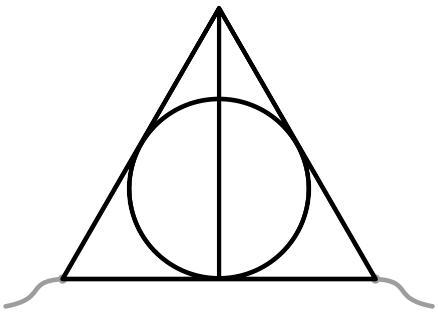
30 Panni szeretne megszárítani két m tömegű plüsst, amit épp kimosott. Sajnos az első próbálkozása, hogy kifüggessze őket a szárítókötélre, kudarcot vallott: leszakadt a kötél. Viszont Panni okos volt, és eszébe jutott egy mentő ötlet: kiakasztott egy megnyújtatlan, k rugóállandójú rugót a szárítókötél helyére, az L szélességű keretbe. Ezután a két plüsst a rugó egyharmadához és kétharmadához akasztotta, és ezért a rugó megnyúlt a súlyuk alatt.

Mennyivel lesz így alacsonyabban a rugó közepe a végeitől?



31 Sára ismét elővészi kedvenc Halál Ereklyéi medálját. Ezúttal az elektromos ellenállása érdekli. Sára medálja egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszögből, egy beleírt körből és a háromszög egyik magasságvonalából áll. Minden alkotóelem vonalmenti ellenállása λ.

Mekkora az ellenállás a háromszög azon két csúcsa között, amelyeket nem érinti a pálca?



32 A Sötét Úr™ néhány, az ürességben eltöltött, tartalmas nap után visszatért a halandók világába egy új sötét varázslattal, ami nem más, mint a gravitáció megszüntetése. Jelenleg még csak egy kis ideig tudja a tömegvonzást felfüggeszteni, de biztosak lehetünk benne, hogy nem ez a végső terve.

Most hozzád fordul tanácsért (persze puszta kíváncsiságból). Mennyi ideig kell kikapcsolnia a Nap gravitációs terét, hogy a Föld már ne tudjon visszatérni, és elrepüljön a végtelen sötétségbe?

33 Ellie egy régi dupla főzőlapot használt a főzési kísérleteihez. Elvárásai ellenére a főzőlap nagyon jól működött, és miután áram alá helyezte, elképesztően magas hőmérsékletre, 250 °C-ra melegedett fel. Azonban ilyen hőmérsékleten az étel könnyen odaégne. Sajnos a régi főzőlap vezérlői már nem működtek, így Ellie kénytelen volt improvizálni. Fogott egy permetezőt egy speciális hűtőfolyadékkal, amelynek hőmérséklete 20 °C volt, és állandó térfogatárammal alkalmazta a felmelegedett főzőlapra. Mekkora térfogatáramra van szükség ahhoz, hogy a hőmérséklet egy elfogadható, 150 °C-os értékre csökkenjen? A főzőlap felülete 0,1 m^2, és évek óta tartó intenzív használat után teljesen és visszafordíthatatlanul fekete.

A speciális folyadéknak állandó fajhője és sűrűsége van egy széles hőmérsékleti tartományban, amelyek megegyeznek a víz szobahőmérsékleti fajhőjével és sűrűségével. Ugyancsak 100 °C*-on forr, mint a víz, és a párolgáshőjük is azonos.*

34 Jakab értékes csomagot visz az autójában – egy forgási paraboloid alakú esküvői tortát, melynek magassága H és alapjának sugara R. Ahogy egy kereszteződéshez ér, a jelzőlámpa hirtelen pirosra vált, így kénytelen a fékre taposni. Mi a legnagyobb lassulás, amit alkalmazhat, hogy a torta ne boruljon fel?

A rándulásból eredő hatásokat hagyjátok figyelmen kívül.

35 Hosszú és fényes élete után, a Napunk számára is eljön majd a vég. A Nap haláltusájának folyamata a következőképpen fog lezajlani: anyagának egy külső rétegét a felszínéről a világűrbe fogja lökni, méghozzá sugárirányú erők hatására.

Tekintsük a Napot tökéletes gömbnek, 28 napos forgási periódussal, homogén anyagból álló maggal és egy külső, szintén homogén burokkal. A mag és a burok tömegaránya legyen $1:1$, a sűrűségeik aránya pedig $63:1$. Amikor a Nap meghal, a teljes burkát leveti, és a magja fehér törpévé omlik össze – egy homogén gömbbé, melynek sugara 5000 km.

Mekkora lesz az így keletkezett fehér törpe forgási periódusa?

36 A Földön áthaladó napneutrínók fluxusa körülbelül $10^{15}\ \mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}}$. Dirk egy hatalmas, kocka alakú detektort épített, amelynek térfogata $1000\ \mathrm{m^3}$. Megtöltötte vízzel, és azt találta, hogy átlagosan minden másodpercben egy neutrínót sikerül befogni.

Mennyi a neutrínók átlagos szabad úthossza a vízben?

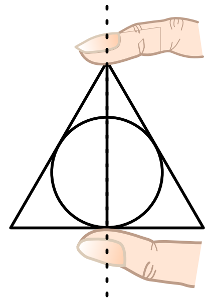
37 Az olimpia után nagyon lázba hozott minket a célbalövés, úgyhogy építettünk egy légpuskát. A légpuska mechanizmusa egy $V = 100\ \mathrm{cm^3}$ térfogatú hengerből áll, mely légköri nyomású levegővel van megtölve és egy $M = 1$ g tömegű dugattyúval van lezárva. A lövés előtt a lövőszerkezetet $\frac{V}{16}$ térfogatra összenyomják. Ezt követően egy $m = 2$ g tömegű lövedéket helyeznek a dugattyú elé. Amikor meghúzzák a ravaszt, a dugattyú elenged, és a kitáguló levegő meghajtja a lövedéket.

A fegyver tesztelésére két lövészt béreltünk fel, Yusufot és Kimet. Yusuf megérkezett a helyszínre, megtöltötte a fegyvert, meghúzta a ravaszt, majd távozott. Amikor a második tesztelő, Kim megérkezett, bőven volt időnk: mielőtt lőtt volna, beállított egy redőnyt a bal szeme elé, hogy csak a jobb szemével lássa a célt, majd egy kis lyukkal ellátott nyílást helyezett a jobb szeme elé, hogy nagyon élesen lássa a célt. Miközben felkészült, a dugattyúban lévő levegő lehűlt. Most az érdekel minket, hogy Yusuf és Kim kilőtt lövedékeinek sebességei milyen arányban állnak egymással.

Adiabatikus folyamat során a gáz által végzett munka $W = \frac{p_0 V_0 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$*, ahol a* 0 *index a kezdeti állapotot jelképezi,* 1 *pedig a végállapotot. A levegő ideális kétatomos gáz, melyre* $\kappa = 1{,}4$.

38 Sára harmadjára is kézbe vette a Halál Ereklyéi medálját. A hüvelyk- és a mutatóujja közé fogta úgy, hogy a Pálcák Ura pontosan a két ujját összekötő egyenesre essen, majd ebben a pozícióban megpörgette a medált. Mekkora volt a medál tehetetlenségi nyomatéka ehhez a tengelyhez képest?

Sára medálja geometriailag egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszögből, egy, a háromszögbe írt körből, és a háromszög egyik magasságvonalából áll. Mindegyik komponens lineáris sűrűsége λ.

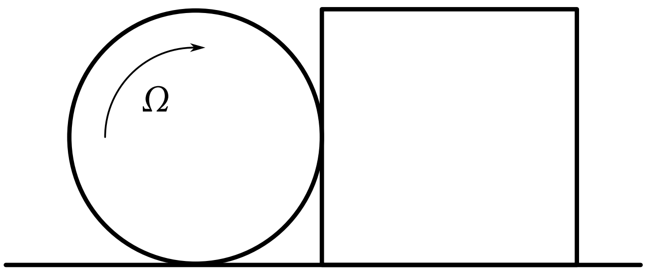


39 Justine nagymamának minden születésnapján el kell énekelni nagycsaládostul a Boldog Szülinapot című dalt. Minden évben (decibelben mérve) pontosan akkora hangerővel kell énekelni, mint ahány éves. Tavaly már nem bírtunk elég hangosan dalolni, úgyhogy igénybe vettük a zajos szomszédunk segítségét, aki 1 m távolságban képes 100 dB hangerővel énekelni.

Idén rájöttünk, hogy még a szomszédunk segítsége sem elég, ezért inkább 30 cm-rel közelebb tettük a Nagyi székét az éneklő rokonsághoz. Hány éves idén a Nagymama?

40 Dani, a kocka, és Jancsi, a henger, ismét harcra keltek. Kezek és lábak nélkül a harc a következőképp folyik: Jancsi felpörög $\Omega = 23\ \mathrm{s}^{-1}$ szögsebességre, lefekszik közvetlenül Dani mellé, és elkezdi tolni az oldalát. Kockás Danit eléggé hidegen hagyja az összevissza tologatás, de érdekli, hogy mekkora maximális sebességet fog elérni, míg Jancsi tolja őt.

A súrlódási együttható Dani és a föld, valamint Dani és Jancsi között $f = 0{,}2$, míg Jancsi és a föld közt kétszer ekkora. Dani minden éle, Jancsi magassága és átmérője 1 m hosszú, és mindketten 100 kg tömegűek.



Megoldások

1 Reméljük, hogy sikeresen teljesítetted a rejtett IQ-tesztet, és minden gyümölcsöt jelöltél valamilyen betűvel. Például: B – banán, L – citrom, G – szőlő, M – görögdinnye és C – cseresznye. A hatalmas egyenlet tehát egyszerűsítve így néz ki:

$$\frac{M(2B)^2}{2C^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{G}} = ?\ \mathrm{Wh}. \tag{1.1}$$

A nevezőbe behelyettesítjük a $\frac{B}{C^2} = G$ egyenletet. Ezután az egész kifejezést megszorozzuk a $\frac{BL}{BL}$-vel, ami ahhoz vezet, hogy:

$$\frac{M(2B)^2}{2C^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{G}} = \frac{4MB^2}{\frac{3B}{2G}} = \frac{8}{3}MBG = \frac{8}{3}\frac{L}{B}\frac{MB^2G}{L}. \tag{1.2}$$

Észrevehetjük, hogy az utolsó tört egyenlő eggyel, ahogy azt a feladat szövegében szereplő egyik egyenletből levezethetjük, és egy másik egyenlet felhasználásával, $\frac{L}{B} = 2{,}7$ kJ. Ez azt jelenti, hogy a kérdéses tört értéke 7,2 kJ. Ahhoz, hogy ezt átváltsuk Wh-ba, emlékeznünk kell arra, hogy 1 Wh = 3600 J, így az eredmény 2 Wh.

Határozottan hisszük, hogy ezentúl nem fogsz panaszkodni a betűk miatt az egyenletekben.

2 Mindkét versenyző ugyanazzal a sebességgel egyenletesen halad, tehát ugyanakkora utat tesznek meg. Ha Pató n kört tesz meg a körforgalomban, akkor $n \cdot 100$ m utat tesz meg. A feltétel szerint József egy körrel kevesebbet tett meg, ami $(n-1) \cdot 120$ m távolságnak felel meg. Mivel a megtett utak egyenlőek:

$$n \cdot 100\ \mathrm{m} = (n-1) \cdot 120\ \mathrm{m}, \tag{2.1}$$

amiből $n = 6$.

