Droga Czytelniczko, Drogi Czytelniku,

Właśnie trzymasz w rękach książeczkę z zadaniami 27th konkursu Náboj Physics. Zawiera ona wszystkie zadania z fizyki, które pojawiły się w tegorocznej edycji konkursu, a także ich rozwiązania, z których można się sporo nauczyć. Jeżeli masz jakikolwiek problem z ich zrozumieniem, skontaktuj się z nami; chętnie je wyjaśnimy.

Nie byłoby tego zbioru, gdyby nie ogronma praca wielu osób zaangażowanych w organizację Náboj Physics. Wielu z nich to studenci Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Komeńskiego (Comenius University) w Bratysławie, a niektórzy z nich aktywnie uczestniczyli w organizacji korespondencyjnych seminariów z fizyki (FKS).

Náboj Physics kontynuuje swoją międzynarodową tradycję również w roku 2024. Chcielibysmy podziękować za całą międzynarodową współpracę organizatorom lokalnym: Katarína Nedeľková (Bratysława), Marián Kireš (Koszyce), Jakub Kliment (Praga), Lenka Plachtová (Ostrawa), Ágnes Kis-Tóth (Budapeszt), Urszula Goławska (Gdańsk), Andrzej Karbowski (Toruń), Mirela Kaczmarek (Wrocław), José Francisco Romero García (Madrid) and Dmytro Rzhemovskyi (Wiedeń).Wyniki tego międzynarodowego starcia możecie znaleźć na naszej stronie.

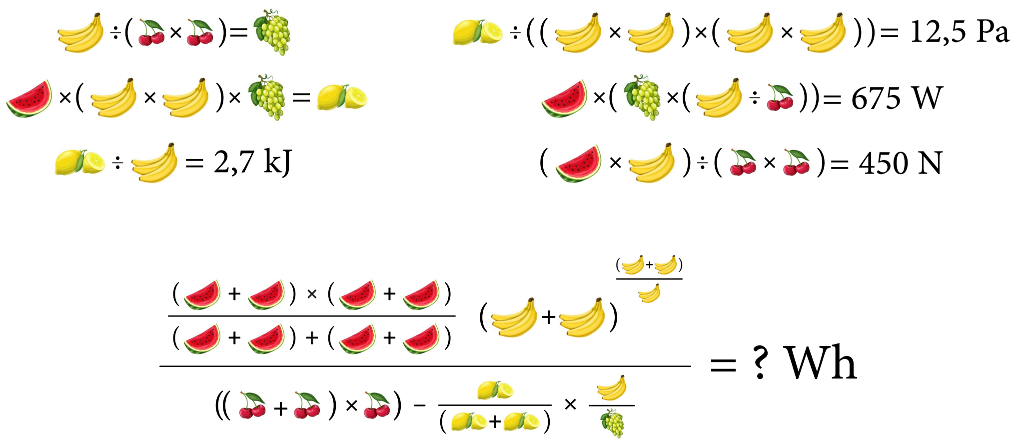
W imieniu całego zespołu organizatorów mamy nadzieję, że dobrze się bawiliście podczas rozgrywki Náboj Physics w 2024, i że zobaczymy się z Wami na Náboju w przyszłym roku. Zarówno z uczestnikami, jak i organizatorami.

Jaroslav Valovčan
Chief organiser

Wyniki, treści archiwalne i inne informacje znajdziecie na stronie `https://physics.naboj.org/`.

Problemy

1 95 % ludzi nie potrafi rozwiązać tego problemu! A ty potrafisz?



2 Tomek oglądał wyścig samochodowy. Tym razem wyścig amerykański, co oznacza skręcanie w lewo przez trzy godziny. A ponieważ nigdy nie zaoszczędził wystarczająco dużo pieniędzy, aby pojechać do Ameryki i zobaczyć to na żywo, zadzwonił do Tymona i Janka i poprosił ich, aby ścigali się dla niego na lokalnym rondzie.

Chłopcy przyjechali swoimi gruchotami, zatrzymali się obok siebie i wtedy Tomek rozpoczął wyścig. Obaj jechali z zawrotną prędkością 18 km/h. Tymon pozostał na wewnętrznym pasie okręgu o obwodzie 100 m, podczas gdy Janek jechał na zewnętrznym pasie, którego obwód wynosił 120 m. Ile razy Tymon okrąży rondo, zanim po raz pierwszy wyprzedzi Janka?

Zignoruj czas potrzebny chłopcom na osiągnięcie tej zawrotnej prędkości.

3 Marcin często obserwuje deszcze meteorów. Jego przygotowania do całonocnych obserwacji obejmują między innymi parzenie kawy w termosie próżniowym (siedem łyżeczek kawy rozpuszczalnej i dziewięć łyżeczek cukru, zmieszanych, nie wstrząśniętych). Wewnętrzny pojemnik termosu jest cylindrem o wysokości 18 cm i promieniu podstawy 4 cm. Ścianki wewnętrznego pojemnika mają 0,5 mm grubości i są wykonane z aluminium o gęstości 2,7 g/cm^3 i cieple właściwym 0,9 J/(g · K). Martin całkowicie napełnił wewnętrzny pojemnik kawą w temperaturze 95 °C.

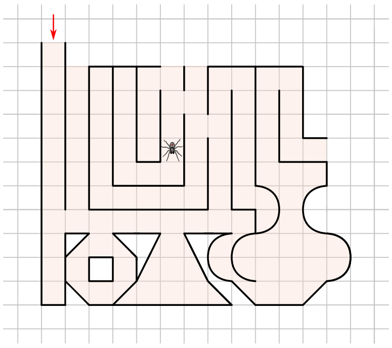
O ile kawa ostygnie, do czasu osiągnięcia równowagi z wewnętrznym pojemnikiem? Wewnętrzny pojemnik jest oddzielony od zewnętrznego próżnią, więc można założyć, że jest idealnie izolowany termicznie. Ciepło właściwe kawy jest równe ciepłu właściwemu wody. Początkowa temperatura termosu wynosiła 20 °C.

4 Matt w końcu wszedł na pokład samolotu. Teraz właśnie będzie startować. Jako doświadczony podróżnik jest całkowicie obojętny na opóźnienia, wrzeszczące dzieci i obrzydliwe suche kanapki, ale jako fizyka nadal interesują go dane lotu. Wyciąga więc telefon, który pokazuje mu, że samolot porusza sie z przyspieszeniem 2 m/s^2. Jednak prędkość samolotu wyraża się zwykle w km/h.

Jakie jest przyspieszenie samolotu w jednostkach km/h^2?

5 Justyna i Marcin otrzymali w prezencie ślubnym figurkę – labirynt wykonany przez mistrzów szkła weneckiego. Wkrótce jednak do wnętrza figurki dostał się pająk. Ponieważ nie wyglądało to zbyt estetycznie, właściciele postanowili go stamtąd wypłukać.

Ile wody powinni wlać do przewodu z lewej strony, aby kwadratowy obszar z pająkiem został całkowicie zalany? Przyjmij, że jeden kwadrat odpowiada objętości 1 l a wymiary są na tyle małe, że efekt kompresji powietrza można uznać za **zaniedbywalny**.



6 George zmierzył na globusie, że odległość z Rio do Hongkongu wynosi 17 700 km a odległość z Rio do Tokio wynosi 18 600 km. Jaka jest maksymalna możliwa odległość między Tokio a Hongkongiem?

Ziemia jest kulą o obwodzie 40 000 km. *Nie zakładaj niczego na temat rzeczywistej lokalizacji wspomnianych miejsc.*

7 Dwóch doświadczonych kierowców Trackmanii, Tomek i Mateusz, ściga się na prostym torze o długości 300 m. Samochód Tomka zaczyna przyspieszać od razu po starcie ze stałym przyspieszeniem $8\ m/s^2$. Samochód Mateusza ma problemy z zapłonem i odpala dopiero po sekundzie, ale z przyspieszeniem $9\ m/s^2$.

Kto pierwszy przekroczy linię mety i o ile sekund wygra?

8 Podaj sumę liczb z wszystkich zdań prawdziwych.

1	Gdy woda przepływa przez przewężenie, prędkosc przepływu maleje.
2	Na powierzchnię cieczy działa siła. Ciśnienie bedzie jednakowe w każdym punkcie cieczy.
4	Jeżeli przedmiot unosi się na powierzchni wody oznacza to, że jego gęstość jest mniejsza od gęstości wody.
8	Wąski szklany cylinder wypelniony jest do połowy rtęcią. Jeśli pochylimy go o kąt 45°, ciśnienie wywierane na dno cylindra zmaleje.
16	Kostka lodu unosi się na powierzchni wody w szklance w temperaturze pokojowej. Poziom wody będzie się podnosił, aż do całkowitego stopnienia lodu.
32	Woda nie paruje w temperaturze dużo niższej temperatury wrzenia.
64	Dwa ciała unoszą się na powierzchni cieczy. Ciałem o mniejszej gęstości jest to, którego większa objętość wystaje z wody.

Wszystkie wymienione substancje znajdują się w standardowych warunkach pokojowych (jednorodne pole grawitacyjne, ciśnienie atmosferyczne, temperatura pokojowa, itd.)

9 Okna naszego lokalnego basenu są zasłonięte grubymi zasłonami. W jednej z nich znajduje się mały otwór, przez który pojedyncza wiązka światła słonecznego pada na powierzchnię wody w basenie pod kątem 45°. Ponieważ światło słoneczne składa się z kolorowych składowych, na dnie basenu pojawia się tęczowy pas. Jaka jest długość tego pasa, jeśli współczynnik załamania światła wody dla światła widzialnego mieści się w zakresie 1,33 – 1,34, a basen ma głębokość 2 m?

Załóżmy, że współczynnik załamania powietrza wynosi 1.

10 Podczas długich, beztroskich letnich dni Marc zapomniał nalać płynu zimowego przeciw zamarzaniu do zbiornika na płyn do spryskiwaczy, pozostawiając tam niezużytą wodę. Teraz stoi jak zamrożony przed swoim samochodem, przeklinając i gestykulując wściekle, i powoli odkrywa, że w dwulitrowym zbiorniku jest 1 kg czystego lodu.

Wypełnia go na górze płynem zimowym, który zamarza w temperaturze −20 °C. Jaka jest najniższa temperatura, w której powstała mieszanina będzie płynem, jeśli gęstość płynu przeciw zamarzaniu wynosi 800 kg/m^3 a temperatura krzepnięcia jest prostą średnią ważoną opartą na masie składników?

11 Na lokalnym targu Adam kupił pączka i ogromne jabłko. Natychmiast zjadł pączka i zachował jabłko na spacer do domu. Gdy przechodził przez mały most, zobaczył swoje odbicie w wodzie. To go tak bardzo zaniepokoiło, że upuścił jabłko prosto do stawu. Okazało się, że gęstość jabłka stanowi dwie trzecie gęstości wody.

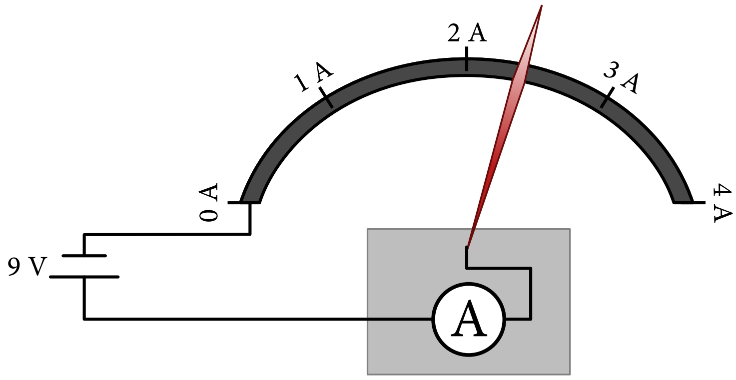
Ponieważ ręce Adama są nadal tłuste od pączka i nie chce on spowodować katastrofy ekologicznej, uklęknął i zaczął gryźć jabłko tuż nad poziomem wody. Jednak nagły plusk przyciągnął również głodną rybę, która zaczęła zjadać jabłko również pod powierzchnią wody.

Którą część jabłka zje Adam na końcu? Biorąc pod uwagę ogromną przewagę zębów po stronie Adama, je on trzy razy szybciej niż ryba.