3 Mi történik Martin kávéjával? Elkezd hőt átadni az alumínium tárolónak, ami felmelegszik. A hőátadás akkor szűnik meg, amikor a kávé és a tároló hőmérséklete megegyezik, és a kávé által leadott hő egyenlő a tároló által felvett hővel.

A belső tárolóegység térfogata:

$$V = \pi r^2 h \doteq 905\ \mathrm{ml}, \tag{3.1}$$

ahol r a sugár és h a henger magassága. A kávé olyan sűrű, mint a víz, tehát a tömege: $m_k = V\rho_{\mathrm{H_2O}} \doteq 905$ g, a fajlagos hőkapacitása: $c_{\mathrm{H_2O}}$, valamint a hőmérséklete T_k-ról egy alacsonyabb T hőmérsékletre csökkent.

A tárolóegység – egy tömeggel rendelkező henger:

$$m_{\mathrm{Al}} = (2\pi r^2 + 2\pi rh)\,\Delta h \rho_{\mathrm{Al}} \doteq 75\ \mathrm{g}, \tag{3.2}$$

ahol Δh a fal vastagsága és ρ_{Al} az alumínium sűrűsége. A c_{Al} fajlagos hőkapacitással rendelkező tároló hőmérséklete T_{Al}-ról T-re emelkedett.

A kalorimetria alapegyenlete szerint:

$$m_k c_{\mathrm{H_2O}}(T_k - T) = m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}(T - T_{\mathrm{Al}}), \tag{3.3}$$

tehát

$$T = \frac{m_k c_{\mathrm{H_2O}} T_k + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}} T_{\mathrm{Al}}}{m_k c_{\mathrm{H_2O}} + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}}. \tag{3.4}$$

A kávé tehát $T_k - T \doteq 1{,}3\ °\mathrm{C}$ -t fog hűlni.

4 Ha mértékegységeket akarunk átváltani, például métert kilométerre, általában a számértéket szorozzuk meg eggyel a megfelelő alakban:

$$1 = \frac{1 \text{ új egység}}{x \text{ régi egység}}. \tag{4.1}$$

Például átalakíthatjuk az 563 m-t kilométerre a következőképpen:

$$563\ \mathrm{m} = 563\ \mathrm{m} \cdot \underbrace{\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}}_{1} = \frac{563}{1000}\ \mathrm{km} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} = 0{,}563\ \mathrm{km}. \tag{4.2}$$

Ekvivalens módon válthatjuk át a m/s²-et km/h²-té. Mivel 1 h = 3600 s, az alkalmas egység értékű törtek a $\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}$ és $\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}$.

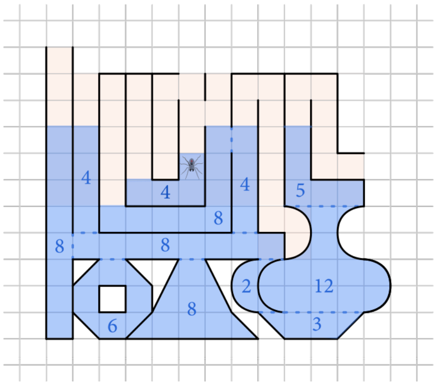
A teljes számítás így a következő:

$$2\ \mathrm{m/s^2} = 2\ \mathrm{m/s^2} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3600^2}{1000} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{s^2}}}{\cancel{\mathrm{s^2}}} \cdot \mathrm{km/h^2} = 25\,920\ \mathrm{km/h^2}. \tag{4.3}$$

5 A víz folyása a szokatlan üvegalkotásban bizonyos szabályokat követ:

1. Mindig az alacsonyabb rész felé folyik.
2. Ezért, a szabad felületnek mindenhol ugyanolyan magasnak kell lennie.
3. Kezdetben mindenhol levegő van, ezért ha valahova víz folyna, akkor kell lennie egy szabad nyílásnak a levegő kiáramlására. Ha nincs ilyen szabad nyílás, akkor a levegő megakadályozza a víz befele folyását a csőbe.

Ezeknek a szabályoknak eleget téve, ha fokozatosan öntünk vizet befele, a képen látható vízszintet egy idő után elérjük image 5.1.



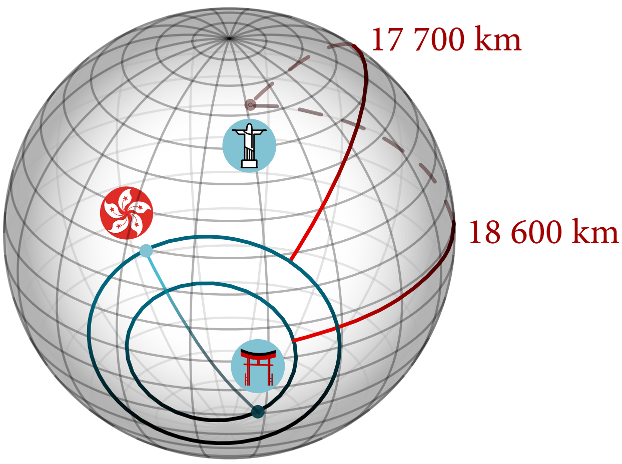
Ábra 5.1: *A víz eloszlása a készítményben*

Már csak ki kell számítanunk a beleöntött víz térfogatát. Ha felismerjük, hogy a levágott részek, melyek térfogata 1 l vagy 0,5 l, valamint a köríves részek kiegészítik egymást egész négyzetekre, a beleöntött víz térfogata meghatározható, ami 72 l.

6 Oldjuk meg előbb a feladatot egy lapos Földön! Rajzoljunk két kört Rio körül, az egyiket 17 700 km, a másikat 18 600 km-es sugárral, és próbáljunk találni rajtuk két pontot, amik a lehető legmesszebb vannak egymástól. Egész nyilvánvalóan ilyen lesz bármely két, Rióból indulva ellenkező irányba levő pont, a távolságuk pedig a két kör sugarának az összege lesz, vagyis 36 300 km.

Egy igazi, gömbölyű Földön is hasonló a helyzet, csak ott két pont távolsága nem lehet nagyobb, mint a Föld kerületének a fele, 20 000 km – ellenkező esetben ilyenkor rövidebb lenne az ellenkező irányban menni. A korábban említett két legtávolabbi pont távolsága a Föld túloldalán (a másik irányba haladva) csak 40 000 km – 36 300 km = 3700 km.

Vagy úgy is gondolkodhatunk, hogy minden Riótól x távolságra levő pont pontosan $\pi R - x$ távolságra van Rio antipodális pontjától (a pontosan a Föld túloldalán levő pont.) Ez azt jelenti, hogy azok egy ekkora sugarú körön fekszenek, nekünk pedig meg kell találnunk a kettő egymástól legtávolabbi pontot két körön, amiknek a sugarai 1400 km és 2300 km, ami ismét 3700 km.



Ábra 6.1: *Két lehetséges hely, ahol Tokió (torii) és Hong Kong (virág) lehetnek. Rio (Krisztus-szobor) a Föld másik oldalán van.*

7 Jelölje a távot $L = 300$ m, Tamás és Máté gyorsulását pedig $a_\mathrm{T} = 8$ m/s és $a_\mathrm{M} = 9$ m/s. A t_T idő, amely alatt Tamás elérte a célvonalat, kiszámítható az állandó gyorsulással történő mozgás egyenletéből:

$$L = \frac{1}{2} a_\mathrm{T} t_T^2, \tag{7.1}$$

ahonnét kifejezhető:

$$t_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2L}{a_\mathrm{T}}}. \tag{7.2}$$

Hasonlóképp számolhatjuk ki azt az időt, amely alatt Máté célba ér:

$$t_M = \sqrt{\frac{2L}{a_M}}. \tag{7.3}$$

Ehhez az időhöz hozzáadva $\Delta t = 1$ s-t, összehasonlíthatjuk a teljes időt, amire a két versenyzőnek szüksége volt a célbajutáshoz. A megadott értéket behelyettesítve:

$$(t_M + \Delta t) - t_T = 0{,}505 \text{ s} \tag{7.4}$$

adódik, így Tamás nyer 0,505 s-mal.

8 A számok mind 2-hatványok, tehát minden állítást meg kell vizsgálnunk, hogy igaz-e.

Slag (1)

A kontinuitási egyenlet szerint, ami befolyik, annak ki is kell folynia. Az áramlási térfogat konstans, vagyis, egy kisebb keresztmetszet nagyobb áramlási sebességet vonz maga után. Az állítás tehát **hamis**.

Erőhatás a folyadék felszínén (2)

Pascal törvényéből akár azt is gondolhatnánk, hogy ez az állítás igaz. Azonban, a kifejtett nyomáson felül a folyadék súlyával is számolnunk kell, valamint a nyomással, amit ez okoz: a hidrosztatikai nyomással – ami viszont a mélységgel változik. Tehát az állítás **hamis**.

Test a felszínen (4)

Az állítás **hamis**, akár egy tűre gondolunk, ami a felületi feszültségnek köszönhetően úszik a víz felszínén, akár egy úszó hajótestre, vasból.

Higany a hengerben (8)

A henger alján megjelenő nyomás a hidrosztatikai nyomás, ami a vízoszlop magasságától függ. A hengert megdöntve, a vízszintes keresztmetszet megnő, tehát a vízoszlop magassága lecsökken. Az ezzel arányos hidrosztatikai nyomás is lecsökken tehát, így az állítás **igaz**.

Úszó jégkocka (16)

A jégkocka elmerült része pontosan akkora térfogatot foglal el a vízben, mint az azonos súlyú vízmennyiség – tehát, ahogy a jégkocka olvad, az újonnan keletkező víz pontosan azt a térfogatot fogja kitölteni, amit addig a jég töltött ki a felszín alatt. Az állítás **hamis**.[1]

Párolgás (32)

Az állítás **hamis** – még egészen kis hőmérsékleten is, a legnagyobb energiával rendelkező molekulák el tudják hagyni a folyadék felszínét. A forráspont elérésekor a folyadék teljes térfogatán elpárolog.

Két test (64)

Bár a polisztirénhab sokkal kisebb sűrűségű, mint a fa, egy nagy rönk és egy szem kis polisztirén labdacs minden gond nélkül tud egymás mellett lebegni a vízen – ami teljes ellentmondásban van az állítással, ami eszerint **hamis**.

Összeadva a helyes állításokhoz tartozó számokat, a végeredmény 8.

9 Amikor egy fénysugár optikai közeghatáron halad át, a Snellius-Descartes-törvény szerint törik meg. A vizsgált sugár egy 1 (levegő) törésmutatójú anyagból egy n (víz) törésmutatójú anyagba lép be 45°-os szögben. Ezért:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha} = n. \tag{9.1}$$

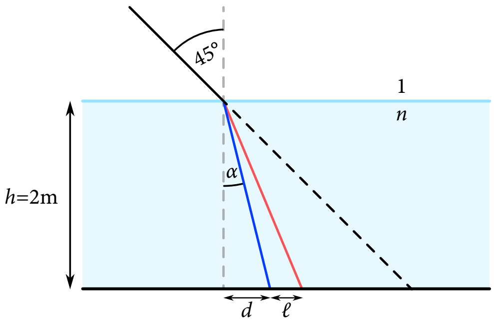
Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, melyet a fénysugár, a határfelületre merőleges egyenes a beesés helyén, és a medence alja határoz meg. A Pitagorasz-tétel alapján a fénysugár útja a vízben $\sqrt{d^2 + h^2}$, ahol h a medence mélysége, d pedig a medence alján található, a fénysugár által elért pont beesési merőlegestől vett távolsága. Így felírhatjuk:

$$\sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}. \tag{9.2}$$

Az előző egyenletbe való behelyettesítés után kifejezhetjük, hogy:

$$d = \frac{h}{\sqrt{2n^2 - 1}}. \tag{9.3}$$

[1] Ha még azt is számításba vesszük, hogy a pohárban lévő víz hőmérséklete lecsökken, ahogyan olvad bele a jég, a hőtágulás miatt a víz térfogata még kisebb is lesz, mint kezdetben.



Ábra 9.1: *A medence alját elérő legkülső fénysugarak*

A fény egyes színkomponensei különböznek (többek között) a törésmutatójukban. Ezért minden hullámhossz kicsit másképp törik meg, miután eléri a határt. A feladatból tudjuk, hogy a víz törésmutatója a látható hullámhosszokra vonatkozóan a megadott tartományban van – jelölje a határértékeket n_{min} és n_{max}. Mindkettő más értéket ad d-re. A d-k különbsége adja meg a medence alján lévő szivárványcsík keresett hosszát:

$$\ell = \left| \frac{h}{\sqrt{2n_{\text{min}}^2 - 1}} - \frac{h}{\sqrt{2n_{\text{max}}^2 - 1}} \right|. \tag{9.4}$$

A megadott értékekre $\ell \approx 13$ mm adódik.

10 A tartályban $\rho_{\text{i}} = 916\ \text{kg/m}^3$ sűrűségű, és $m_{\text{i}} = 1$ kg tömegű jég van, így a térfogata $V_{\text{i}} = m_{\text{i}}/\rho_{\text{i}} \doteq 1{,}092$ l.

A tartály teljes térfogatát V-vel jelölve, a fagyálló keverék $V_{\text{a}} = V - V_{\text{i}} \doteq 0{,}908$ l térfogatot foglal el, így a tömege $m_{\text{a}} = (V - V_{\text{i}})\rho_{\text{a}} \doteq 0{,}727$ kg. Az új fagyáspont az összetevők tömeg szerinti súlyozott átlaga, ami

$$T = \frac{m_{\text{i}} T_{\text{i}} + m_{\text{a}} T_{\text{a}}}{m_{\text{i}} + m_{\text{a}}}, \tag{10.1}$$

ahol T_{i} és T_{a} a víz és a fagyálló keverék fagyáspontja.

A megadott értékekre $T \doteq -8{,}4$ °C adódik.

11 Valahányszor Ádám vagy a hal egy darabot harap az almából, a felhajtóerő miatt az alma új helyzetbe kerül úgy, hogy az elmerült része mindig a térfogatának kétharmadát teszi ki.

Ezért bármely adott időpontban mindketten haraphatnak, bármennyire kicsi is a maradék alma. Mivel mindketten folyamatosan esznek, és egyszerre fejezik be, az elfogyasztott részek arányát a harapási sebességük aránya határozza meg. Ezért a válasz $\frac{3}{4}$.

12 Tegyük fel, hogy Jancsika sebessége v_0. Sík terepen fékezés közben egyenletes lassulással, a-val lassul, így a pillanatnyi sebessége $v(t)$ az idő függvényében így változik:

$$v(t) = v_0 - at. \tag{12.1}$$

Ha megállt, akkor a pillanatnyi sebessége $v(t) = 0$ lesz, ebből a t-t kifejezve $t = v_0/a$ a megálláshoz szükséges idő. A megtett út ekkor:

$$s = \frac{1}{2}at^2, \tag{12.2}$$

ez azt jelenti, hogy a $t = v_0/a$ idő alatt, még mielőtt Jancsika teljesen megáll, $s = \frac{1}{2}at^2$ utat tesz meg.

Ebből Jancsika lassulása:

$$a = \frac{2s}{t^2}. \tag{12.3}$$

Egyszerű trigonometriai összefüggéseket alkalmazva felírható, ha Jancsika egy α szögben lejtő dőlt síkon halad a vízszinteshez képest, akkor a gyorsulása $g \sin \alpha$.

Ha ez a gyorsulás ugyanakkora, mint Jancsika lassulása, akkor Jancsika nem fog megállni. Tehát:

$$\frac{2s}{t^2} = g \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \frac{2s}{gt^2}. \tag{12.4}$$

13 Annak ellenére, hogy az áramkör elsőre furcsa lehet, Ohm-törvényét így is érdemes használni. Ebben a specifikus esetben a rendszer ellenállása függ a műszer által mutatott áramerősségtől. Pontosabban, ha k ampert mutat, akkor az ellenállás $4k\ \Omega$ lesz.

Ohm-törvényéből következik, hogy

$$9\ \mathrm{V} = 4k\ \Omega \cdot k\ \mathrm{A}, \tag{13.1}$$

és ebből kifejezhető

$$k = \frac{3}{2}. \tag{13.2}$$

Tehát az ampermérő a következőt fogja mutatni: $\frac{3}{2}$ A.

14 Mivel ismerjük az LP lemez szögsebességét[2], megállapíthatjuk, hogy 20 perc alatt a lemez $20 \cdot 33⅓ = 666⅔$ fordulatot tett meg. Ez idő alatt a tű végigmegy az egész barázdán, tehát a barázda 666⅔ kört tesz meg a lemez középpontja körül. Mivel a lemez átmérője 30 cm, és a barázda 5 cm-re végződik a középponttól, a barázdás rész szélessége 15 cm − 5 cm = 10 cm, tehát a barázda két fordulata közötti távolság körülbelül

$$w \approx \frac{10\ \mathrm{cm}}{666⅔} = \frac{3}{20}\ \mathrm{mm} = 0{,}15\ \mathrm{mm}. \tag{14.1}$$

A barázda által lefedett S terület könnyen kiszámítható, mint a teljes lemez felületének és a középpont körüli barázdátlan résznek a különbsége:

$$S \approx \pi\Big((15\ \mathrm{cm})^2 - (5\ \mathrm{cm})^2\Big) = 200\pi\ \mathrm{cm}^2. \tag{14.2}$$

[2] Reméljük, hogy Patrick lemeze valóban egy LP lemez volt.

Végül a barázdát egy nagyon hosszú téglalap formájába kicsavarjuk. Ha ismerjük a felületét és a szélességét, akkor az ℓ hosszúság egyenlő a kettő hányadosával:

$$\ell \approx \frac{S}{w} = \frac{200\pi\ \text{cm}^2}{0{,}15\ \text{mm}} \approx 418{,}88\ \text{m} \doteq 419\ \text{m}. \tag{14.3}$$

15 Kata ugrásának sebességét fel lehet osztani vízszintes és függőleges komponensekre. A vízszintes komponens konstans, és nem annyira érdekes a számunkra. Tehát, legjobb lesz, ha az ugrást egy függőleges hajításként modellezzük. Jelölje Kata kezdeti sebességét v_0. Ez a sebesség lineárisan fog változni az ugrás során, a változás mértékét pedig a g gravitációs gyorsulás fogja meghatározni.

Kezdetben tehát Kata v_0 kezdősebességgel rendelkezik, abban a pillanatban pedig, amikor a deszka szintjét lefelé esés közben eléri, sebessége $-v_0$. A két sebesség különbsége tehát $2v_0$, és az időt, amit Kata a deszka szintje felett töltött, a következő formulával tudjuk meghatározni: $\frac{2v_0}{g}$. A feladat meghatározása alapján ez pont az ugrás teljes idejének a fele, vagyis a teljes idő:

$$T = \frac{4v_0}{g}. \tag{15.1}$$

Most fejezzük ki a v_0 kezdősebességet a deszka magasságának függvényében, ami $h = 10$ m. Abban a pillanatban, amikor Kata lefelé esés közben eléri ezt a magasságot, az egyenletesen gyorsuló mozgására felírhatjuk a

$$h = v_0\frac{T}{2} + \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2 \tag{15.2}$$

összefüggést.

Végül, a 15.1 egyenletből kifejezzük v_0-t, és visszahelyettesítjük a 15.2 egyenletbe. A probléma így a

$$h = \frac{gT^2}{4} \tag{15.3}$$

kifejezésre egyszerűsödik, amiből az időt már könnyen ki tudjuk fejezni:

$$T = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \approx 2\ \text{s}. \tag{15.4}$$

16 A medál geometriája a következőképpen néz ki: a függőleges vonal (a Pálcák Ura) alkotja az egyenlő oldalú háromszög (a Láthatatlanság Köpenye) súlyvonalát, magasságát és szögfelezőjét. A Pitagorasz-tétel segítségével kiszámíthatjuk ennek a hosszát: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mivel egyenlő oldalú háromszögről van szó, a többi súlyvonal is egyben szögfelező. Ennek köszönhetően tudjuk, hogy a háromszög súlypontja egybeesik a beírt kör középpontjával (a Feltámadás Kövével). A kör sugara pedig a súlyvonal hosszának egyharmada lesz, vagyis $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

A medál szimmetriája alapján tudjuk, hogy a súlypont a függőleges vonalon fog elhelyezkedni. A medál súlypontjának helyzetét az egyes súlypontok távolságainak és tömegeinek súlyozott átlagaként számíthatjuk ki. Így csak a súlypont függőleges helyzetét kell kiszámolnunk. Az egyszerűség kedvéért origónak azt a pontot választhatjuk, ahonnan a súlypont távolságát mérjük. Mivel a tömeg egyenesen arányos a huzal hosszával, a súlypont távolsága a háromszög csúcsától a következő lesz:

$$x = \frac{m_\triangle x_\triangle + m_\circ x_\circ + m_| x_|}{m_\triangle + m_\circ + m_|} = \frac{3a\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\pi a}{\sqrt{3}}\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4}}{3a + \frac{\pi a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3} a \doteq 0{,}555a. \tag{16.1}$$

17 A lövedék kilövéskori sebességét az energiamegmaradás elvéből vezethetjük le. Eleinte mindkét test álló helyzetben van, L magasságban a föld felett. A teljes mechanikai energiájuk, E_0 tehát tisztán a potenciális energiáikból tevődik össze, amit kedvünk szerint választhatunk meg. Mérjük most a Föld felszínéhez képest, azaz

$$E_0 = mgL + MgL. \tag{17.1}$$

Abban a pillanatban, amikor a deszka függőleges, mindkét test v sebességgel mozog, de az ellensúly épphogy a föld felett, a lövedék pedig $2L$ magasságban. Így a teljes mechanikai energia:

$$E_1 = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{17.2}$$

Mivel a mechanikai energia megmarad, teljesül, hogy $E_0 = E_1$, azaz

$$MgL + mgL = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2, \tag{17.3}$$

amiből ki tudjuk fejezni a lövedék kilövéskori sebességét:

$$v = \sqrt{2gL\frac{M-m}{M+m}}. \tag{17.4}$$

Innentől a lövedék egy parabola mentén halad, mivel függőleges irányban gyorsítja a gravitáció. Mi azt szeretnénk megtudni, mennyi idő telik el, amíg $2L$-nyit esik. Ezt egyszerűen megkapjuk:

$$\frac{1}{2}gt^2 = 2L \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{4L}{g}}. \tag{17.5}$$

Vízszintes irányban a lövedék állandó v sebességgel mozog, és t idő alatt

$$s = vt = 2\sqrt{2\frac{M-m}{M+m}}L \tag{17.6}$$

utat tesz meg.

18 Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy mindegyik sofőr 10:00-kor indul Pozsonyból.