12 Jerzy pędzi w dół wzgórza na rowerze. Przy jego obecnej prędkości i na płaskim terenie potrzebowałby dystansu s i czasu t aby się zatrzymać. Jakie jest minimalne nachylenie wzgórza względem płaszczyzny poziomej, które całkowicie uniemożliwiałoby Jerzemu zatrzymanie się?

Jerzy wie, jak prawidłowo hamować, dzięki czemu jego koła nigdy nie wpadają w poślizg.

13 Pewnego razu Kubie potrzebny był multimetr. Przeszukał cały dom, ale jedyne co znalazł to jakiś dziwny amperomierz. Jego wskazówka poruszała się wzdłuż metalowej listwy opisanej 4 Ω na jednostkę, tak jak pokazano na rysunku. Kuba połączył ten cud współczesnej elektrotechniki z akumulatorem o napięciu 9 V. Jaki prąd wskazał amperomierz?



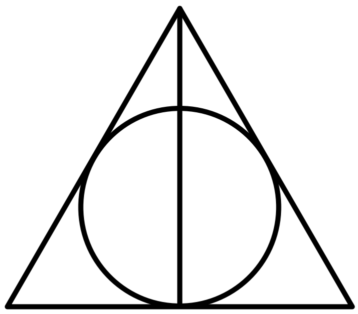
14 Patryk odkrył dziwną czarną płytę w szafce swojego dziadka. Zanim zdążył zaserwować na niej sojowego burgera lub użyć jej jako frisbee, dziadek pokazał mu, że jeśli umieści ją na gramofonie, ustawi igłę w spiralnym rowku na zewnętrznej krawędzi płyty i w końcu naciśnie kilka przycisków, z głośników zaczną wydobywać się złowieszcze trzaski i syczenie, wraz z prehistoryczną muzyką.

Syczenie i trzaski trwały dokładnie 20 minut. Jaka jest długość rowka, jeśli zewnętrzna średnica dysku wynosi 30 cm, a rowek kończy się 5 cm od jego środka? Tajemniczy krążek obracał się na gramofonie z prędkością 33⅓ obrotów na minutę.

15 Skoczek skacze do basenu z trampoliny, która znajduje się 10 m nad poziomem wody. Odbija się od trampoliny, wykonuje salto i ląduje w wodzie. Ile czasu skoczek spędza w powietrzu, jeśli dokładnie połowę czasu skoku spędził nad poziomem trampoliny?

16 Sara jest wielką fanką Harry'ego Pottera. Wyjęła ze szkatułki wisiorek Insygniów Śmierci i zaczęła go podziwiać: Peleryna-niewidka, Kamień Wskrzeszenia, Czarna Różdżka. A ponieważ jest również dociekliwym fizykiem, zastanawiała się, gdzie znajduje się środek masy tego wisiorka.

Wisiorek składa się z trójkąta równobocznego o boku długości a, okręgu wpisanego w trójkąt oraz jednej z jego wysokości. Wszystkie te elementy mają taką samą gęstość liniową. Jak daleko znajduje się środek masy wisiorka od górnego wierzchołka trójkąta?



17 Andrzej zbudował prymitywną katapultę. Składa się ona z deski o zaniedbywalnej masie, o długości $2L$ z przegubem umieszczonym w jej środku, przymocowanym do prymitywnej ramy na wysokości L nad ziemią. Do jednego końca przykleił ciężką kamienną przeciwwagę o masie M, a na drugim końcu, w płytkiej wnęce, umieścił maleńki pocisk o masie $m < M$.

Pocisk spoczywa tam, dopóki Andrzej nie zwolni zatrzasku i nie wystrzeli z katapulty. Ciężki kamień opada, a pocisk opuszcza wnękę dokładnie w momencie, gdy deska jest w pionie.

Jak daleko od przeciwwagi pocisk uderzy w ziemię?

18 Autostrada z Bratysławy do Pragi ma dokładnie 400 kilometrów długości i cztery pasy ruchu w każdym kierunku. Na tych pasach samochody poruszają się z prędkościami 80 km/h, 100 km/h, 120 km/h i 160 km/h. Piotr, Paweł i Artur wyjechali z Bratysławy w tym samym czasie, ale każdy z nich pojechał innym pasem, ponieważ każdy samochód mógł jechać z inną prędkością. Kiedy dotarli do Pragi, chwalili się swoimi doświadczeniami:

Piotr: „Jechałem najszybszym pasem i wyprzedziłem po drodze 620 samochodów, a spośród nich 200 było na drugim najszybszym pasie!".

Paweł: „Jechałem z prędkością 120 kilometrów na godzinę i wyprzedziłem łącznie 220 samochodów!".

Artur jechał z prędkością 100 km/h, ale nie pamięta, ile samochodów wyprzedził. Oblicz to za niego!

Załóżmy, że samochody wyjeżdżają z Bratysławy równomiernie każdym pasem i wszystkie przejeżdżają cały dystans.

19 Mateusz lubi jeździć konno ze swoimi przyjaciółmi fizykami. Dziś zdali sobie sprawę, że jeśli

- jedna *długość konia* to osiem stóp;
- jeden *koń mechaniczny* to moc potrzebna do podniesienia masy 75 kg z prędkością 1 m/s;
- a jedna *końska dawka* to 1,7 kg paszy na 100 kg masy konia dziennie;

to możliwe jest skonstruowanie systemu miar, w którym można wyrazić dowolną wielkość mechaniczną. Na przykład, *przyspieszenie konia* to *długość konia* pomnożona przez kwadrat *racji żywnościowej konia*.

Ile kilogramów ma jedna *waga konia*, czyli duża jednostka masy otrzymana z tych trzech jednostek?

20 Kasia i Tomek jadą ruchomymi schodami. Schody mają długość 120 stopni i poruszają się z prędkością dwóch stopni na sekundę. Oboje wchodzą na najniższy stopień. Kasia, jako odpowiedzialna osoba dorosła, stoi tam spokojnie, podczas gdy Tomek zaczyna gorączkowo biegać tam i z powrotem między nią a szczytem ruchomych schodów, z prędkością dwóch stopni na sekundę w górę i sześciu stopni na sekundę w dół.

Ile kroków w sumie pokona Tomek do czasu, gdy Kasia złapie go na szczycie ruchomych schodów i go zgani?

21 Marcel i Sabina lecą w przeciwnych kierunkach dwoma naddźwiękowymi samolotami odrzutowymi, każdy z prędkością Mach 3, wzdłuż dwóch równoległych prostych oddalonych od siebie o 1 km. Ile czasu upłynie między momentem, w którym będą najbliżej, a chwilą, w której Sabina usłyszy dźwięk samolotu Marcela?

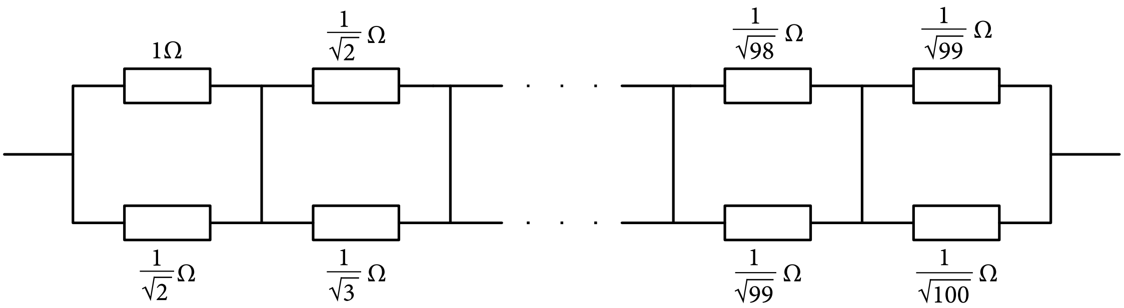
Prędkość dźwięku wynosi 1 Mach = 1 km *w* 3 s.

22 Marcel i Sabina wybierają się w podróż poślubną balonem na ogrzane powietrze. Jednak ich budżet jest dość napięty i nawet jeśli Marcelowi udałoby się pożyczyć balon za darmo, musi go przecież czymś napełnić. Hel jest drogi, więc będą musieli zadowolić się wodorem otrzymywanym w procesie elektrolizy.

Ile będzie kosztowało napełnienie balonu, jeśli pusty balon z nowożeńcami ma masę 1000 kg, cena energii elektrycznej dla młodych par wynosi 0,20 €/kWh, a całkowita wydajność procesu wynosi 50 %? Spalanie wodoru z tlenem wytwarza 285,8 kJ/mol energii.

Podróż odbędzie się w warunkach normalnych (temperaturze i ciśnieniu). Ciśnienie wewnątrz balonu jest równe ciśnieniu zewnętrznemu.

23 Sam znalazł ogromne pudełko z różnymi opornikami i długą cewkę idealnie przewodzącego drutu i zbudował z nich długą drabinę. Pomiędzy każdą parą szczebli, jest opornik o rezystancji $\frac{1}{\sqrt{n}}$ Ω po jednej stronie i opornik o rezystancji $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ Ω po drugiej stronie, dla n w zakresie od 1 do 99.



Jaki jest całkowity opór między końcami drabiny?

24 Wysokość poziomu morza pod wpływem przypływu we francuskim mieście Saint-Malo w okresie pełni księżyca można modelować jako $A \cdot \sin(\omega t)$, gdzie A to amplituda a ω to częstość, przy której przypływ występuje co 12 godzin.

Marynarze statku Santiano chcieliby wiedzieć, czy uda im się zadokować gdy dopłyną do portu. Problem w tym, że ich statek może zakotwiczyć przy nabrzeżu tylko wtedy, kiedy woda opadnie nie więcej niż o $A/3$ poniżej maksymalnego poziomu… a marynarze nie wiedzą, o której godzinie następuje przypływ.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda im się zakotwiczyć na molo, czyli dotrzeć w czasie, kiedy będą mogli zakotwiczyć przy nabrzeżu?

25 Max i Moritz mierzą odległości między miejscami na Ziemi na różne sposoby: Max, pilot, podaje odległość jako długość najkrótszej krzywej wzdłuż powierzchni planety; podczas gdy Moritz, złodziej bankowy, podaje odległość jako linię prostą, nawet jeśli przechodzi ona pod powierzchnią.

Kiedy zmierzyli odległość między lotniskiem a bankiem, odkryli, że różnica w zmierzonych długościach wynosiła dokładnie 1 m. Jaką odległość zmierzył Max?

Ziemia jest kulą o promieniu 6371 km.

26 Bob huśta się na huśtawce zawieszonej na łańcuchach o długości L. W skrajnym położeniu, gdy zatrzymuje się na chwilę, odczuwa przeciążenia równego 0,5 g.

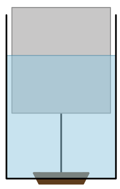
Jakiego przeciążenia doznaje Bob w najniższym położeniu?

27 Kasia dostała nowy metalowy naszyjnik: ma on kształt okrągłej pętli o promieniu r i oporze liniowym λ. Podczas wakacji wybrała się na przejażdżkę na karuzeli na lokalnym placu zabaw. Usiadła w odległości R od osi obrotu i zaczęła obracać się wokół niej z prędkością kątową ω. W tym momencie zauważyła, że jakieś łobuzy umieściły pod karuzelą ogromny magnes, tworząc jednorodne pole magnetyczne o indukcji B, skierowane równolegle do osi obrotu.

Kasia zaczęła się martwić o swój naszyjnik: jaki prąd jest w nim indukowany? Załóżmy, że jest ona sztywna ze strachu i pozostaje w jednym miejscu. Siedzi w takiej pozycji, że naszyjnik tworzy kąt 30° z płaszczyzną poziomą.

28 Lucyna wymyśliła pomysłowe urządzenie do prawidłowego dozowania wody do swoich roślin. Dozownik składa się z wystarczająco wysokiego cylindrycznego pojemnika o powierzchni podstawy S, który ma okrągły otwór w środku dna rozciągający się do połowy jego promienia, przykryty bezmasowym korkiem. Wewnątrz pojemnika znajduje się mniejszy cylinder o gęstości 500 kg/m^3, powierzchni podstawy $0{,}99S$ i wysokości H, który jest przymocowany do korka na dole za pomocą sznurka. Po napełnieniu naczynia pewną krytyczną ilością wody, wewnętrzny cylinder podnosi korek z dna, uniemożliwiając dalsze dodawanie wody do pojemnika.

Jaka jest najmniejsza i największa objętość wody, którą Lucyna może dozować za pomocą tego urządzenia pomiarowego, jeśli może ustawić dowolną długość sznurka? Objętość wewnętrznego cylindra wynosi 1 l.



29 W biurze Dana panuje straszny bałagan. Niemniej czymś, co od samego wejścia rzuca sie w oczy jest jego ulubiona zabawka: para wahadeł.

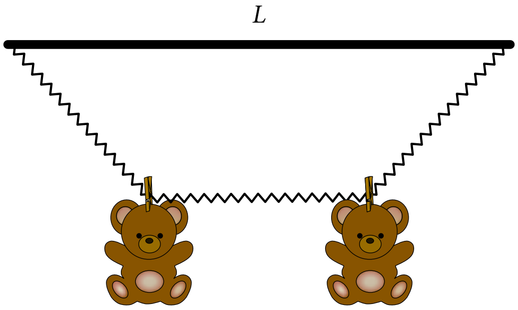
Gdy są one jednocześnie przesunięte ze swojej pozycji równowagi, ich ruch ma następujące cechy:

- dokładnie przy co trzecim przejściu wolniejszego wahadła przez skrajne położenie po prawej stronie, spotyka się ono tam z szybszym,
- dokładnie przy co piątym przejściu szybszego wahadła przez skrajne położenie po lewej stronie, spotyka ono tam z wolniejszym.

Długość sznurka dłuższego wahadła wynosi 10 cm. Jaka jest długość sznurka krótszego wahadła?

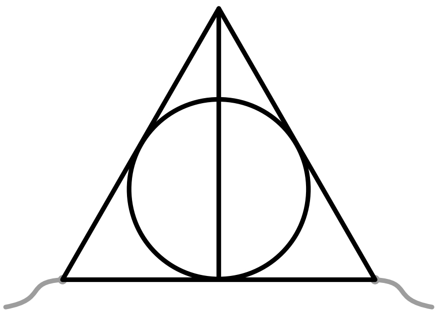
30 Penny musi wysuszyć dwa świeżo wyprane pluszaki, każdy o masie m. Niestety, podczas pierwszej próby powieszenia ich na sznurku do bielizny, sznurek pękł. Ale Penny musiała wymyślić coś bardziej sprytnego – rozciągnęła sprężynę o zerowej długości spoczynkowej i sztywności k nad pustą, poziomą ramą suszarki o szerokości L. Następnie powiesiła pluszaki na jednej trzeciej i dwóch trzecich długości sprężyny, która ugięła się pod ich ciężarem.

O ile niżej będzie środek sprężyny w stosunku do jej końców?



31 Sara jeszcze raz wyciąga swój ulubiony wisiorek Insygniów Śmierci. Tym razem interesuje ją jego opór elektryczny. Wisiorek Sary składa się z trójkąta równobocznego o boku długości a, okręgu wpisanego w trójkąt oraz jednej z jego wysokości. Opór liniowy wszystkich jego elementów wynosi λ.

Jaki jest opór między dwoma wierzchołkami trójkąta, których nie dotyka różdżka (wysokość trójkąta)?



32 Czarny Pan™ spędził trochę czasu w pustej przestrzeni, a teraz powraca do świata śmiertelników z nowym zaklęciem czarnej magii: wyłączeniem grawitacji. W tej chwili może ją zawiesić tylko na krótką chwilę, ale z pewnością planuje coś znacznie większego.

Teraz pyta Cię (oczywiście z czysto akademickiej ciekawości): na jak długo musiałby wyłączyć grawitacyjne oddziaływanie Słońca aby Ziemia odleciała w nieskończoność?

33 Eliza wzięła do swoich eksperymentów kulinarnych starą podwójną płytę grzewczą. Wbrew jej oczekiwaniom, płyta działała bardzo dobrze i po podłączeniu do prądu rozgrzała się do astronomicznej temperatury 250 °C. Jednak w takich temperaturach jedzenie łatwo się przypala. Niestety, sterowanie na starej płycie grzewczej przestało działać, więc Eliza musiała improwizować. Wzięła rozpylacz ze specjalnym płynem chłodzącym o temperaturze 20 °C i rozpylała go na rozgrzaną płytę grzewczą ze stałym objętościowym natężeniem przepływu. Jakie musi być objętościowe natężenie przepływu tego płynu, aby temperatura spadła do akceptowalnej wartości 150 °C? Powierzchnia płyty grzewczej wynosi 0,1 m^2, a po latach intensywnego użytkowania jest całkowicie czarna.

Specjalna ciecz ma, w szerokim zakresie temperatur, stałe ciepło właściwe i gęstość, które są równe ciepłu właściwemu i gęstości wody w temperaturze pokojowej. Wrze również w temperaturze 100 °C *i ma takie samo jak woda ciepło parowania.*

34 Jurek przewozi w swoim samochodzie cenny ładunek – tort weselny w kształcie obrotowej paraboloidy o wysokości H i podstawie o promieniu R. Gdy zbliża się do skrzyżowania, włącza się sygnalizacja świetlna nagle zmienia kolor na czerwony, zmuszając go do gwałtownego naciśnięcia hamulców. Jakie jest największe opóźnienie, jakie może zastosować, aby ciasto się nie przewróciło?

Ignoruj skutki spowodowane szarpnięciem.

35 Po swoim długim i promiennym życiu, nasze Słońce umrze. Śmierć gwiazdy tego rozmiaru polega na odrywaniu się zewnętrznych warstw materii i ich ucieczce w przestrzeń kosmiczną.

Przyjmij, że Słońce jest kulą, obracającą się z okresem 28 dni, składającą się z jednorodnego jądra i jednorodnego płaszcza. Stosunek masy jądra do masy płaszcza wynosi 1 : 1 a stosunek ich gęstości 63 : 1. Słońce umierając odrzuci całkowicie swój płaszcz, a jego jądro zapadnie się do postaci białego karła – jednorodnej kuli o promieniu 5000 km.

Jaki będzie okres obrotu białego karła?

36 Strumień neutrin słonecznych przechodzących przez Ziemię wynosi około $10^{15}\ \mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}}$. Darek zbudował ogromny detektor w kształcie sześcianu o objętości $1000\ \mathrm{m^3}$, wypełnił go wodą i odkrył, że średnio co sekundę wychwytywane jest w nim jedno neutrino.

Jaka jest średnia droga swobodna neutrina w wodzie?

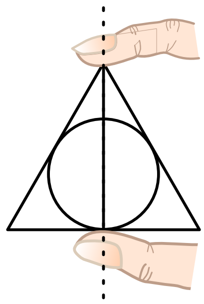
37 Po Igrzyskach Olimpijskich zafascynowaliśmy się strzelectwem pistoletowym i zbudowaliśmy wiatrówkę. Mechanizm wiatrówki składa się z cylindra o objętości $V = 100\ \mathrm{cm^3}$ napełnionego powietrzem pod ciśnieniem atmosferycznym, który zamknięty jest tłokiem o masie $M = 1\ \mathrm{g}$. Przed oddaniem strzału mechanizm strzelecki jest kompresowany do objętości $\frac{V}{16}$. Następnie pocisk o masie $m = 2\ \mathrm{g}$ jest umieszczony przed tłokiem. Po naciśnięciu spustu tłok zostaje zwolniony, a powietrze rozpręża się, wyrzucając pocisk.

Aby przetestować broń, zatrudniliśmy dwóch strzelców, Yusufa i Kim. Yusuf przybył na miejsce, załadował broń, nacisnął spust i odszedł. Kiedy przybył drugi tester, mieliśmy mnóstwo czasu: między ładowaniem a strzelaniem Kim najpierw poprawiła klapkę na lewym oku, tak, że widziała cel tylko prawym okiem, a następnie zgrała otwór z małym otworem z przodu prawego oka, co pozwalało jej widzieć cel bardzo ostro. Podczas przygotowań powietrze w tłoku uległo schłodzeniu. Interesuje nas stosunek prędkości pocisków wystrzelonych przez Yusufa i Kim.

Praca wykonana przez gaz podczas procesu adiabatycznego jest następująca $W = \frac{p_0 V_0 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$, *gdzie indeks* 0 *reprezentuje stan początkowy a* 1 *stan końcowy. Powietrze jest doskonałym gazem dwuatomowym o* $\kappa = 1{,}4$.

38 Sara po raz trzeci wzięła do ręki wisiorek Insygniów Śmierci. Trzymała go między kciukiem a palcem wskazującym, tak aby Czarna Różdżka leżała bezpośrednio na linii łączącej te dwa palce, a następnie obróciła go. Jaki był moment bezwładności wisiorka względem tej osi?

Geometrycznie wisiorek Sary składa się z trójkąta równobocznego o boku długości a, okręgu wpisanego w trójkąt oraz jednej z jego wysokości. Gęstość liniowa wszystkich jego elementów wynosi λ.

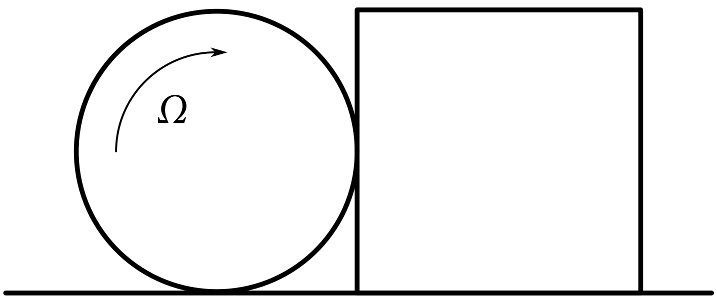


39 W dniu swoich urodzin babcia Justyna musi usłyszeć Sto lat od całej rodziny. Co roku musi je słyszeć z poziomem natężenia dźwięku (mierzonym w decybelach) równym jej wiekowi w latach, a my musimy starać się coraz bardziej. W zeszłym roku nie byliśmy w stanie śpiewać jeszcze głośniej, więc zwróciliśmy się o pomoc do naszego hałaśliwego sąsiada, który potrafi śpiewać z poziomem natężenia dźwięku 100 dB z odległości 1 m.

W tym roku przekonaliśmy się, że nawet pomoc sąsiada nie wystarczy. Zamiast tego przenieśliśmy fotel babci Justyny 30 cm bliżej śpiewających krewnych. Ile lat ma w tym roku babcia Justyna?

40 Donek Sześcian i Jarek Walec znowu stają do walki. Żadnych pięści ani kopnięć, zasady są jasne: Jarek rozkręca się do częstości $\Omega = 23\ \mathrm{s}^{-1}$, kładzie się poziomo i próbuje przepchnąć Donka. Donek Sześcian jest dość obojętny na bycie popychanym, ale interesuje go, jaką maksymalną prędkość osiągnie, gdy Jarek go pcha.

Współczynnik tarcia między Donkiem a ziemią oraz między Donkiem a Jarkiem wynosi $f = 0{,}2$, a współczynnik tarcia między Jarkiem i ziemią jest dwa razy większy. Zarówno boki Donka, jak i wysokość oraz średnica Jarka są równe 1 m i każdy z nich ma masę 100 kg.



Rozwiązania

1 We hope you have passed the hidden IQ test and denoted each fruit with some letter. For example B – banana, L – lemon, G – grape, M – watermelon and C – cherry. The gargantuan equation is then simplified to

$$\frac{M(2B)^2}{2C^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{G}} = ?\ \mathrm{Wh}. \tag{1.1}$$

We plug the equation $\frac{B}{C^2} = G$ in the denominator. Next, we multiply the whole expression by $\frac{BL}{BL}$, which leads to

$$\frac{M(2B)^2}{2C^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{G}} = \frac{4MB^2}{\frac{3B}{2G}} = \frac{8}{3}MBG = \frac{8}{3}\frac{L}{B}\frac{MB^2G}{L}. \tag{1.2}$$

We notice that the last fraction is equal to unity, as can be deduced from one of the equations from the problem statement, and using another equation, $\frac{L}{B} = 2{,}7\ \mathrm{kJ}$. That means that fraction of interest is equal to 7,2 kJ. In order to convert it to Wh, we recall that 1 Wh = 3600 J, so the result is 2 Wh.

We firmly believe that from now on you will not complain about letters in equations.

2 Both racers drive at constant speed and therefore at any time they will have covered the same distance. If Pato drives n times around the roundabout, he will have travelled a distance of $n \cdot 100$ m. We require Josef to drive one circle less, so at the same time he has driven the distance of $(n-1) \cdot 120$ m. Since the covered distances must be equal, we know that

$$n \cdot 100\ \mathrm{m} = (n-1) \cdot 120\ \mathrm{m}, \tag{2.1}$$

which holds for $n = 6$.