A leglassabbtól a leggyorsabbig jelöljük a sávokat A, B, C, és D-vel. A Pozsonyt percenként az egyes sávokból elhagyó kocsik számát jelöljük a, b, c és d -vel. Először ki kell számítsuk, mennyi időbe telik egyes sávokban a teljes út megtétele. Ez külön-külön 5, 4, 3⅓ és 2,5 óra.

Artúr a B sávban 14:00-kor érkezett meg Prágába. Ez idő alatt megérkezett pár kocsi Prágába a leglassabb A sávban, ezek 9:00-kor indultak Pozsonyból. Ez azt jelenti, hogy Artúr megelőzte az összes autót az A sávban, amik 9:00 és 10:00 között indultak Pozsonyból, ami $60a$ kocsi.

Hány autót előzött meg Péter, a leggyorsabb sofőr? 12:30-kor érkezett meg Prágába, azokat az autókat kellett megelőznie a C sávban, amelyek 9:10 és 10:00 között indultak Pozsonyból, ami $50c$ autót jelent. A feladat szerint ez a szám pontosan 200, tehát $50c = 200$.

Ha ugyanezt a számítást megismételjük mindkét sofőrre és az összes sávra, a feladat egy egyszerű egyenletrendszerre egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} 50c &= 200, \\ 150a + 90b + 50c &= 620, \\ 100a + 40b \quad\quad &= 220. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Ebből megkapjuk, hogy $a = 1$, tehát $60a = 60$, azaz Artúr az útja során 60 autót előzött meg.

19 Két egység, a *lóhossz* és a *lóadag*, közvetlenül átalakítható SI egységekre, mivel dimenzióik a másodperc és a méter reciprokai:

- a *lóhossz* ζ az 8 ft $\doteq$ 2,438 m és
- a *lóadag* δ az $\frac{1{,}7\ \mathrm{kg}}{100\ \mathrm{kg}\cdot 1\ \mathrm{d}}$, vagy körülbelül $1{,}97\cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$.

A *lóerő*, ahogy a neve is sugallja, a teljesítmény mértékegysége, aminek a dimenziója azonos a watt-tal. Ha behelyettesítjük a megfelelő mértékegységeket, megkapjuk, hogy egy *lóerő* ψ a következőnek felel meg: 735,5 W[3]. Alapmértékegységekkel a watt:

$$\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m/s} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3. \tag{19.1}$$

Ahhoz, hogy a tömegegységet megkapjuk, el kell osszuk a teljesítményt az egységnyi hosszal és az idő reciprokának köbével. Ekkor:

$$1\ \text{lótömeg} = \frac{\psi}{\zeta^2\delta^3} \doteq \frac{735{,}5\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}}{(2{,}438\ \mathrm{m})^2\cdot(1{,}97\cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1})^3} \doteq 1{,}624\cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}. \tag{19.2}$$

20 Függetlenül attól, hogy Vili mozgása hogyan néz ki, két feltételnek mindig teljesülnie kell:

- a futása teljes idejének meg kell egyeznie azzal az idővel, amit Kati a mozgólépcsőn tölt;
- ugyanazon a helyen kell végeznie, mint Kati, így a felfelé és lefelé futott lépcsőfokok összessége egyenlő kell legyen.

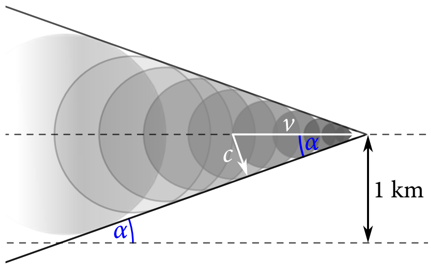
Mivel a felfelé futás sebessége csak egyharmada a lefelé futásénak, a felfelé és lefelé futott időtartam arányainak is fordítottnak kell lenniük, azaz $6 : 2 = 45 : 15$. Mivel Kati 60 másodpercet fog állni a mozgólépcsőn, Vili összesen 45 másodpercet fut majd felfelé és 15 másodpercet lefelé.

[3] Vagy 750 W, ha $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$-t használunk.

Így az összes távolság, amit megtett,

$$45\ \mathrm{s} \cdot 2\ \mathrm{lepcsfok/s} + 15\ \mathrm{s} \cdot 6\ \mathrm{lepcsfok/s} = 180\ \mathrm{lepcsfok}. \tag{20.1}$$

21 A hang minden pillanatban minden irányba terjed c hangsebességgel a légkörhöz képest. Mivel a repülőgép v sebessége nagyobb, mint a c hangsebesség, a keletkezett hanghullámok (lökéshullámok) burkoló görbéje kúp alakú, a repülőgép irányába, melynek csúcsszöge 2α, amelyre igaz az, hogy $\sin\alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{3}$. Ennek a kúpnak a csúcsa a repülőgép irányába halad (a forrással együtt) v sebességgel, és a felülete az arra merőleges irányba terjed c sebességgel.



Ábra 21.1: *Lökéshullám Marcell repülőgépéből*

Ha Szabina repülőgépe nyugalomban lenne, a hang burkolója Marcell repülőgépéből csak akkor érné el őt, amikor Marcell

$$1\ \mathrm{km} \cdot \cot\alpha = 1\ \mathrm{km} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{km} \tag{21.1}$$

távolságra lenne a ponttól, ahol egymást a legjobban megközelítik. De mivel Szabina v sebességgel mozog az ellentétes irányba, mindketten csak a távolság felét, $\sqrt{2}$ km-t fognak ez idő alatt megtenni. Marcell ezt a távolságot

$$\frac{\sqrt{2}\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{km/s}} = \sqrt{2}\ \mathrm{s} \tag{21.2}$$

idő alatt teszi meg.

22 Ha az üres ballonnak a friss házasokkal együtt a tömege M, és a benne lévő hidrogénnek a tömege m_H, akkor a felfújt ballonra ható gravitációs erő: $(M + m_\mathrm{H})g$. Hogy a ballon lebegjen, muszáj egy $V\rho_\mathrm{a}g$ felfele ható felhajtóerőnek is hatnia rá, ahol V a ballon térfogata és ρ_a a levegő sűrűsége. (Itt persze titokban elhanyagoljuk a párnak a térfogatát…shh…) Az erőegyenlőségre vonatkozó egyenlet:

$$(M + m_\mathrm{H})g = V\rho_\mathrm{a}g, \tag{22.1}$$

amibe visszahelyettesítve: $V = \frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}$, ahol ρ_H a hidrogén sűrűsége. A következőt kapjuk:

$$M + m_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}\rho_\mathrm{a}. \tag{22.2}$$

Ebből kijezhető a szükséges hidrogén tömege:

$$m_{\mathrm{H}} = \frac{M}{\frac{\rho_{\mathrm{a}}}{\rho_{\mathrm{H}}} - 1}. \tag{22.3}$$

Most már ki tudjuk fejezni a hidrogén sűrűségét normál állapotok között, $\rho_{\mathrm{H}} = 0{,}09\ \mathrm{kg/m^3}$, vagy felhasználhatjuk azt, hogy tetszőleges gáznak a moláris térfogata standard állapotban $V_{\mathrm{m}} = 22{,}4\ \mathrm{l/mol}$. Tehát, a hidrogén sűrűsége:

$$\rho_{\mathrm{H}} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{V} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{nV_{\mathrm{m}}} = \frac{M_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{m}}}, \tag{22.4}$$

ahol $M_{\mathrm{H}} = 2\ \mathrm{g/mol}$ a molekuláris hidrogén moláris tömege. Visszahelyettesítve tehát 22.3-be azt kapjuk, hogy:

$$m_{\mathrm{H}} = \frac{M}{\frac{\rho_{\mathrm{a}} V_{\mathrm{m}}}{M_{\mathrm{H}}} - 1} \doteq 73{,}7\ \mathrm{kg}. \tag{22.5}$$

Ebből tehát a szükséges mennyiségű hidrogén:

$$n_{\mathrm{H}} = \frac{M}{\rho_{\mathrm{a}} V_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{H}}} \doteq 36{,}9\ \mathrm{kmol}. \tag{22.6}$$

Ez a hidrogén elektrolízissel lett előállítva. Mivel ez a folyamat a hidrogén égetésének megfordítása, ha egy mol hidrogén elégetésével H energia szabadul fel, ugyanennyi kell annak létrehozásához is egy ideális világban. De Marci és Szabina nem ilyen világban élnek, így ők ezt a folyamatot csak η hatásfokkal tudják elvégezni, tehát egy mol hidrogén előállításához $\frac{H}{\eta}$ energia szükséges. Ebből következik, hogy n_{H} mol előállításához:

$$E = \frac{H}{\eta} n_{\mathrm{H}} = \frac{H}{\eta} \frac{M}{\rho_{\mathrm{a}} V_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{H}}} \tag{22.7}$$

energia szükséges, ami a feladatban megadott adatok alapján nagyjából 21 GJ vagy 5855 kWh, ami az általuk használt áram tarifájával: 1171 €.

23 Láthatjuk, hogy a létra minden fokpárja között egy tökéletes vezetőnk van. Tehát a létrát fel tudjuk úgy osztani, mintha 99 párhuzamos áramkör lenne egymás után sorosan kapcsolva. Ezek eredő ellenállását már ki tudjuk számítani. A létra n-edik szekciójának eredő ellenállását a következő, párhuzamos kapcsolásra vonatkozó formula segítségével fejezhetjük ki:

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega \parallel \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\,\Omega. \tag{23.1}$$

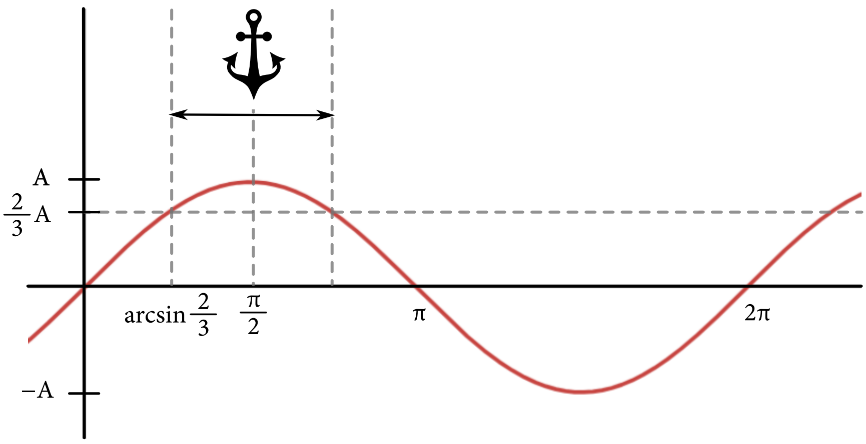
Ennek segítségével a létrát redukálni tudjuk 99 ellenállás soros kapcsolására, már csak össze kell adnunk ezek ellenállásának értékét. Ez elég bonyolultnak hangzik… Szerencsénkre, megtehetjük, hogy minden elemet bővítünk egy megfelelő értékkel, hogy kiküszöböljük a nevezőben lévő négyzetgyököket:

$$R = \sum_{n=1}^{99} R_n = \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right) \Omega = \sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \Omega. \tag{23.2}$$

Ebben felfedezhetünk úgynevezett *teleszkopikus összegeket*, és láthatjuk, hogy az utolsó pozitív és az első negatív tag kivételével minden másik tag kioltja egymást. Ebből megkapjuk az eredményt,

$$\sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\,\Omega=\left(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}}+\cancel{\sqrt{99}}-\sqrt{98}+\ldots-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}\right)\,\Omega=10\,\Omega-1\,\Omega=9\,\Omega. \tag{23.3}$$

$\boxed{24}$ A tengerszint az időben szinuszosan fog változni, így rajzoljunk egyet. A szinuszfüggvény periódusa 2π; de a mi esetünkben ez átskálázódik 12 h-ra. A kérdés, hogy a függvény argumentumainak (vízszintes tengely) hányad részére nagyobb az értéke, mint $\frac{2}{3}A$. Ez nem fog függeni attól, hogy a függvény periódusa 2π vagy 12 h – így az egyszerűség kedvéért, rajzoljunk olyat, ahol a periódus 2π.