3 What happens with Martin's coffee? It will start giving away heat to the aluminium container which begins to heat up. The heat transfer stops once both coffee and container have the same temperature, and the heat given away by coffee equals the heat received by the container.

The volume of the inner container is

$$V = \pi r^2 h \doteq 905\ \mathrm{ml}, \tag{3.1}$$

where r is the base radius and h is the container's height. The coffee with density of water therefore weighs $m_\mathrm{k} = V\rho_{\mathrm{H_2O}} \doteq 905$ g, its specific heat capacity is $c_{\mathrm{H_2O}}$ and its temperature went down from T_k to some lower temperature T.

Then there is the container – a cylinder with mass

$$m_\mathrm{Al} = \left(2\pi r^2 + 2\pi r h\right)\Delta h \rho_\mathrm{Al} \doteq 75\ \mathrm{g}, \tag{3.2}$$

where Δh is the wall thickness and ρ_Al is the aluminium density. The container with specific heat capacity c_Al had its temperature increased from initial T_Al, again to temperature T. The calorimetric equation therefore reads

$$m_\mathrm{k} c_{\mathrm{H_2O}} (T_\mathrm{k} - T) = m_\mathrm{Al} c_\mathrm{Al} (T - T_\mathrm{Al}), \tag{3.3}$$

whence

$$T = \frac{m_\mathrm{k} c_{\mathrm{H_2O}} T_\mathrm{k} + m_\mathrm{Al} c_\mathrm{Al} T_\mathrm{Al}}{m_\mathrm{k} c_{\mathrm{H_2O}} + m_\mathrm{Al} c_\mathrm{Al}}. \tag{3.4}$$

The coffee will therefore cool by $T_\mathrm{k} - T \doteq 1{,}3\ ^\circ\mathrm{C}$.

Co stanie się z kawą Martina? Zacznie oddawać ciepło do aluminiowego pojemnika, który zacznie się nagrzewać. Przenoszenie ciepła ustaje, gdy kawa i pojemnik mają tę samą temperaturę, a ciepło oddawane przez kawę jest równe ciepłu otrzymanemu przez pojemnik.

Objętość wewnętrznego pojemnika wynosi

$$V = \pi r^2 h \doteq 905\ \mathrm{ml}, \tag{3.5}$$

gdzie r jest promieniem podstawy, a h jest wysokością pojemnika. Kawa o gęstości wody waży więc $m_\mathrm{k} = V\rho_{\mathrm{H_2O}} \doteq 905\ \mathrm{g}$, jej ciepło właściwe wynosi $c_{\mathrm{H_2O}}$, a jej temperatura spadła z T_k do niższej temperatury T.

Następnie mamy pojemnik – cylinder o masie

$$m_\mathrm{Al} = (2\pi r^2 + 2\pi r h)\, \Delta h \rho_\mathrm{Al} \doteq 75\ \mathrm{g}, \tag{3.6}$$

gdzie Δh to grubość ścianki, a ρ_Al to gęstość aluminium. Temperatura pojemnika o pojemności cieplnej c_Al wzrosła z początkowej temperatury T_Al, ponownie do temperatury T. Zatem równanie kalorymetryczne ma postać

$$m_\mathrm{k} c_{\mathrm{H_2O}} (T_\mathrm{k} - T) = m_\mathrm{Al} c_\mathrm{Al} (T - T_\mathrm{Al}), \tag{3.7}$$

skąd

$$T = \frac{m_\mathrm{k} c_{\mathrm{H_2O}} T_\mathrm{k} + m_\mathrm{Al} c_\mathrm{Al} T_\mathrm{Al}}{m_\mathrm{k} c_{\mathrm{H_2O}} + m_\mathrm{Al} c_\mathrm{Al}}. \tag{3.8}$$

Kawa ostygnie zatem o $T_\mathrm{k} - T \doteq 1{,}3\ ^\circ\mathrm{C}$.

4 If we want to convert units, for example from metres to kilometres, we usually multiply the value by number one in a suitable form,

$$1 = \frac{1\ \text{new unit}}{x\ \text{old units}}. \tag{4.1}$$

For example we can convert 563 m to kilometres by writing

$$563\ \mathrm{m} = 563\ \mathrm{m} \cdot \underbrace{\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}}_{1} = \frac{563}{1000}\ \mathrm{km} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} = 0{,}563\ \mathrm{km}. \tag{4.2}$$

Equivalently we convert $\mathrm{m/s^2}$ to $\mathrm{km/h^2}$. Since $1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$, suitable ones are $\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}$ and $\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}$.

The entire computation is as follows:

$$2\ \mathrm{m/s^2} = 2\ \mathrm{m/s^2} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3600^2}{1000} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{s^2}}}{\cancel{\mathrm{s^2}}} \cdot \mathrm{km/h^2} = 25\,920\ \mathrm{km/h^2}. \tag{4.3}$$

5 As water flows into the unusual glass creation, it follows certain rules:

1. If it can flow somewhere lower, it will.
2. Therefore the free surface must be at the same height everywhere.
3. At the beginning, there is air everywhere. So if water is to flow somewhere, there must be an opening for the air to escape. If there is no opening, the air will prevent the next water from flowing in.

Gradually, as we pour in water and adhere to these rules, we will reach a filling level as shown in the image 5.1.

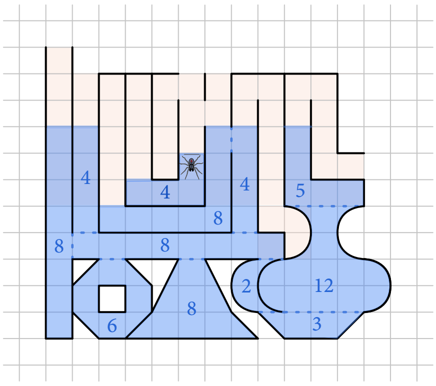


Figura 5.1: *Distribution of water in the container*

All that remains is to calculate the volume of the poured water. If we realize that the cut parts have a volume of 1 l or 0,5 l and the arc-shaped parts complement each other to form whole squares, the volume of the poured water can simply be determined as 72 l.

6

7 Let us denote the length of the $L = 300$ m and Thomas's and Matthew's acceleration $a_\mathrm{T} = 8$ m/s and $a_\mathrm{M} = 9$ m/s. Time t_T which it took Thomas to reach the finish line, can be calculated from the equation for motion with constant acceleration

$$L = \frac{1}{2} a_\mathrm{T} t_T^2, \tag{7.1}$$

from where we can express

$$t_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2L}{a_\mathrm{T}}}. \tag{7.2}$$

Similarly, we calculate the time t_M which Matthew took to cross the finish line as

$$t_M = \sqrt{\frac{2L}{a_M}} \tag{7.3}$$

We add $\Delta t = 1$ s to this time and we compare the total times both racers required to reach the finish. After plugging in the values from problem statement we get

$$(t_M + \Delta t) - t_T = 0{,}505 \text{ s}, \tag{7.4}$$

so Thomas wins by 0,505 s.

8 The numbers are powers of two, so we must decide the truthfulness of all statements.

Hose (1)

The equation of continuity applies: what flows into something must flow out as well. The volumetric flow is constant, and thus a smaller cross-section means a greater velocity. The statement is **false**.

Force acting on a surface of a closed container (2)

Pascal's law could suggest something similar to us. But in addition to the pressure caused by our force, there is also the weight of the liquid, and the pressure it causes is called hydrostatic pressure – this, however, varies with depth, so the statement is **false**.

Body on the surface (4)

The statement is **false**, whether we recall a needle floating on the water surface due to surface tension or a floating iron ship.

Mercury in a measuring cylinder (8)

The pressure at the bottom of the cylinder is hydrostatic pressure, which depends on how deep below the surface this bottom is. By tilting the cylinder, its horizontal cross-section increases, and therefore the liquid level decreases. The hydrostatic pressure thus decreases as well, and the statement is **true**.

Floating ice cube (16)

The submerged part of the ice cube occupies the same volume as water with the same weight – therefore when the cube melts, the newly formed water only occupies the space that the ice cube occupied below the surface. The claim is **false**.[1]

Evaporation (32)

The statement is **false** – even at a lower temperature, the molecules with the highest energy can escape from the surface of the liquid. When boiling point is reached, the liquid evaporates in its entire volume.

[1] If we consider that the temperature of the water decreased due to the melting ice and consequently its volume due to thermal expansion, we would conclude that the level would even drop.

Two bodies (64)

Even though polystyrene foam has a much lower density than wood, a large log and one polystyrene ball can float next to each other – and this is in direct contradiction to the statement in the problem, so it is **false**.

Summing the numbers of the true statements we get the answer 8.

9 When a light ray passes through an optical interface, it refracts according Snell's law. The considered ray passes from a material with refractive index 1 (air) to a material with refractive index n (water) at the angle of incidence 45°. Therefore

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha} = n. \tag{9.1}$$

If we consider a right triangle determined by the ray, normal to the interface at the place of incidence, and bottom of the pool, according to the Pythagorean theorem, the path length of the ray in the water is $\sqrt{d^2 + h^2}$, where h is depth of the pool and d is distance of the place at the pool bottom which is hit by the ray from the normal. Thus we can write

$$\sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}, \tag{9.2}$$

After substituting into the previous equation, we can express

$$d = \frac{h}{\sqrt{2n^2 - 1}}. \tag{9.3}$$

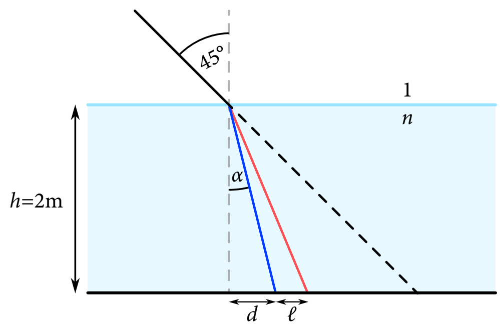


Figura 9.1: *The outermost rays hitting the pool bottom*

Individual colour components of light differ (among other things) by their refractive index. Therefore, each wavelength refracts slightly differently after hitting the interface. From the problem statement we know that the refractive index of water for visible wavelengths lies within the given range – let's denote the limit values $n_{\min}$ and $n_{\max}$. Each of them leads to a different value of d. A difference of the ds is the sought length of the rainbow stripe at the bottom of the pool

$$\ell = \left| \frac{h}{\sqrt{2n_{\min}^2 - 1}} - \frac{h}{\sqrt{2n_{\max}^2 - 1}} \right|. \tag{9.4}$$

For the provided numerical values $\ell \approx 13$ mm.

Gdy promień światła przechodzi przez granice ośrodków, załamuje się zgodnie z prawem Snella. Rozważany promień przechodzi z materiału o współczynniku załamania 1 (powietrze) do materiału o współczynniku załamania n (woda) pod kątem padania 45°. Dlatego

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin\alpha} = n. \tag{9.5}$$

Jeśli rozważymy trójkąt prostokątny wyznaczony przez promień, normalny do granicy ośrodków w miejscu padania i dna basenu, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa, długość ścieżki promienia w wodzie wynosi $\sqrt{d^2+h^2}$, gdzie h jest głębokością basenu, a d jest odległością miejsca na dnie basenu, w które trafia promień, od normalnej. Możemy zatem zapisać

$$\sin\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}, \tag{9.6}$$

Po podstawieniu do poprzedniego równania możemy wyrazić

$$d = \frac{h}{\sqrt{2n^2-1}}. \tag{9.7}$$

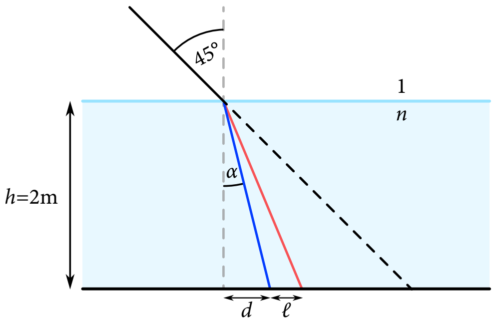


Figura 9.2: *Skrajne (najbardziej zewnętrzne) promienie uderzające w dno basenu*

Poszczególne składowe koloru światła różnią się (między innymi) współczynnikiem załamania światła. Dlatego każda długość fali załamuje się nieco inaczej po przejściu przez granicę ośrodków. Ze sformułowania problemu wiemy, że współczynnik załamania światła wody dla widzialnych długości fal leży w podanym zakresie – oznaczmy wartości graniczne n_{min} i n_{max}. Każdy z nich prowadzi do innej wartości d. Różnica ds to poszukiwana długość tęczowego paska na dnie basenu

$$\ell = \left|\frac{h}{\sqrt{2n_{\mathrm{min}}^2-1}} - \frac{h}{\sqrt{2n_{\mathrm{max}}^2-1}}\right|. \tag{9.8}$$

Dla podanych wartości liczbowych $\ell \approx 13$ mm.

10 In the tank, there is $m_{\mathrm{i}} = 1$ kg of ice with density of $\rho_{\mathrm{i}} = 916\ \mathrm{kg/m^3}$, therefore its volume is $V_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{i}}/\rho_{\mathrm{i}} \doteq 1{,}092$ l.

If we denote the total volume of the tank as V, the antifreeze mixture occupies a volume of $V_{\mathrm{a}} = V - V_{\mathrm{i}} \doteq 0{,}908$ l, and therefore its mass is $m_{\mathrm{a}} = (V - V_{\mathrm{i}})\rho_{\mathrm{a}} \doteq 0{,}727$ kg. The new freezing temperature is a weighted average according to the mass of the constituents, which is

$$T = \frac{m_i T_i + m_a T_a}{m_i + m_a}, \tag{10.1}$$

where T_i and T_a are the freezing temperatures of water and the antifreeze mixture.

For the values from the problem statement it equals $T \doteq -8{,}4$ °C.

11 Whenever Adam or the fish bite off a piece of the apple, due to buoyancy it will find a new position, such that the submerged part of the apple will always constitute two thirds of its volume.

Therefore at any given time, both of them have something to bite, however small the remaining piece of the apple is. And because both of them are eating all the time and finish simultaneously, the ratio of eaten parts will be determined by the ratio of their biting rates. Therefore, the answer is $\frac{3}{4}$.

12 Suppose Jeremy's speed is v_0. While braking on flat ground, he decelerates with constant deceleration a, so his speed $v(t)$ changes in time as

$$v(t) = v_0 - at. \tag{12.1}$$

We see that $v(t) = 0$ when $t = v_0/a$, which is the time required to come to a halt. The travelled distance is then

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2, \tag{12.2}$$

which means that after time $t = v_0/a$, so before fully stopping, Jeremy has covered the distance

$$s = \frac{1}{2}at^2, \tag{12.3}$$

from where we easily express Jeremy's deceleration

$$a = \frac{2s}{t^2}. \tag{12.4}$$

Using simple trigonometry, we know that if Jeremy is travelling down an inclined plane at an angle α with respect to the horizontal plane, his acceleration is $g \sin\alpha$. If this acceleration is the same as Jeremy's deceleration, he will never stop, so the angle α is

$$\frac{2s}{t^2} = g\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{2s}{gt^2}. \tag{12.5}$$

13 Even if the circuit may appear strange, Ohm's law is still a good tool to use. In this specific case, the resistance in the circuit depends on the current showed by the ammeter. Specifically, if the ammeter shows there is a current of k amperes, the resistance will be $4k\ \Omega$.

From the Ohm's law $U = RI$ we obtain

$$9\ \mathrm{V} = 4k\ \Omega \cdot k\ \mathrm{A}, \tag{13.1}$$

and from that,

$$k = \frac{3}{2}. \tag{13.2}$$

The ammeter will indicate $\frac{3}{2}$ A.

14 Since we know the angular speed of the LP record[2], we can determine that after 20 minutes it completed $20 \cdot 33⅓ = 666⅔$ revolutions. In this time, the needle moves along the entire groove, so the groove must twist around the centre of the disc 666⅔ times. Since the diameter of the disc is 30 cm and the groove ends 5 cm from the centre, the grooved part of the disc is 15 cm − 5 cm = 10 cm wide, so the distance between two twists of the groove is approximately

$$w \approx \frac{10\text{ cm}}{666⅔} = \frac{3}{20}\text{ mm} = 0{,}15\text{ mm}. \tag{14.1}$$

Area S covered by the groove is easily calculated as the difference of the surface of whole disc and the ungrooved part around the centre,

$$S \approx \pi\Big((15\text{ cm})^2 - (5\text{ cm})^2\Big) = 200\pi\text{ cm}^2. \tag{14.2}$$

Finally, we untwist the groove into the shape of a very long rectangle. If we know its surface and width, the length ℓ is equal to their quotient,

$$\ell \approx \frac{S}{w} = \frac{200\pi\text{ cm}^2}{0{,}15\text{ mm}} \approx 418{,}88\text{ m} \doteq 419\text{ m}. \tag{14.3}$$

15 Prędkość skoczka podczas skoku można rozłożyć na składową poziomą i pionową. Składowa pozioma jest stała i nie jest dla nas zbyt interesująca. Dlatego musimy jedynie modelować całą sytuację jako rzut pionowy. Oznaczmy początkową prędkość skoczka jako v_0. Prędkość ta zmienia się liniowo w trakcie ruchu, a ta szybkość zmiany to przyspieszenie grawitacyjne g.

Na początku skoczek miał prędkość v_0, a w chwili, gdy minął poziom trampoliny w dół, jego prędkość wynosiła $-v_0$. Różnica tych dwóch prędkości wynosi zatem $2v_0$ a czas, jaki skoczek spędził nad poziomem trampoliny, musi wynosić $\frac{2v_0}{g}$. Jest to połowa całkowitego czasu lotu T, zatem

$$T = \frac{4v_0}{g}. \tag{15.1}$$

Teraz wyraźmy prędkość początkową v_0 jako funkcję wysokości trampoliny, $h = 10$ m. Zaczynamy od momentu, w którym skoczek przekracza poziom trampoliny w dół. Dla jej jednostajnie przyspieszonego ruchu w dół możemy wyrazić h jako

$$h = v_0\frac{T}{2} + \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2. \tag{15.2}$$

[2] We hope that Patrick's disc was indeed an LP record.

Na koniec wyrażamy v_0 z równania 15.1 i podstawimy je do równania 15.2. Upraszcza się to do

$$h = \frac{gT^2}{4}, \tag{15.3}$$

z czego możemy łatwo wyznaczyć

$$T = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \approx 2\ \mathrm{s}. \tag{15.4}$$

16 First, let's consider what the geometry of the necklace looks like. The vertical line segment (the Elder Wand) forms the median, the height, and also the angle bisector of the equilateral triangle (the Invisibility Cloak). We can calculate its length from the Pythagorean theorem as $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Since it is an equilateral triangle, all other medians will also be the angle bisectors. Thanks to this, we know that the centroid of the triangle will coincide with the centre of the inscribed circle (the Resurrection Stone). Its radius will also be one-third the length of the median, i.e. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

From the symmetry of the pendant we know that the centroid will be located on the line segment. We can then calculate the position of the centroid as the average of the distances of the individual centroids weighted by their masses. Thus, we only need to calculate the vertical position of the centroid. For simplicity, we can choose the point from which we measure the distance to the centroid as the origin. Since mass is directly proportional to the length of the wire, the distance of the centroid from the vertex of the triangle will be

$$x = \frac{m_\triangle x_\triangle + m_\circ x_\circ + m_| x_|}{m_\triangle + m_\circ + m_|} = \frac{3a\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\pi a}{\sqrt{3}}\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4}}{3a + \frac{\pi a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3}a \doteq 0{,}555a. \tag{16.1}$$

17 The projectile's launch speed is determined by the law of conservation of energy. At the beginning, both bodies are located at a height of L above the ground and are stationary. Their total mechanical energy E_0 is thus composed only of potential energy, which we can choose as we please, for instance with respect to the ground,

$$E_0 = mgL + MgL. \tag{17.1}$$

At the moment when the pole is vertical, both bodies are moving with a speed of v, but the counterweight is on the ground, and the projectile is at a height of $2L$, thus the total mechanical energy is

$$E_1 = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{17.2}$$

Since mechanical energy is conserved, it holds that $E_0 = E_1$, i.e.,

$$MgL + mgL = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2, \tag{17.3}$$

from which we can express the launch speed of the projectile as

$$v = \sqrt{2gL\frac{M-m}{M+m}}. \tag{17.4}$$

This speed has a horizontal direction.

From now on, the projectile moves along a parabola, since in the vertical direction it is accelerated by gravity. We want to know how long it takes to traverse a length of $2L$ to fall to the ground. This will simply be

$$\frac{1}{2}gt^2 = 2L \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{4L}{g}}. \tag{17.5}$$

In the horizontal direction, the projectile moves at a constant speed v and in time t it travels to the distance of

$$s = vt = 2\sqrt{2\frac{M-m}{M+m}}L. \tag{17.6}$$

18 Let's assume that all the drivers departed from Bratislava at 10:00 – for the sake of simplicity.

We shall denote the lanes A, B, C and D from the slowest to the fastest. Numbers of cars leaving Bratislava in the specific lanes per minute are a, b, c and d. At first, we need to calculate how long the journey in every lane takes: it is respectively 5, 4, 3⅓ and 2,5 hours.

Arthur in lane B arrived in Prague at 14:00. Meanwhile, some cars were arriving in Prague in the slowest (A) lane – these left Bratislava at 09:00. That does mean Arthur overtook all the cars in lane A which had departed from Bratislava between 09:00 and 10:00 – that is $60a$ cars.

How many cars were overtaken by Peter, the fastest driver? Arriving in Prague at 12:30, he had to overtake the cars in lane C, which had left Bratislava between 9:10 and 10:00, that means $50c$ cars. And the problem states this number is 200, therefore $50c = 200$.

If we make similar calculations for both the drivers and all the lanes, we find that the problem can be reduced to this simple series of equations:

$$\begin{aligned} 50c &= 200, \\ 150a + 90b + 50c &= 620, \\ 100a + 40b &= 220. \end{aligned} \tag{18.1}$$

From that, we can isolate $a = 1$, and therefore $60a = 60$ and Arthur overtook 60 cars on his way.

19 Two of the units, *horse length* and *horse ration*, can be transformed to SI directly, as their dimensions are metres and reciprocal seconds respectively:

- *horse length* ζ is 8 ft ≐ 2,438 m and
- *horse ration* δ is $\frac{1{,}7\ \mathrm{kg}}{100\ \mathrm{kg}\cdot 1\ \mathrm{d}}$, or about $1{,}97 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$.

A *horsepower* is, as its name hints, a unit of power, and its dimension must be the same as that of a watt. When we plug in the values into its definition, we find out that one *horsepower* ψ corresponds to 735,5 W[3]. In base units, the dimension of a watt is

$$\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m/s} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s^3}. \tag{19.1}$$

[3] Or 750 W if we use $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

To obtain a unit of mass, we need to divide power by a squared unit of length and a cubed unit of reciprocal time. Then

$$1\,\text{horse weight} = \frac{\psi}{\zeta^2\delta^3} \doteq \frac{735{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}}{(2{,}438\ \text{m})^2\cdot(1{,}97\cdot10^{-7}\ \text{s}^{-1})^3} \doteq 1{,}624\cdot10^{22}\ \text{kg}. \tag{19.2}$$

20 Regardless of what Billy's motion looks like, two conditions must always hold:

- the total time of his run must be equal to the time Cathy spends on the escalator;
- he must end at the same position as Cathy, so the total number of stairs he had run up and down must be equal.

Since his speed while running up is only one third as fast as when running down, the ratios of total time spent running up and down must be reciprocal, or $6:2 = 45:15$. Since Cathy will obviously spend 60 seconds standing on the stairs, Billy will be running up for a total of 45 s and down for 15 s.

The total distance he will have run will thus be

$$45\ \text{s}\cdot 2\ \text{stairs/s} + 15\ \text{s}\cdot 6\ \text{stairs/s} = 180\ \text{stairs}. \tag{20.1}$$

21 At any moment, sound spreads from the moving aircraft in all directions at the speed of sound c with respect to the atmosphere. Since the airplane is moving at a speed v greater than c, the envelope of the generated sound waves (shock wave) has the shape of a cone in the direction of the airplane. with a vertex angle of 2α, for which it holds that $\sin\alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{3}$. The vertex of this cone moves in the direction of the aircraft (together with the source) at the speed v, and its surface spreads in the perpendicular direction at speed c.