Ábra 24.1: *A tengerszint viselkedése a kikötéshez alkalmas időtartamot bejelölve*

A kép alapján nyilvánvaló, hogy az fog érdekelni minket, amikor a függvény eléri a $\frac{2}{3}A$ értéket. Ezt pontosan kiszámíthatjuk mint $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$.

Mekkora hányada lesz egy 2π hosszú periódusnak $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ és $\frac{\pi}{2}$ között? Ez

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi}, \tag{24.1}$$

és két ilyen rész lesz, így a teljes valószínűség

$$2\cdot\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi}\doteq 0{,}267\,72\doteq 26{,}8\ \%. \tag{24.2}$$

$\boxed{25}$ Álljunk a Föld középpontjába, és jelöljük a két pont közötti szöget α-val. A Max által mért távolság $R\alpha$, míg a Miki által mért távolságot könnyen meghatározhatjuk egy egyenlő szárú háromszög alapjaként:

$$2R\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{25.1}$$

Ennek a két távolságnak pont $\Delta\ell = 1$ m különbséget kell mutatnia. Ebből azt kapjuk, hogy:

$$R\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2}+\Delta\ell. \tag{25.2}$$

Innen α -ra kell megoldani a kapott egyenletet, viszont ez nem egyszerű. Sőt, analitikailag lehetetlen! Úgyhogy meg kell állapodnunk egy közelítő megoldás mellett. Így a megoldást numerikus-bináris kereséssel, vagy Taylor-sorfejtéssel is megadhatjuk. A szinusz függvény Taylor sorfejtéssel felírva:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots . \tag{25.3}$$

Mivel $\Delta\ell$ nagyon kicsi, ezért várhatóan α is nagyon kicsi lesz. Ebből kifolyólag csak az első, nem triviális tagot vesszük figyelembe. Így azt kapjuk, hogy:

$$R\alpha = R\alpha - R\frac{\alpha^3}{24} + \Delta\ell, \tag{25.4}$$

amiből

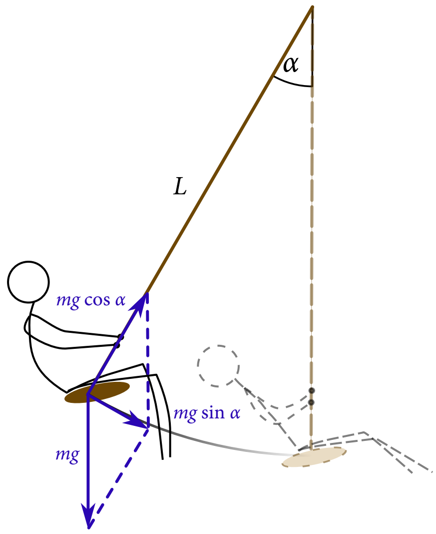
$$R\alpha = R\sqrt[3]{\frac{24\,\Delta\ell}{R}} = \sqrt[3]{24R^2\,\Delta\ell}. \tag{25.5}$$

Ez pedig az a távolság, amit Max mért. Behelyettesítve azt kapjuk, hogy 99,2 km.

$\boxed{26}$ Csak két erő hat Bálintra: a nehézségi erő, aminek nagysága mg, és a hinta kötelén ható kötélerő, aminek a nagysága bár változik, viszont tudjuk róla, hogy centripetális, és ebből kifolyólag mindig a hinta felfüggesztésének, azaz itt a forgáspont irányába mutat. Az erő, amivel a hinta Bálintot nyomja, jelen esetben a kötélerővel egyezik meg. Tehát csak azt kell meghatároznunk, hogy mekkora a kötélerő a legalacsonyabb pontban.

Pályája bal- és legfelső pontján Bálint nem mozog, tehát nincs sebessége. Mivel nem marad ebben a helyzetben, ezért biztosan hat rá valamilyen erő, ami kitéríti innen. És mivel a hinta egy körív mentén mozog, ezért azt is tudjuk, hogy ekkor az erő a körívvel érintő irányú, és iránya a legalacsonyabb pont felé mutat. Ugyanakkor a kötélirányú húzóerőnek $m \cdot 0{,}5\, g$ nagyságúnak kell lennie, és a gravitációs gyorsulás változatlanul mg nagyságú.

Ezeket az erőket felrajzolva láthatjuk, hogy a legnagyobb α kitérési szögnél a centripetális erő nagysága $mg\cos\alpha$. Mivel $\cos 60° = 0{,}5$, ezért Bálint esetében ez a legnagyobb α kitérési szög 60° lesz.



Ábra 26.1: *A legnagyobb kitérés pillanatában Ádámra ható erők*

Most meg kell határoznunk a sebességet a legalacsonyabb kitérés esetén. Ennek meghatározásához a helyzeti energia és mozgási energia közötti kapcsolat figyelembevételével a következőt tudjuk felírni:

$$\Delta U = mg(L - L\cos 60^\circ) = mg\frac{L}{2}, \tag{26.1}$$

ebből a sebesség:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL}. \tag{26.2}$$

Végül meg kell határoznunk a láncok húzóerejének nagyságát ekkor. Ennek két komponense van: a centripetális erő, ami biztosítja, hogy a hinta körpályán haladjon, és a hinta nehézségi erővel szembeni ellenereje. Tehát:

$$F = ma = \frac{mv^2}{L} + mg = mg + mg = 2mg. \tag{26.3}$$

Így a hinta nyomóerejének megfelelő gyorsulás értéke, amit Bálint érezni fog a legalacsonyabb helyzetben:

$$a = \frac{2mg}{m} = 2\,g. \tag{26.4}$$

$\boxed{27}$ Faraday elektromágneses indukcióra vonatkozó törvénye kimondja, hogy az indukált feszültség egyenlő a mágneses fluxus hurkon keresztül történő változásának negatív mértékével. A mágneses fluxus a következőképpen számítható: $\Phi = BS\cos\theta$, ahol B a mágneses tér nagysága, amely az S területen halad át, és θ szögben lép be.

Esetünkben S a nyaklánc belső területe. Ez nyilvánvalóan Kata nyakán van, így a nyaka formáját követi, ami nem változik. A feladat leírása szerint a mágneses indukció nagysága, B, szintén állandó. Mivel Kata csak a körhinta forgástengelye körül forog, a θ szög sem változik. Ez mind azt jelenti, hogy a Kata nyakláncán keresztül haladó mágneses fluxus sem változik, így semmilyen feszültség nem indukálódik benne, és ennek következtében áram sem indukálódik.

28 Jelöljük az úszó alapterületét S_b -vel, a sűrűségét ρ_b -vel, a térfogatát V_b-vel. A nyílás területe legyen S_o, a zsinór hossza ℓ, valamint a vízszint magassága a határhelyzetben h. A víz alatti része az úszónak ekkor $v = h - \ell$ magas. Az úszóra ható erők eredőjének zérusnak kell lennie, tehát:

$$F_G + F = F_{\mathrm{vz}}, \tag{28.1}$$

ahol F_G a gravitációs erő, F_{vz} a felhajtó erő és F erővel húzza a zsinór az úszót. A határhelyzetben a zsinór által kifejtett erő megegyezik abból a nyomásból származó erővel, amivel a dugó a nyílásnak feszül, [4] például $F = p_h S_o$, ahol p_h a hidrosztatikai nyomás az eszköz aljának közelében. Miután behelyettesítjük az erőket, megkapjuk, hogy:

$$S_b H \rho_b g + h\rho g S_o = S_b(h - \ell)\rho g, \tag{28.2}$$

ahol ρ a víz sűrűsége.

A legkisebb térfogatú beönthető vízmennyiség ahhoz a helyzethez kapcsolódik, amelyben az úszó a lehető legközelebb van kötve az eszköz aljához, tehát $\ell \to 0$. Eszerint megkapjuk, hogy:

$$h = \frac{S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}H, \tag{28.3}$$

és a kapcsolódó térfogat:

$$V_{\min} = (S - S_b)h = \frac{S - S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}V_b. \tag{28.4}$$

A legnagyobb térfogatú beönthetö vízmennyiség ahhoz a helyzethez kapcsolódik, amelyben a dugó abban a pillanatban lesz elengedve, amikor az úszó teljesen elmerül, tehát amikor $h = H + \ell$. Ez akkor történik, amikor a zsinór hossza:

$$\ell = \left(\frac{S_b}{S_o}\frac{\rho - \rho_b}{\rho} - 1\right)H, \tag{28.5}$$

amihez a következö térfogat kapcsolódik:

$$V_{\max} = S\ell + (S - S_b)H = \left[\frac{S}{S_o}\left(1 - \frac{\rho_b}{\rho}\right) - 1\right]V_b. \tag{28.6}$$

A feladat állítása szerint, $S_o = \frac{S}{4}$ és $S_b = 0{,}99S$. A megadott értékekkel a minimum térfogat $V_{\min} = \frac{1}{148}$ l és a maximum térfogat $V_{\max} = 1$ l.

29 A feladat azt mondja, hogy minden harmadik alkalommal, amikor a lassabb inga (melynek periódusideje T_1) a jobb szélső helyzetén áthalad, találkozik a gyorsabb ingával, amelynek periódusideje T_2 (ahol $T_1 > T_2$). E két pillanat között a lassabb inga három periódust hajt végre, míg a gyorsabb inga valamilyen n számú periódust. Ez alapján:

$$3T_1 = nT_2. \tag{29.1}$$

A második fontos információ, hogy e két pillanat között a gyorsabb inga öt periódust hajt végre, míg a lassabb inga valamilyen m számú periódust teljesít. Így:

$$mT_1 = 5T_2. \tag{29.2}$$

[4] Ha ennél nagyobb lenne, kihúzná a dugót.

Teljesen mindegy, hogy az ingák a bal vagy a jobb oldalon találkoznak-e. Mindkettő egyszerű harmonikus mozgást végez, és ha így találkoznak a bal és jobb oldalon, akkor mindkét oldalon találkozni fognak, miután befejeztek öt, illetve három periódust. Ezért az is lényegtelen, hogy Dani kezdetben az ingákat balra vagy jobbra téríti ki.

Az 29.1 és 29.2 egyenletek hányadosából:

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad mn = 15. \tag{29.3}$$

Az egyik megoldás az egyenletre $m = 15$, $n = 1$, de ez a megoldás nem észszerű – az első bekezdésből tudjuk, hogy ha a lassabb inga három periódust végez, és a gyorsabb n periódust, akkor n -nek nagyobbnak kell lennie, mint 3. A második megoldás az 29.3 egyenletre $m = 3$, $n = 5$, amely megfelel a követelményeknek. Ez azt jelenti, hogy az ingák periódusai 3 : 5 arányban állnak egymással.