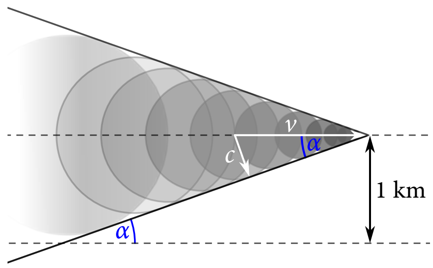


Figura 21.1: *Shock wave from Marc's airplane*

If Sabine with her aircraft were stationary, the sound envelope from Marc's aircraft would reach her only when Marcel was at a distance of

$$1\ \text{km}\cdot\cot\alpha = 1\ \text{km}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = 2\sqrt{2}\ \text{km} \tag{21.1}$$

from the point of their closest approach. Since Sabine is moving at a speed v in the opposite direction, both would only manage to reach half the distance of $\sqrt{2}$ km. Marc covers this distance in time

$$\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/s}} = \sqrt{2}\,\mathrm{s}. \tag{21.2}$$

22 If the empty balloon with newlyweds weighs M and the hydrogen in it weighs m_{H}, the total gravitational force acting on the inflated balloon will be $(M + m_{\mathrm{H}})g$. For the balloon to float, an upward buoyant force $V\rho_{\mathrm{a}}g$ must act on it, where V is the volume of the balloon and ρ_{a} is the density of air.^[We silently assume the the volume of the newlyweds is negligible compared to this volume. The equation for the equality of forces is

$$(M + m_{\mathrm{H}})g = V\rho_{\mathrm{a}}g, \tag{22.1}$$

from which, substituting $V = \frac{m_{\mathrm{H}}}{\rho_{\mathrm{H}}}$, where ρ_{H} is the density of hydrogen, we get

$$M + m_{\mathrm{H}} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{\rho_{\mathrm{H}}}\rho_{\mathrm{a}}, \tag{22.2}$$

and from there we can express the mass of hydrogen as

$$m_{\mathrm{H}} = \frac{M}{\frac{\rho_{\mathrm{a}}}{\rho_{\mathrm{H}}} - 1}. \tag{22.3}$$

Now we can find the density of hydrogen under normal conditions $\rho_{\mathrm{H}} = 0{,}09\ \mathrm{kg/m^3}$ or utilize the knowledge that under standard conditions, a mole of any gas occupies 22,4 l, meaning it has a molar volume of $V_{\mathrm{m}} = 22{,}4\ \mathrm{l/mol}$. Therefore, the density of hydrogen is

$$\rho_{\mathrm{H}} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{V} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{nV_{\mathrm{m}}} = \frac{M_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{m}}}, \tag{22.4}$$

where $M_{\mathrm{H}} = 2\ \mathrm{g/mol}$ is the molar mass of molecular hydrogen. Equation 22.3 then transforms into

$$m_{\mathrm{H}} = \frac{M}{\frac{\rho_{\mathrm{a}}V_{\mathrm{m}}}{M_{\mathrm{H}}} - 1} \doteq 73{,}7\ \mathrm{kg}, \tag{22.5}$$

and therefore the amount of substance of hydrogen is

$$n_{\mathrm{H}} = \frac{M}{\rho_{\mathrm{a}}V_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{H}}} \doteq 36{,}9\ \mathrm{kmol}. \tag{22.6}$$

This hydrogen was produced electrolytically. The newlyweds are burning it, which is a process opposite to electrolysis. Therefore, if burning a mole of hydrogen releases energy H, it also takes energy H to produce it, at least in an ideal world. However, the newlyweds do not live in such a world, and their electrolysis apparatus has an efficiency η, meaning that to obtain a mole of hydrogen, $\frac{H}{\eta}$ energy is needed, and for n_{H} this is the energy

$$E = \frac{H}{\eta}n_{\mathrm{H}} = \frac{H}{\eta}\frac{M}{\rho_{\mathrm{a}}V_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{H}}}, \tag{22.7}$$

which for the values given is approximately 21 GJ or 5855 kWh. At the newlyweds' electricity price, this costs about 1171 €.

23 Widzimy, że między każdą parą stopni w drabinie mamy idealny przewodnik. Dlatego możemy podzielić drabinę na szeregowe połączenie 99 obwodów równoległych, których całkowity opór powinniśmy już być w stanie obliczyć. Rezystancję n-tej sekcji drabiny oblicza się za pomocą wzoru na rezystancję gałęzi równoległych,

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega \parallel \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,\Omega. \tag{23.1}$$

Teraz wiemy, że możemy zredukować połączenie do 99 rezystorów połączonych szeregowo i musimy zsumować ich rezystancje. Nie wygląda to prosto… na szczęście, jedyną rozsądną rzeczą, jaką możemy zrobić, jest rozwinięcie każdej wartości o odpowiednią wartość, aby wyeliminować pierwiastki kwadratowe w mianowniku:

$$R = \sum_{n=1}^{99} R_n = \sum_{n=1}^{99}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)\Omega = \sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\Omega. \tag{23.2}$$

W tym przypadku identyfikujemy tzw. *szereg teleskopowy*: oprócz ostatniego dodatniego i pierwszego ujemnego członu, wszystko inne znosi się wzajemnie i otrzymujemy wynik

$$\sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\Omega = \left(\sqrt{100} - \cancel{\sqrt{99}} + \cancel{\sqrt{99}} - \sqrt{98} + \ldots - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}\right)\Omega = 10\,\Omega - 1\,\Omega = 9\,\Omega. \tag{23.3}$$

24 The sea level will behave over time as a sine, so let's draw one. The sine function has sa period od 2π; however, in our case, it will be scaled to 12 h. The question is, for what portion of the arguments of the function (horizontal axis) is the value greater than $\frac{2}{3}A$. This will not depend on whether the function period is 2π or 12 h – so for simplicity, let's draw one with the period of 2π.

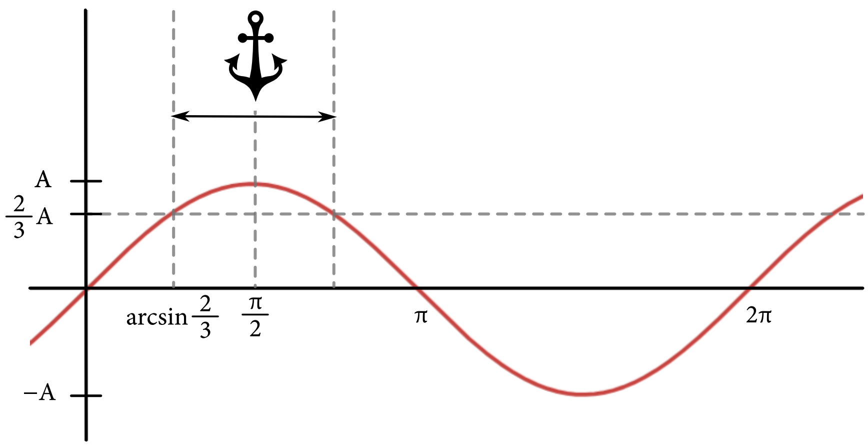


Figura 24.1: *The behavior of the sea level with the time suitable for anchoring marked*

From the image, it is clear that we will be interested in when the function reaches the value $\frac{2}{3}A$. We can calculate it exactly as $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$.

What portion of one period of length 2π is between $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ and $\frac{\pi}{2}$? It is

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \tag{24.1}$$

and there are two such pieces, so the total probability is

$$2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \doteq 0{,}267\,72 \doteq 26{,}8\ \%. \tag{24.2}$$

25 Let's stand in the centre of the Earth and mark the angle between points α. The distance measured by Marcel is $R\alpha$ and the distance measured by Max can be easily calculated as the base of an isosceles triangle, specifically

$$2R\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{25.1}$$

These two distances should differ by $\Delta\ell = 1$ m. From this, we get the equation

$$R\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2} + \Delta\ell. \tag{25.2}$$

We would like to solve this equation for α. This is not at all simple! In fact, it is analytically impossible! We will therefore have to settle for an approximate solution, for example through numerical binary search or using Taylor expansion. For the sine function, it holds that

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots. \tag{25.3}$$

Since $\Delta\ell$ is small, we should expect α to be small as well. We will only take the first non-trivial term and get

$$R\alpha = R\alpha - R\frac{\alpha^3}{24} + \Delta\ell, \tag{25.4}$$

from which we manipulate to express

$$R\alpha = R\sqrt[3]{\frac{24\,\Delta\ell}{R}} = \sqrt[3]{24R^2\,\Delta\ell}. \tag{25.5}$$

This is exactly the sought distance of Moritz. Substituting gives 99,2 km.

Stańmy w środku Ziemi i zaznaczmy kąt między punktami α. Odległość zmierzona przez Marcela to $R\alpha$, a odległość zmierzona przez Maxa można łatwo obliczyć jako podstawę trójkąta równoramiennego, konkretnie

$$2R\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{25.6}$$

Te dwie odległości powinny różnić się o $\Delta\ell = 1$ m. Z tego otrzymujemy równanie

$$R\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2} + \Delta\ell. \tag{25.7}$$

Chcielibyśmy rozwiązać to równanie dla α. To wcale nie jest proste! W rzeczywistości jest to analitycznie niemożliwe! Będziemy musieli zatem zadowolić się przybliżonym rozwiązaniem, na przykład poprzez numeryczne wyszukiwanie binarne lub używając rozwinięcia Taylora. Dla funkcji sinus obowiązuje

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots . \tag{25.8}$$

Ponieważ $\Delta\ell$ jest małe, powinniśmy oczekiwać, że α również będzie małe. Weźmiemy tylko pierwszy nietrywialny wyraz i otrzymamy

$$R\alpha = R\alpha - R\frac{\alpha^3}{24} + \Delta\ell, \tag{25.9}$$

z którego wyznaczamy

$$R\alpha = R\sqrt[3]{\frac{24\,\Delta\ell}{R}} = \sqrt[3]{24R^2\,\Delta\ell}. \tag{25.10}$$

To jest dokładnie poszukiwana odległość Moritza. Podstawienie daje 99,2 km.

26 Only two forces are acting on Adam in this problem: gravity, with magnitude mg and tensile force from the chains of the swing, whose magnitude can change, but we know that it is always centripetal – in the direction towards the hinge. The g-force which Adam feels is always equal to the sum of all contact forces, which is in this case means only the tensile strength from the chains. All we need to do is to determine its magnitude at the lowest point.

In the left- and top-most point of his trajectory Adam is not moving at all. Since he does not stay there, he must be subject to some force; and since he is bound to the arc, the direction of this force must be tangential and it must point back towards the lowest point. At the same time, the tensile force must be $m \cdot 0{,}5\,g$, and the gravity is mg as always.

If we sketch these acting forces for a general angle of maximal deflection α, we see that the magnitude of the centripetal force is $mg\cos\alpha$. This means that in Adam's case α must be 60°, as $\cos 60° = 0{,}5$.

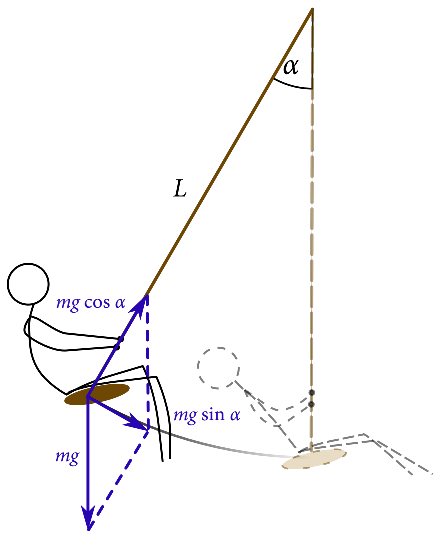


Figura 26.1: *Forces acting on Adam at maximal deflection*

Now we need to calculate Adam's speed at the lowest point. This comes from transforming the difference in potential energies between the highest and lowest points of his trajectory to kinetic energy, which is

$$\Delta U = mg(L - L\cos 60^\circ) = mg\frac{L}{2}, \tag{26.1}$$

and so

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL}. \tag{26.2}$$

Finally we find the magnitude of the tensile force from the chains and the corresponding g-force. Its origins are, again, twofold: centripetal force, which ensures that Adam will remain bound to the arc, and the reaction of the swing to Adam's gravity. Their sum is

$$F = ma = \frac{mv^2}{L} + mg = mg + mg = 2mg. \tag{26.3}$$

and the magnitude of apparent acceleration that Adam feels will thus be

$$a = \frac{2mg}{m} = 2\,g. \tag{26.4}$$

27 Faraday's law of electromagnetic induction states that the induced voltage is equal to the negative rate of change of the magnetic flux through a loop. Magnetic flux is calculated as $\Phi = BS\cos\theta$, where B is the magnitude of the magnetic field passing through area S, entering at an angle θ.

In our case, S is the inner area of the necklace. It is evidently on Kate's neck, and thus it has the shape of her neck, which does not change. The magnitude of magnetic induction B also does not change, according to the problem statement. And since Kate rotates only around the axis of rotation of the merry-go-round, the angle θ does not change either.

All of this means that the magnetic flux through Kate's necklace does not change over time, and therefore no voltage is induced in it, and consequently also no current.

28 Let us denote the buoy's base area S_b, its density ρ_b and its volume V_b; the opening's area S_o and the rope's length ℓ. Let the water level reach height h in the limiting situation. Rhe submerged part of the buoy is $v = h - \ell$ tall. The forces acting on the buoy must be balanced, therefore

$$F_G + F = F_{\mathrm{vz}}, \tag{28.1}$$

where F_G is gravity, F_{vz} is buoyancy and F is a force by which the rope pulls on the buoy. In the limiting situation, the force due to the rope is equal to the force due to pressure by which the plug is pushed to the opening,[4], i.e. $F = p_h S_o$, where p_h is hydrostatic pressure near the bottom. After substituting all forces in, we obtain

$$S_b H \rho_b g + h\rho g S_o = S_b(h - \ell)\rho g, \tag{28.2}$$

where ρ is water density.

[4] If it were any larger, it would pull the plug out.

The least water volume which can be poured in, apparently corresponds to the situation in which the buoy is tied to the bottom as tight as possible, thus $\ell \to 0$. Then we obtain

$$h = \frac{S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}H \tag{28.3}$$

and the corresponding volume

$$V_{\min} = (S - S_b)h = \frac{S - S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}V_b. \tag{28.4}$$

The largest possible water volume which can be poured in corresponds to the situation in which the plug is released just in the moment when the buoy is completely submerged, thus when $h = H + \ell$. It happens when the rope's length is

$$\ell = \left(\frac{S_b}{S_o}\frac{\rho - \rho_b}{\rho} - 1\right)H, \tag{28.5}$$

which corresponds to volume

$$V_{\max} = S\ell + (S - S_b)H = \left[\frac{S}{S_o}\left(1 - \frac{\rho_b}{\rho}\right) - 1\right]V_b. \tag{28.6}$$

According to the problem statement, $S_o = \frac{S}{4}$ and $S_b = 0{,}99S$. For the provided numeric values, it yields minimum volume $V_{\min} = \frac{1}{148}$ l and maximum volume $V_{\max} = 1$ l.

29 The problem statement tells us that during every third passage of the slower pendulum with period T_1 at the extreme right position, it meets the faster one with period T_2 (where $T_1 > T_2$). Between these two moments, the slower pendulum executes three periods and the faster some number of n periods, thus

$$3T_1 = nT_2. \tag{29.1}$$

The second important piece of information is that between these moments, the faster pendulum executes five periods and the slower one some number of m periods, so

$$mT_1 = 5T_2. \tag{29.2}$$

It does not matter at all whether the pendula meet on the left or right. They both perform a simple harmonic motion, and if they meet like this on the left and right, they will meet on both sides after completing five and three periods, respectively. Therefore, it is also unimportant whether Dan initially displaces the pendula to the left or right.

If we divide equations 29.7 and 29.8, we get

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad mn = 15. \tag{29.3}$$

One solution to this equation is $m = 15$, $n = 1$, but this solution does not make sense – from the first paragraph we know that if the slower pendulum moves for three periods and the faster n periods, then n must be greater than 3. The second solution to equation 29.9 is $m = 3$, $n = 5$, which meets our requirements. This means that the pendula have periods with lengths in ratio of 3 : 5.

The period of a pendulum with string length ℓ is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{29.4}$$

If we write this for our pendula with lengths ℓ_1 and ℓ_2 and know the ratio of the periods, we have

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}. \tag{29.5}$$

From the problem statement we know $\ell_1 = 10$ cm, and from equation 29.11 we express

$$\ell_2 = \ell_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \tag{29.6}$$

which for the ratio $T_2 : T_1 = 3 : 5$ gives us the result $\ell_2 = 3{,}6$ cm.

Sformułowanie problemu mówi nam, że podczas co trzeciego przejścia wolniejszego wahadła o okresie T_1 w skrajnie prawym położeniu spotyka się ono z szybszym wahadłem o okresie T_2 (where $T_1 > T_2$). Pomiędzy tymi dwoma momentami wolniejsze wahadło wykonuje trzy okresy, a szybsze pewną liczbę n okresów, zatem

$$3T_1 = nT_2. \tag{29.7}$$

Drugą ważną informacją jest to, że między tymi momentami szybsze wahadło wykonuje pięć okresów, a wolniejsze pewną liczbę m okresów, zatem

$$mT_1 = 5T_2. \tag{29.8}$$

Nie ma żadnego znaczenia, czy wahadła spotykają się po lewej czy prawej stronie. Oba wykonują prosty ruch harmoniczny i jeśli spotkają się w ten sposób po lewej i prawej stronie, spotkają się po obu stronach po zakończeniu odpowiednio pięciu i trzech okresów. Dlatego też nie ma znaczenia, czy Dan początkowo przesunie wahadło w lewo czy w prawo.

Jeśli podzielimy równania 29.7 i 29.8, otrzymujemy

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad mn = 15. \tag{29.9}$$

Jednym z rozwiązań tego równania jest $m = 15$, $n = 1$, ale to rozwiązanie nie ma sensu – z pierwszego akapitu wiemy, że jeśli wolniejsze wahadło porusza się przez trzy okresy, a szybsze przez n okresów, to n musi być większe niż 3. Drugim rozwiązaniem równania 29.9 jest $m = 3$, $n = 5$, co spełnia nasze wymagania. Oznacza to, że wahadła mają okresy o długościach w stosunku 3 : 5.

Okres wahadła o długości nici ℓ wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{29.10}$$

Jeśli zapiszemy to dla naszego wahadła o długościach ℓ_1 i ℓ_2 i znamy stosunek okresów, mamy

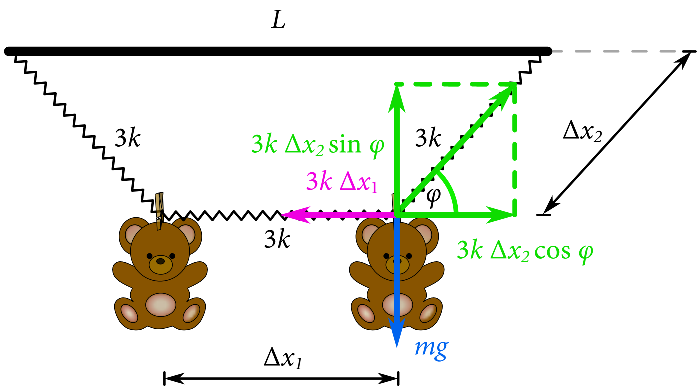
$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}. \tag{29.11}$$

Ze sformułowania problemu wiemy, że $\ell_1 = 10$ cm, a z równania 29.11 wyznaczamy

$$\ell_2 = \ell_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \tag{29.12}$$

co dla stosunku $T_2 : T_1 = 3 : 5$ daje nam wynik $\ell_2 = 3{,}6$ cm.

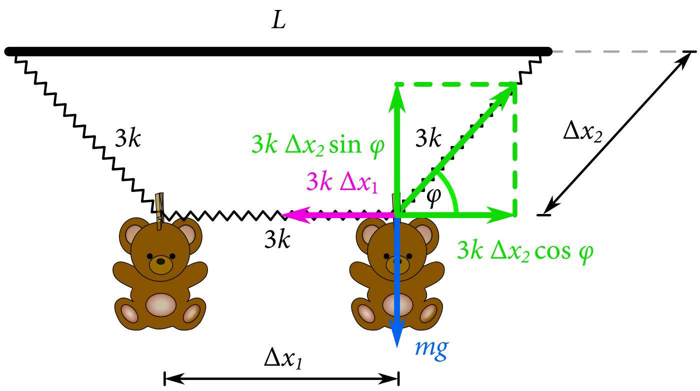
30 First, let's realize that if we have a spring with stiffness k and divide it into three equal pieces, each piece will have stiffness $3k$: if we stretch the original spring with a force F, each of its thirds will stretch by one third of the total stretch. However, the same force F acts on each third, which gives us triple stiffness.



At the point where the right plushies is hung, three forces act together. The first, gravity, has a magnitude of mg and points directly downward. The second, from the part of the spring between the plushiesh, points directly to the left and has a magnitude of $3k\,\Delta x_1$. The third generally forms an angle φ with the horizontal direction and has a magnitude of $3k\,\Delta x_2$. We can resolve the third force into a horizontal component $3k\,\Delta x_2 \cos\varphi$ and a vertical component $3k\,\Delta x_2 \sin\varphi$, where we know that the vertical component must equal mg and the horizontal one $3k\,\Delta x_1$. Notice that the distance the plushies drop is exactly $\Delta x_2 \sin\varphi$. We can express this value from the equality of vertical forces as

$$\Delta x_2 \sin\varphi = \frac{mg}{3k}. \tag{30.1}$$

Najpierw zdajmy sobie sprawę, że jeśli mamy sprężynę o sztywności k i podzielimy ją na trzy równe części, każda część będzie miała sztywność $3k$: jeśli rozciągniemy oryginalną sprężynę siłą F, każda z jej trzecich części rozciągnie się o jedną trzecią całkowitego rozciągnięcia. Jednak ta sama siła F działa na każdą trzecią część, co daje nam potrójną sztywność.



W punkcie, w którym zawieszony jest prawy pluszak, działają razem trzy siły. Pierwsza, grawitacja, ma wartość mg i jest skierowana bezpośrednio w dół. Druga, z części sprężyny między pluszakiem, jest skierowana bezpośrednio w lewo i ma wartość $3k\,\Delta x_1$. Trzecia tworzy kąt φ z kierunkiem poziomym i ma wartość $3k\,\Delta x_2$. Możemy rozłożyć trzecią siłę na składową poziomą $3k\,\Delta x_2 \cos\varphi$ i składową pionową $3k\,\Delta x_2 \sin\varphi$, gdzie wiemy, że składowa pionowa musi być równa mg, a składowa pozioma $3k\,\Delta x_1$. Zauważ, że odległość, na jaką spadają pluszaki, wynosi dokładnie $\Delta x_2 \sin\varphi$. Możemy wyrazić tę wartość z równości sił pionowych jako

$$\Delta x_2 \sin\varphi = \frac{mg}{3k}. \tag{30.2}$$

31 As we have already shown in the sample solution of the task 16, the height of the triangle is $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, the radius of the circle is $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, and its centre is identical with the centroid of the triangle.

First, we will determine that if we connected a voltage source to the points between which we measure the resistance, no current will flow through the height of the triangle (the base rod). If we connected the voltage source in reverse, the current should flow in the opposite direction. However, we find that the configuration looks exactly the same as before, so the currents must flow the same way. This means that $I = -I$, which is only valid for $I = 0$.

By similar reasoning, we can determine that no current will flow between the circle and the triangle at their bottom point of contact. Since no current will flow through this node, we can disconnect it and simplify the scheme even further. After redrawing, we obtain the scheme shown in figure [@-fig:deathly-hallow-2:sol].

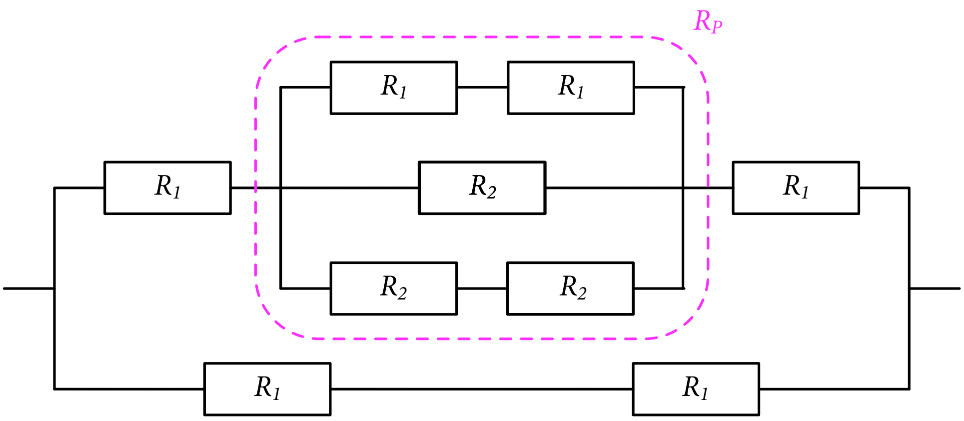


Figura 31.1: *Redrawing of the resistance network in Sarah's pendant*

We used the notation $R_1 = \frac{\lambda a}{2}$ for the resistance of half the side of the triangle and $R_2 = \frac{a\pi\lambda}{3\sqrt{3}}$ for the resistance of one-third of the circle. This is just a series-parallel connection of resistors, whose equivalent resistance we can calculate according to the known rules:

- the resistance of series-connected resistors is the sum of their resistances;
- the reciprocal value of the resistance of parallel-connected resistors is the sum of the reciprocals of their resistances.