Egy ℓ hosszú inga periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{29.4}$$

Ez felírva a mi ingáinkra, melyeknek hossza ℓ_1 és ℓ_2, illetve ismerjük a periódusok arányát, akkor a következőt kapjuk:

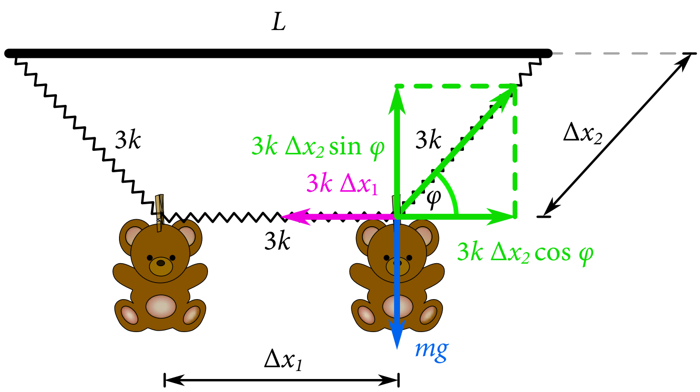
$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}. \tag{29.5}$$

A feladat szövegéből tudjuk, hogy $\ell_1 = 10$ cm, és 29.5 egyenletből kifejezhetjük, hogy:

$$\ell_2 = \ell_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \tag{29.6}$$

mely a $T_2 : T_1 = 3 : 5$ arányra az $\ell_2 = 3{,}6$ cm eredményt adja.

30 Először is, vegyük észre, hogy ha egy k rugóállandójú rugót három egyenlő részre osztunk, minden résznek $3k$ lesz a rugóállandója. Ha az eredeti rugót F erővel nyújtjuk, mindhárom harmadának a megnyúlása a teljes megnyúlás harmada. Viszont, mindhárom részre F erő hat, így háromszoros rugóállandót kapunk.



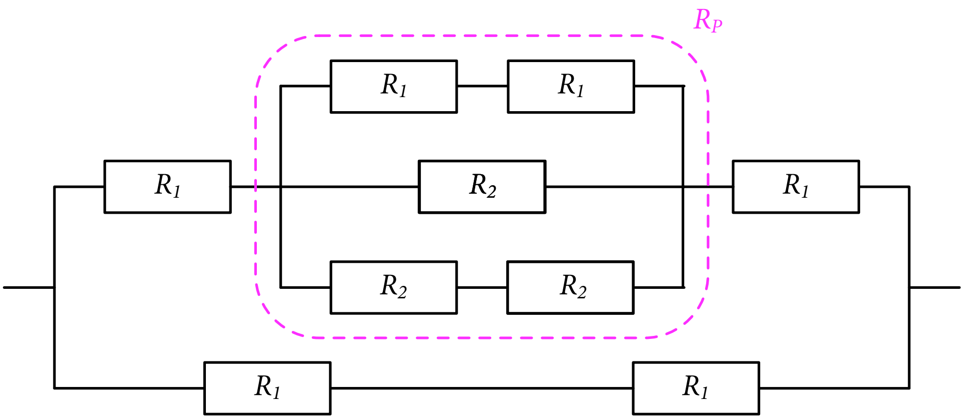
Abban a pontban, ahol a jobb oldali plüss fel van függesztve, három erőhatást kell figyelembe vennünk: először is, a lefelé mutató gravitáció, melynek nagysága mg, másodszor, a rugónak azon részében ébredő erő, ami a két plüss között van. Ez balra mutat, és nagysága $3k\,\Delta x_1$. A harmadik erő általánosan φ szöget zár be a vízszintessel, $3k\,\Delta x_2$ nagyságú, és fel tudjuk osztani egy függőleges és egy vízszintes komponensre, melyek nagysága rendre $3k\,\Delta x_2 \cos\varphi$, illetve $3k\,\Delta x_2 \sin\varphi$. Tudjuk, hogy a függőleges komponens nagyságának pont mg-nek kell megfelelnie, a vízszintesnek pedig $3k\,\Delta x_1$-nek. Vegyük észre továbbá, hogy a plüssök pontosan $\Delta x_2 \sin\varphi$ mélységben lógnak. Ezt a mennyiséget a függőleges erőkomponensek egyenlőségéből így fejezhetjük ki:

$$\Delta x_2 \sin\varphi = \frac{mg}{3k}. \tag{30.1}$$

31 Amint azt már megmutattuk a feladat mintamegoldásában, 16, a háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, a kör sugara pedig $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, és a közeppontja egybeesik a háromszög súlypontjával.

Először megállapítjuk, hogy ha feszültségforrást kapcsolnánk a pontokhoz, amelyek között az ellenállást mérjük, a háromszög magasságán (az alaprúdon) nem folyna áram. Ha a feszültségforrást fordítva kapcsolnánk, az áramnak ellentétes irányban kellene folynia. Azonban úgy találjuk, hogy az elrendezés pontosan ugyanúgy néz ki, mint korábban, tehát az áramoknak azonos módon kell folyniuk. Ez azt jelenti, hogy $I = -I$, ami akkor igaz, amikor $I = 0$.

Hasonló érveléssel megállapíthatjuk, hogy a kör és a háromszög alsó érintkezési pontján sem fog áram folyni közöttük. Mivel ezen a csomóponton nem folyik áram, megszakíthatjuk, és így még tovább egyszerűsíthetjük a kapcsolási sémát. Újrarajzolás után a [@-fig:deathly-hallow-2] ábrán látható sémát kapjuk.



Ábra 31.1: *Redrawing of the resistance network in Sarah's pendant*

A háromszög oldalának felére eső ellenállásra az $R_1 = \frac{\lambda a}{2}$ jelölést használtuk, a kör harmadára eső ellenállásra pedig az $R_2 = \frac{a\pi\lambda}{3\sqrt{3}}$ jelölést. Ez egy egyszerű soros-párhuzamos ellenállás-kapcsolás, amelynek eredő ellenállását az ismert szabályok szerint számíthatjuk ki:

- sorosan kapcsolt ellenállások esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások összege;
- párhuzamosan kapcsolt ellenállások esetén az eredő ellenállás reciproka az egyes ellenállások reciprokainak összege.

Ha a három párhuzamos ág eredő ellenállását R_P-vel jelöljük, akkor a következőnek kell teljesülnie:

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2} = \frac{3R_1 + R_2}{2R_1 R_2} \quad \Rightarrow \quad R_P = \frac{2R_1 R_2}{3R_1 + R_2}. \tag{31.1}$$

Ezt követően a medál teljes ellenállására ezt kapjuk:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1 + \frac{2R_1R_2}{3R_1+R_2}} = \frac{6R_1 + 3R_2}{2R_1(3R_1 + 2R_2)} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2}{3}\frac{3R_1 + 2R_2}{2R_1 + R_2}R_1 = \frac{\lambda a}{6}\frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \doteq 0{,}563\lambda a. \tag{31.2}$$

32 A gravitációs erő megszűnésének pillanatában a Föld egyenes vonalú egyenletes mozgásba kezd a kerületi sebességével megegyező sebességgel. Ez tangenciális, azaz érintő irányú lesz az eredeti körpályájára nézve. Ha elég sokáig van a gravitáció kikapcsolva, akkor elég távol kerül a Naptól, és biztosan nem fog újra gravitációsan kötött rendszert alkotni a két égitest. E között a két szélső helyzet között pedig egy nagyobb excentricitású pályára áll.

A két különböző lehetőség között van egy kritikus pont, amikor a gravitáció visszakapcsolása után a teljes mechanikai energiája a rendszernek nulla. Mivel gravitáció nélkül nincs potenciális energia, a kinetikus energia nem fog változni, így elég megtalálni azt az időbeli pontot, amikor a visszakapcsolás után a kinetikus és potenciális energia összege nulla:

$$T + U(r) = 0. \tag{32.1}$$

Központi gravitációs erőtérben a potenciális energia

$$U(r) = -\frac{GM_\odot m_♁}{r}, \tag{32.2}$$

míg a kinetikus energia $T = \frac{m_♁ v^2}{2}$ konstans. Egy ismert d sugarú körpályára ki tudjuk fejezni a v pályasebességet, hisz a gravitációs erő szolgáltatja a centripetális erőt,

$$\frac{v^2}{d} = \frac{GM_\odot}{d^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_\odot}{d}. \tag{32.3}$$

Miután visszahelyettesítettük a 32.1 képletbe a 32.2, 32.3 egyenleteket, és leosztottunk a Föld tömegével:

$$\begin{aligned} \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{v^2}{2}, \\ \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{GM_\odot}{2d} \quad \Rightarrow \quad r = 2d. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Tehát a Földnek legalább kétszer olyan távol kell kerülnie a Naptól, mint mielőtt a Sötét Úr kikapcsolta a gravitációt. Mindazonáltal, mivel a sebesség tangenciális, és nem radiális, a kikapcsolt állapot közben megtett L útjának a hosszát a Pitagorasz-tétellel fogjuk kiszámítani: $L = \sqrt{(2d)^2 - d^2} = \sqrt{3}d$. Most már pontosan kifejezhetnénk a keringési sebességet, ámbár egyszerűbb észben tartani, hogy egy teljes keringési periódus egy év, azaz

$$v = \frac{2\pi d}{1\,\mathrm{a}}, \tag{32.5}$$

tehát a Sötét Úrnak

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{3}d}{2\pi d} \cdot 1\,\mathrm{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\mathrm{a} \doteq 101\,\mathrm{d} \tag{32.6}$$

kell kikapcsolnia a gravitációs teret, azaz egy kicsit tovább, mint három hónapig.

33 Az abszolút fekete dupla főzőlap, amelyet egy elképesztően nagy hőmérsékletre, T_0-ra melegítettek, sugárzással hűl le. Az egyensúlyi hőmérsékleten a sugárzási teljesítmény megegyezik az elektromos hálózatból származó teljesítménnyel:

$$P = S\sigma T_0^4, \tag{33.1}$$

ahol S a terület, σ pedig a Stefan-Boltzmann-állandó.

Amikor a főzőlapot folyadékkal hűtjük, ennek a teljesítménynek egy része, P', a folyadék felmelegítésére és elpárologtatására fordítódik, amit így fejezhetünk ki:

$$P = S\sigma T_1^4 + P', \tag{33.2}$$

ahol T_1 a lehűtött főzőlap hőmérséklete. A folyadék által felvett teljesítmény:

$$P' = S\sigma\left(T_0^4 - T_1^4\right). \tag{33.3}$$

A folyadék t idő alatt $Q = P't$ hőt vesz fel, ami az m tömegű, c fajhőjű és l párolgáshőjű folyadék ΔT hőmérséklettel való felmelegítésére és elpárologtatására fordítódik. Ezt így írhatjuk fel: $Q = mc\,\Delta T + ml$. Esetünkben $\Delta T = 80\,°\mathrm{C}$, mert a folyadék 20 °C-ról 100 °C-ra melegszik, majd elpárolog és elhagyja a felületet. Így tehát:

$$P't = mc\,\Delta T + ml. \tag{33.4}$$

Felírjuk m-et mint $V\rho$, és behelyettesítjük a P' értékét az **??** egyenletből, hogy kifejezzük a térfogatáramot:

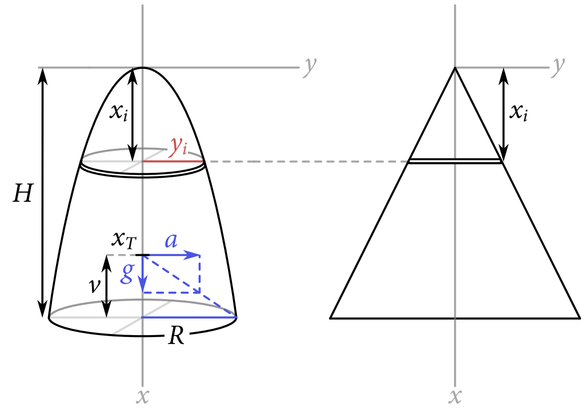
$$\frac{V}{t} = \frac{S\sigma\left(T_0^4 - T_1^4\right)}{\rho\left(c\,\Delta T + l\right)}. \tag{33.5}$$

Behelyettesítve a megadott értékeket 0,094 ml/s adódik.

34 A kérdés megválaszolásához szükséges a paraboloid tömegközéppontjának megtalálása. Válasszuk a képen jelölt koordinátarendszert. A paraboloid felszínét az $y = k\sqrt{x}$ függvénnyel írhatjuk le. Minthogy az $[H; R]$ pont a paraboloid felszínéhez tartozik, $R = k\sqrt{H}$, ahonnan $k = \frac{R}{\sqrt{H}}$, így $y = \frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{x}$.

A paraboloid tömegközéppontja a paraboloid tengelye mentén fekszik, v magasságban. Ezt a magasságot megkaphatjuk, ha felosztjuk a paraboloidot megfelelően választott darabokra, és a paraboloid tömegközéppontja az egyes darabok tömegközéppontjainak a súlyozott átlaga lesz. Ebben a konkrét esetben, egy megfelelő választás: nagyon vékony, vízszintes szeletek sokasága. Következésképpen, az x koordinátája a paraboloid tömegközéppontjának:

$$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \sigma\pi y_i^2 \cdot x_i}{M} = \frac{\sum_i \sigma\pi \frac{R^2}{H} x_i \cdot x_i}{M}. \tag{34.1}$$



Ábra 34.1: *A paraboloid egy vízszintes szelete és egy háromszög. Mindkét esetben a szelet tömege lineárisan nő a fentről mért távolsággal, ezáltal mindkét alakzat tömegközéppontja ugyanolyan magasságban lesz.*

Vegyük észre, hogy az egyes darabok tömege, $m_i = \sigma\pi\frac{R^2}{H}x_i$, lineárisan nő a koordinátával. Hasonló tulajdonsággal bír egy háromszög is felszeletelve – a hossza, és így a tömege egyes szeleteknek lineárisan nő a felső csúcstól mért távolsággal.[5] Mindenesetre tudjuk, hogy a háromszög tömegközéppontja a magasságának egyharmadánál található, ezáltal a paraboloidnak ugyanezzel a tulajdonsággal kell bírnia, így

$$v = \frac{H}{3}. \tag{34.2}$$

Ezután már csak az autó legnagyobb megengedett lassulását kell megkeresnünk. Ehhez a határlassuláshoz az eredő gyorsulásnak (az autó lassulásának és a gravitációnak) a paraboloid alapjának a szélére kell mutatnia. A háromszöggel való hasonlóság alapján

$$\frac{a}{g} = \frac{R}{\frac{H}{3}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3Rg}{H}. \tag{34.3}$$

35 Osszuk fel a Napot két részre: a magra és egy külső rétegre, amit levet, mikor meghal. A kilökődési folyamat során az erők csak sugárirányban hatnak, ezért a mag impulzusmomentumán ezek nem fognak változtatni. Vagyis, a mag eredeti impulzusmomentuma megmaradó mennyiség lesz, ezt kell kiszámolnunk, amihez a tömegére és a sugarára lesz szükségünk.

A probléma leírásából tudjuk, hogy a sűrűségek aránya 63 : 1, vagyis

$$\rho_\mathrm{b} = \frac{\rho_\mathrm{m}}{63}, \tag{35.1}$$

ahol ρ_m és ρ_b rendre a mag és a burok sűrűségeit jelölik.

Továbbá, ha kivonjuk a mag térfogatát a Nap térfogatából, a burok térfogatára a következő összefüggésre jutunk:

$$V_\mathrm{b} = \frac{m_\mathrm{b}}{\rho_\mathrm{b}} = \frac{m_\odot}{\rho_\odot} - \frac{m_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{m}}. \tag{35.2}$$

[5] Ez némileg analóg a Cavalieri-elvvel

Használjuk ki, hogy $m_\mathrm{m} = m_\mathrm{b} = m_☼/2$, és helyettesítsünk be 35.1-ból, ekkor a mag sűrűségére adódó formula:

$$\rho_\mathrm{j} = 32\rho_☼ = 32\frac{m_☼}{V_☼} = \frac{24}{\pi}\frac{m_☼}{r_☼^3}. \tag{35.3}$$

A gömb alakú mag sugarát a tömegéből és a sűrűségéből számíthatjuk ki:

$$r_\mathrm{m} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{m_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{m}}} = \frac{r_☼}{4}. \tag{35.4}$$

Jelölje a mag tehetetlenségi nyomatékát a kezdőállapotban I_0 (amikor a sugara $r_☼/4$), a végállapotban pedig I. Az impulzusmomentum-megmaradás miatt

$$I_0\omega_0 = I\omega, \tag{35.5}$$

ahol $omega_0 = 2\pi/T_0$ a forgás kezdeti körfrekvenciája, $T_0 = 28$ d kezdeti forgási periódussal, $omega = 2\pi/T$ pedig a végállapoti körfrekvencia, T forgási periódussal. Behelyettesítve és átrendezve 35.5-t,

$$T = T_0\frac{I}{I_0}. \tag{35.6}$$

Tehát, csak az I/I_0 arányt kell kiszámolnunk. Egy m tömegű és r sugarú gömb tehetetlenségi nyomatéka

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \tag{35.7}$$

Esetünkben, a Nap magja egy kisebb gömbbé esik össze, vagyis csak a sugara változik meg. Vagyis, a 35.6 egyenletben minden kiesik, kivéve a sugarak négyzetét.

$$T = T_0\frac{r_\mathrm{WD}^2}{r_\mathrm{m}^2} = 16T_0\frac{r_\mathrm{WD}^2}{r_☼^2}. \tag{35.8}$$

Behelyettesítés után az eredmény $T \doteq 1975$ s.

36 Jelöljük a napneutrínók fluxusát $\Phi = 10^{15}/(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s})$-ként. Ez azt jelenti, hogy ennyi neutrínó halad át egy 1 m^2 területen, amely merőleges a Nap felé vezető irányra, 1 s alatt. Írhatjuk így:

$$\Phi = \frac{\Delta N}{S\,\Delta t}, \tag{36.1}$$

ahol ΔN a neutrínók száma, S a terület és Δt az időtartam.

Továbbá jelöljük a detektor térfogatát $V = 1000\ \mathrm{m}^3$-ként, és a neutrínók és a víz közötti kölcsönhatások gyakoriságát $R = 1\ \mathrm{s}^{-1}$-ként. Ez egyenlő:

$$R = \frac{\Delta N_\mathrm{int}}{\Delta t}, \tag{36.2}$$

ahol ΔN_int a vízzel rekacióba lépő neutrínók száma a Δt időintervallumban.

Mivel a neutrínók nagyon ritkán lépnek kölcsönhatásba, feltételezhetjük, hogy a fluxus, Φ, állandó az egész detektor térfogatában. Elképzelhetjük úgy, hogy egy hatalmas mennyiségű vízen keresztül haladnak a neutrínók állandó Φ fluxussal, de ahelyett, hogy egy reakció után a neutrínó eltűnne (ami csökkentené a fluxust), feltételezzük, hogy folytatja az útját. Így minden neutrínó zavartalanul áthalad a detektoron, és átlagosan minden alkalommal kölcsönhatásba lép, amikor egy ℓ távolságot megtesz.

Most képzeljük el, hogy egyszerre, egy adott, S területű felületen keresztül, a ΔN neutrínó áthalad egy bizonyos Δt idő alatt – ez azt jelenti, hogy átlagosan minden neutrínó pontosan egyszer lép kölcsönhatásba egy $S\ell$ térfogatban. Most kifejezhetjük a $\frac{R}{V}$ mennyiséget, amely az egységnyi térfogatra és időre jutó kölcsönhatások számát jelenti, nevezetesen:

$$\frac{R}{V} = \frac{\Delta N}{S\ell\,\Delta t} = \frac{\Phi}{\ell}. \tag{36.3}$$

Ahonnét egyből kifejezhetjük, hogy:

$$\ell = \frac{\Phi V}{R}, \tag{36.4}$$

ahonnét $\ell = 10^{18}$ m $\doteq$ 106 ly érték adódik.

37 Kezdjük Yusuf lövésével. Mivel nagyon gyorsan nyomta össze a dugattyút, feltételezhetjük, hogy a gáz és a környezet közötti hőcsere elhanyagolható volt. Ezért a folyamatot adiabatikusnak tekinthetjük. Jelölje a levegő nyomását p_{Y}, a levegő összenyomás utáni térfogatát pedig $V_0 = \frac{V}{16}$. Az adiabatikus gáztörvényből:

$$p_{\mathrm{Y}} V_0^{\kappa} = p V^{\kappa}, \tag{37.1}$$

ahol $p = 101\,325$ Pa a légköri nyomás. Ebből levezethetjük, hogy

$$p_{\mathrm{Y}} = p\frac{V^{\kappa}}{V_0^{\kappa}} = 16^{\kappa} p. \tag{37.2}$$

A lövés után a gáz adiabatikusan tágul vissza az eredeti V térfogatra. Kiszámíthatjuk a gáz által végzett munkát az adiabatikus folyamat során, majd felírhatjuk rá a dugattyú és a lövedék kinetikus energiája közötti kapcsolatot:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_{\mathrm{Y}}^2 = \frac{p_{\mathrm{Y}} V_0 - pV}{\kappa - 1}, \tag{37.3}$$

ahol v_{Y} Yusuf lövedékének sebessége. Behelyettesítve: p_{Y}-t a 37.2 egyenletből és V_0-t felhasználva megkapjuk, hogy:

$$v_{\mathrm{Y}} = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa - 1}\left(16^{\kappa-1} - 1\right)} \approx 185{,}2 \text{ m/s}. \tag{37.4}$$

Most nézzük meg Kim lövését. Ő is adiabatikusan nyomta össze a dugattyút, de ezt követően hagyta lehűlni azt a környezeti hőmérsékletre állandó térfogaton. Mivel azonban minket nem ez a folyamat érdekel, csak annak végállapota, ezt izoterm összenyomásként kezelhetjük. Így az összenyomás utáni nyomás, p_{K}, a következőképp számítható:

$$p_{\mathrm{K}} V_0 = pV \quad \Rightarrow \quad p_{\mathrm{K}} = p\frac{V}{V_0} = 16p. \tag{37.5}$$

Itt tisztában kell lennünk azzal, hogy a lövés során a folyamat ismét nagyon gyors, így adiabatikus. A dugattyúban a légköri nyomás elérése előtt nem éri el a teljes V térfogatot. A lövedék csak addig gyorsul, amíg el nem éri a V_1 részleges térfogatot, ahol a nyomások egyenlőek lesznek (tehát a nyomás megegyezik a p légköri nyomással). A dugattyú ezt követően lassulni kezd, míg a lövedék tovább halad. Az adiabatikus törvényből levezethetjük:

$$p_K V_0^\kappa = p V_1^\kappa, \tag{37.6}$$

és behelyettesítve az 37.5 egyenletből azt kapjuk, hogy:

$$V_1 = \left(\frac{p_K}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} V_0 = 16^{\frac{1}{\kappa}-1} V. \tag{37.7}$$

Most ismét kiszámoljuk a gáz által végzett munkát, ahogy adiabatikusan tágul V_0-tól V_1-ig, és felírjuk rá a dugattyú és a lövedék kinetikus energiája közti összefüggést:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_K^2 = \frac{p_K V_0 - p V_1}{\kappa - 1}. \tag{37.8}$$

A $p_K V_0 = pV$ és V_1 behelyettesítésével a 37.7 egyenletből azt kapjuk, hogy:

$$v_K = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1 - 16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}, \tag{37.9}$$

amiből behelyettítés után 96,1 m/s értéket kapjuk.

Yusuf és Kim sebességeinek hányadosa így a következő:

$$\frac{v_Y}{v_K} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(16^{\kappa-1}-1\right)}}{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}} = \sqrt{\frac{16^{\kappa-1}-1}{1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}}},$$

ami $\kappa = 1{,}4$ behelyettesítése után $\frac{v_Y}{v_K} \doteq 1{,}93$-at ad.

38 Kezdjük geometriai megközelítésből. Ha egy egyenlő oldalú háromszög oldalhossza a, akkor a beírt kör sugara $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, és a háromszög magassága $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

A medál egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszögből, egy r sugarú körből és egy v hosszúságú szakaszból áll. A feladat szerint tudjuk, hogy a forgástengely az egész szakaszon áthalad, így a tehetetlenségi nyomatéka $I_| = 0\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

A kör tehetetlenségi nyomatékának meghatározása nagyobb kihívás. Tudjuk, hogy egy test tehetetlenségi nyomatéka kis részekre bontva számítható ki, és az egyes tagok összege adja a teljes tehetetlenségi nyomatékot, így $I = \sum_i m_i \rho_i^2$, ahol m_i az i-edik darab tömege, ρ_i pedig ennek a darabnak a forgástengelytől mért merőleges távolsága.

Ha a forgástengely a kör középpontján halad át, és merőleges a kör síkjára, akkor a tehetetlenségi nyomatéka a következő:

$$I_{\odot} = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = mr^2. \tag{38.1}$$

A forgatónyomatékok közötti kapcsolat egy kör esetén, amely két olyan tengely körül forog, amelyek áthaladnak a kör középpontján: az egyik tengely merőleges a kör síkjára, a másik tengely pedig a kör síkjában fekszik. Mindazonáltal a forgástengely a kör síkjában helyezkedik el.

$$I_{\varnothing} = \sum_i m_i x_i^2. \tag{38.2}$$

Itt a koordinátákat tetszőlegesen nevezhetjük el. Tehát: $2I_{\varnothing} = I_{\odot}$,

$$I_{\varnothing} = \frac{1}{2}mr^2. \tag{38.3}$$

A kör tömege $m = \lambda 2\pi r$. Tehát:

$$I_{\varnothing} = \lambda\pi r^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{72}\lambda a^3. \tag{38.4}$$

Keressük a háromszög tehetetlenségi nyomatékát. A középpontja körüli forgástengelyre merőleges rúd tehetetlenségi nyomatéka a $I_{-} = \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{12}\lambda a^3$.

Amikor észrevesszük, hogy egy pontsúly forgatónyomatéka csak a forgástengelytől való merőleges távolságtól függ, egy ferde rúd esetében ki kell számítanunk a rúd tömegét azon a távolságon. Itt ez nagyon egyszerű: a tömeg homogén módon oszlik el a hosszuk mentén, így az üres háromszög forgatónyomatéka megegyezik az egyes rudakéval, de háromszor akkora tömeggel. Tehát $I_{\triangle} = 3I_{-} = \frac{1}{4}\lambda a^3$. Végül egyszerűen összeadjuk az egyes tagokat, hogy megkapjuk az eredményt:

$$I = I_{|} + I_{\varnothing} + I_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3. \tag{38.5}$$

39 Először is, tisztában kell lennünk azzal, mit is fogunk kiszámolni. A hangintenzitás a hanghullám által egységnyi idő alatt egységnyi felületen hordozott energiát méri.

Hogy precízebbek legyünk, ezt az I hangintenzitás fejezi ki. A hangosságszint L pedig csak a hangintenzitás egy referencia I_0 intenzitással vett hányadosának a logaritmusa, amit belben vagy decibelben mérünk:

$$L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{B}] = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{dB}] \tag{39.1}$$

Ha egy hangforrás P hangteljesítménnyel bocsát ki egy hangot, a hangintenzitása a forrástól r távolságban $I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$, a hangerő pedig

$$L(r) = 10\log\left(\frac{P}{4\pi I_0 r^2}\right) = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.2}$$

Most már elkezdhetünk számolni. A feladat szerint a hangosság minden évben megegyezik a nagymama életkorával. Ha ő most éppen az L-edik születésnapját ünnepli, akkor két éve az életkora

$$L - 2 = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.3}$$

Tavaly a szomszéd is jött segíteni. Ha ő Π hangteljesítménnyel tud énekelni, a Nagyi

$$L - 1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r) \tag{39.4}$$

éves kellett, hogy legyen.

Idén pedig a nagymama karosszékét d-vel közelebb húztuk az éneklő rokonsághoz, tehát az életkora most

$$L = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r - d) \tag{39.5}$$

volt.

Az 39.3 egyenletet a 39.4-ből kivonva megkapjuk, hogy

$$1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(P) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1}, \tag{39.6}$$

és az 39.4-et a 39.5-ból kivonva pedig

$$1 = 20\log(r) - 20\log(r - d) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1} \tag{39.7}$$

adódik.

Ezt az 39.3 egyenletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$L = 2 + 10\log\left(\frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1}\right) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1}\right). \tag{39.8}$$

Hogy meghatározzuk Justine nagymama korát, ki kell fejeznünk a szomszéd hangteljesítményét a hangosságának függvényében. Ha ρ távolságban a hangereje Λ, akkor felírhatjuk, hogy

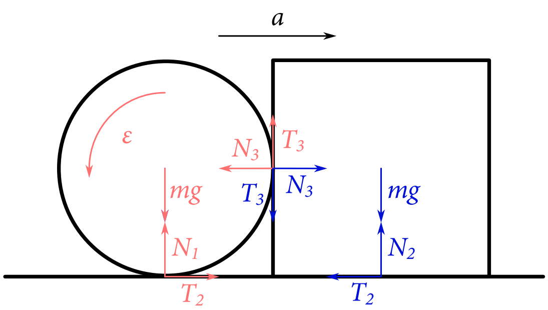
$$\Lambda = 10\log(\Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(\rho). \tag{39.9}$$

Miután behelyettesítettünk az 39.8 összefüggésbe, azt kapjuk, hogy

$$L = 2 + \Lambda - 10\log\left(\sqrt[10]{10} - 1\right) + 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10} - 1}{\sqrt[20]{10}} \cdot \frac{\rho}{d}\right), \tag{39.10}$$

ami azt jelenti, hogy a megadott adatok szerint a nagyi idén a 99. születésnapját ünnepli. Szép szám, Nagyi, gratulálunk!

40 Elsőként rajzoljuk be a kockára és a hengerre ható erőket.



Ábra 40.1: *A kockára és a hengerre ható erők vázlata*

Miután azonosítottuk az erőket, felírhatjuk a mozgásegyenleteket. Összesen öt darab lesz, kettő a testek függőleges irányú mozgására;

$$\begin{aligned} N_1 + f_3 N_3 &= mg, \\ N_2 - f_3 N_3 &= mg, \end{aligned} \tag{40.1}$$

kettő a testek vízszintes irányú mozgására;

$$\begin{aligned} ma - f_1 N_1 + N_3 &= 0, \\ ma + f_2 N_2 - N_3 &= 0, \end{aligned} \tag{40.2}$$

és egy a henger forgására;

$$I\varepsilon - f_1 N_1 R - f_3 N_3 R = 0, \tag{40.3}$$

ahol a a haladási gyorsulása a hengernek és a kockának. Ezeknek meg kell egyezniük, különben a henger nem tolná a kockát, és a harcnak vége lenne. $I = \frac{1}{2} m R^2$ a henger tehetetlenségi nyomatéka, illetve ε a szöggyorsulása.

Megoldva ezt a hatalmas egyenletrendszert, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(1-4f^2)}{2+f^2} g, \\ \varepsilon &= \frac{4f + 3f^2 - 4f^3}{2+f^2} \frac{2g}{R}. \end{aligned} \tag{40.4}$$

Mikor lesz a kockának a legnagyobb sebessége? Az egyetlen erő, ami az egész rendszert gyorsítja, a henger csúszása. Amikor a henger befejezi a csúszást, a rendszer elkezd lelassulni a kocka és a földfelszín közti súrlódás miatt. A henger az indulástól számított τ időpillanatban fejezi be a csúszást, amire

$$a\tau - \Omega R + \varepsilon R \tau = 0, \tag{40.5}$$

ami az a pillanat, amikor egy pont kerületi sebessége a henger felszínén megegyezik a haladási sebességével.

Innen már kifejezhetjük a maximális sebességet, amire Dani felgyorsul, a következőképpen:

$$v = a\tau = a \frac{\Omega R}{\varepsilon R + a} = \Omega R \frac{1 - 4f^3}{9 + 6f - 12f^2} \doteq 0{,}99 \text{ m/s}, \tag{40.6}$$

ami hozzávetőleg egy méter másodpercenként.

Válaszok

1 2 Wh

2 6

3 1,3 °C

4 25 920 km/h^2

5 72 l

6 3700 km

7 Tamás, 0,505 s-mal.

8 8

9 13 mm

10 −8,4 °C

11 $\frac{3}{4}$

12 $\arcsin \frac{2s}{gt^2}$

13 $\frac{3}{2}$ A

14 $\frac{400\pi}{3}$ m ≐ 419 m

15 2 s

16 $\frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3} a \doteq 0{,}555a$

17 $L\sqrt{8\frac{M-m}{M+m}}$

18 60

19 $1{,}624 \cdot 10^{22}$ kg, *elfogadható az intervallumon belül* $1{,}62 \cdot 10^{22}$ kg – $1{,}66 \cdot 10^{22}$ kg.

20 180

21 $\sqrt{2}\ \mathrm{s} \doteq 1{,}41\ \mathrm{s}$

22 1171 €, *elfogadható az intervallumon belül* 1150 € – 1180 €.

23 $9\ \Omega$

24 $\frac{1}{2} - \frac{\arcsin\frac{2}{3}}{\pi} \doteq 26{,}8\ \%$

25 99,2 km, *elfogadható az intervallumon belül* 99 km – 99,3 km.

26 $2\,g$

27 0 A

28 $V_{\mathrm{min}} = \frac{1}{148}\ \mathrm{l}$, $V_{\mathrm{max}} = 1\ \mathrm{l}$

29 3,6 cm

30 $\frac{mg}{3k}$

31 $\frac{a\lambda}{6}\frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{\pi + 3\sqrt{3}} \doteq 0{,}563a\lambda$

32 $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ \mathrm{a} \doteq 101\ \mathrm{d} \doteq 8{,}7 \cdot 10^{6}\ \mathrm{s}$

33 0,094 ml/s

34 $\dfrac{3Rg}{H}$

35 1975 s ≐ 33 min

36 10^{18} m ≐ 106 ly

37 1,93

38 $\dfrac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3$

39 99

40 0,99 m/s

A feladatok szerzői

Martin ‚Kvík' Baláž
Jozef Csipes
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Jakub ‚Andrej' Kliment
Katarína Nedeľková
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös

A képek alkotói

Katarína Nedeľková

Szerkesztők

Martin ‚Kvík' Baláž