If we denote the resistance of the trio of parallel branches as R_P, the following must be true:

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2} = \frac{3R_1 + R_2}{2R_1 R_2} \quad \Rightarrow \quad R_P = \frac{2R_1 R_2}{3R_1 + R_2}. \tag{31.1}$$

Subsequently, for the total resistance of the pendant we know that

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1 + \frac{2R_1R_2}{3R_1+R_2}} = \frac{6R_1 + 3R_2}{2R_1(3R_1 + 2R_2)} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2}{3}\frac{3R_1 + 2R_2}{2R_1 + R_2}R_1 = \frac{\lambda a}{6}\frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \doteq 0{,}563\lambda a. \tag{31.2}$$

$\boxed{32}$ When the gravitational force from the Sun disappears, the Earth will continue moving in a straight line at constant speed, equal to its original orbital speed. The trajectory will be tangent to the original orbit. If the gravity is turned off for long enough, it will certainly move too far to be captured by the Sun again. Between these extremes it will remain in a newer, more eccentric orbit.

The two different fates are separated by a critical situation in which the total mechanical energy after turning the gravity on again is zero. Since without gravity there is no potential energy here, the kinetic energy will remain constant too. Therefore we only need to find the time needed to get to a point where the kinetic and potential energy (after turning the gravity on again) sum to zero:

$$T + U(r) = 0. \tag{32.1}$$

The potential energy in a central gravitational field is

$$U(r) = -\frac{GM_\odot m_♁}{r}, \tag{32.2}$$

while the kinetic energy $T = \frac{m_♁ v^2}{2}$ remains constant. For a known radius of the orbit d we can express v from the identity of gravitational and centripetal force,

$$\frac{v^2}{d} = \frac{GM_\odot}{d^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_\odot}{d}. \tag{32.3}$$

After plugging equations 32.2, 32.3 into equation 32.1 and dividing by the mass of the Earth $m_♁$ we get

$$\begin{aligned} \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{v^2}{2}, \\ \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{GM_\odot}{2d} \quad \Rightarrow \quad r = 2d. \end{aligned} \tag{32.4}$$

The Earth thus has to get at least twice as far as it was orbiting before the curse was cast. However as it is not moving radially, but tangentially at first, to find the length of its trajectory L we will use the Pythagorean theorem $L = \sqrt{(2d)^2 - d^2} = \sqrt{3}d$. Now we could express the orbital speed explicitly, however, it is easier to remember that one orbit takes exactly one year. Therefore

$$v = \frac{2\pi d}{1\,\mathrm{a}} \tag{32.5}$$

and the Dark Lord™ wil need to keep the gravity off for

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{3}d}{2\pi d} \cdot 1\,\mathrm{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\mathrm{a} \doteq 101\,\mathrm{d}, \tag{32.6}$$

or a bit more than three months.

33 Absolutely black double hotplate heated to an astronomical temperature T_0 cools down by radiation. At the equilibrium temperature, it radiates with the power supplied from the electrical grid. That is

$$P = S\sigma T_0^4, \tag{33.1}$$

where S is its area and σ is the Stefan-Boltzmann constant.

When cooling it with a liquid, some portion of this power P' is used for heating and evaporation of the liquid, which we can specifically express as

$$P = S\sigma T_1^4 + P', \tag{33.2}$$

where T_1 is the temperature of the cooled double hotplate. The liquid receives power

$$P' = S\sigma(T_0^4 - T_1^4). \tag{33.3}$$

Over time t, the liquid absorbs heat $Q = P't$, which is utilized for heating and evaporating the liquid of mass m, mass heat capacity c, and specific latent heat of vaporization l by temperature ΔT, which we can specifically write as $Q = mc\,\Delta T + ml$. In our case, $\Delta T = 80$ °C, because the liquid is heated from 20 °C to 100 °C, and then it evaporates and leaves the surface. Thus we have

$$P't = mc\,\Delta T + ml. \tag{33.4}$$

We will write m as $V\rho$ and substitute for P' from equation 33.3, to express the volumetric flow rate

$$\frac{V}{t} = \frac{S\sigma(T_0^4 - T_1^4)}{\rho(c\,\Delta T + l)}. \tag{33.5}$$

For the values from the problem, this is 0,094 ml/s.

34 To answer the question, it is necessary to find the centre of mass of the paraboloid. Choose a coordinate system as indicated in the picture. Surface of the paraboloid can be described by function $y = k\sqrt{x}$. As point $[H; R]$ belongs to the paraboloid's surface, $R = k\sqrt{H}$, from where $k = \frac{R}{\sqrt{H}}$, thus $y = \frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{x}$.

The paraboloid's centre of mass lies on the paraboloid's axis at height v. This height can be found if we divide the paraboloid into reasonably chosen pieces, and the paraboloid's centre of mass will be a weighted average of centres of masses of individual pieces. In this particular case, a reasonable choice are very thin horizontal slices. Consequently, the x coordinate of the paraboloid's centre of mass is

$$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \sigma \pi y_i^2 \cdot x_i}{M} = \frac{\sum_i \sigma \pi \frac{R^2}{H} x_i \cdot x_i}{M}. \tag{34.1}$$

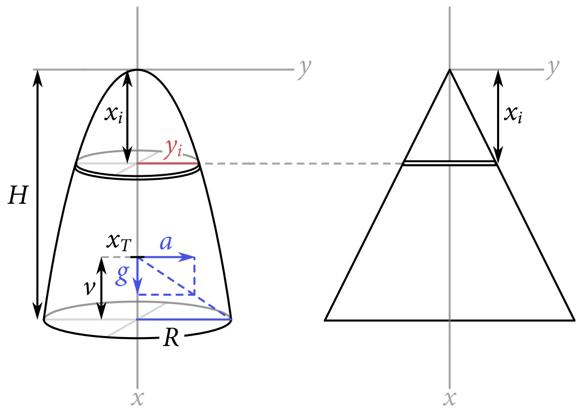


Figura 34.1: *A horizontal slice of a paraboloid and a triangle. In both cases, the mass of the slice increases linearly with the distance from the top, therefore both objects have their centre of mass at the same height.*

Notice that mass of individual pieces $m_i = \sigma \pi \frac{R^2}{H} x_i$ increases linearly with the coordinate. The same property poses also a triangle: if we cut it into slices – the length, and hence the mass of individual slices increases linearly with their distance from the apex.[5] However, we know that triangle's centre of mass lies at one third of its height, therefore the paraboloid must have the same property, hence

$$v = \frac{H}{3}. \tag{34.2}$$

Now, we only need to find a maximum admissible deceleration of the car. For this limit deceleration, the resulting acceleration (car's deceleration plus gravity) directs to the edge of the paraboloid's base. Based on the triangle similarity

$$\frac{a}{g} = \frac{R}{\frac{H}{3}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3Rg}{H}. \tag{34.3}$$

$\boxed{35}$ Let's divide the Sun into a core and an outer layer, which is ejected during dying. Because during the ejection process, forces act only in the radial direction, it cannot change the angular momentum of the core. Therefore, we are only interested in the original angular momentum of the core, which will be conserved. We will need its mass and radius for its calculation.

From the density ratio in the problem statement, we know that

$$\rho_e = \frac{\rho_c}{63}, \tag{35.1}$$

[5] This is somewhat analogous to Cavalieri's principle

where ρ_c and ρ_e are the densities of the core and the envelope, respectively.

Furthermore, if we subtract the volume of the core from the volume of the Sun, we obtain the volume of the envelope

$$V_e = \frac{m_e}{\rho_e} = \frac{m_☼}{\rho_☼} - \frac{m_c}{\rho_c}. \tag{35.2}$$

If we use that $m_c = m_e = m_☼/2$ and substitute for ρ_e from equation 35.1, we obtain the density of the core

$$\rho_j = 32\rho_☼ = 32\frac{m_☼}{V_☼} = \frac{24}{\pi}\frac{m_☼}{r_☼^3}. \tag{35.3}$$

We calculate the radius of the spherical core from its mass and density as

$$r_c = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{m_c}{\rho_c}} = \frac{r_☼}{4}. \tag{35.4}$$

Let us denote the moment of inertia of the core at the beginning as I_0 (when it has a radius of $r_☼/4$) and at the end as I. The conservation of angular momentum is expressed in the form

$$I_0\omega_0 = I\omega, \tag{35.5}$$

where $\omega_0 = 2\pi/T_0$ is the angular frequency of rotation, and $T_0 = 28$ d is the rotation period at the beginning, where $\omega = 2\pi/T$ is the final angular frequency and T is the required rotation period. By substituting and rearranging, we get

$$T = T_0\frac{I}{I_0}. \tag{35.6}$$

Thus, we only need to calculate the ratio I/I_0. The moment of inertia of a sphere with mass m and radius r is

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \tag{35.7}$$

In our case, the core collapses into a smaller sphere, and thus only its radius changes. Therefore, in the ratio I/I_0, everything cancels except for the squares of the radii, so

$$T = T_0\frac{r_{WD}^2}{r_c^2} = 16T_0\frac{r_{WD}^2}{r_☼^2}. \tag{35.8}$$

where $r_{WD} = 5000$ km is the final radius of the white dwarf. After substituting the values, we get $T \doteq 1975$ s.

36 Let us denote the solar neutrino flux $\Phi = 10^{15}/(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s})$. This is the number of neutrinos that pass through an area of 1 m^2 that is perpendicular to the line towards the Sun in 1 s. We can write

$$\Phi = \frac{\Delta N}{S\,\Delta t}, \tag{36.1}$$

where ΔN is the number of neutrinos, S is the area and Δt is the duration. Furthermore, let us denote the volume of the detector $V = 1000$ m^3 and the frequency of interactions between the neutrinos and the water

$R = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. This is equal to

$$R = \frac{\Delta N_{\mathrm{int}}}{\Delta t}, \tag{36.2}$$

where ΔN_{int} is the number of neutrinos that react with water within a time interval of length Δt.

Since the neutrinos only interact very rarely, we can assume that the flux Φ is constant throughout the entire volume of the detector. Then we can imagine a huge amount of water through which the neutrinos are flying with a constant flux Φ, but instead of assuming that after a reaction a neutrino disappears (which would decrease the flux), we will assume that it continues its journey. Every neutrino thus flies through the detector undisturbed and interacts, on average, every time is passes distance ℓ.

Now imagine, all at once, the ΔN neutrinos that fly through a certain surface with area S in time Δt – this means, that on average every neutrino interacts exactly once in a volume of $S\ell$. Now we can express the quantity $\frac{R}{V}$, which represents the number of interactions per unit of volume and time, namely

$$\frac{R}{V} = \frac{\Delta N}{S\ell\,\Delta t} = \frac{\Phi}{\ell}. \tag{36.3}$$

From there we can immediately express

$$\ell = \frac{\Phi V}{R}, \tag{36.4}$$

and find the value $\ell = 10^{18}\,\mathrm{m} \doteq 106\,\mathrm{ly}$.

37 Let's start with Yusuf. Since he compressed the piston very quickly, we can assume that the heat exchange between the gas and the environment was negligible. Therefore, it was an adiabatic process. Let us denote the pressure of the air as p_{Y} and the volume of air after compression as $V_0 = \frac{V}{16}$. From the adiabatic law, we have

$$p_{\mathrm{Y}} V_0^{\kappa} = p V^{\kappa}, \tag{37.1}$$

where $p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ is the atmospheric pressure. From this we derive

$$p_{\mathrm{Y}} = p\frac{V^{\kappa}}{V_0^{\kappa}} = 16^{\kappa} p. \tag{37.2}$$

When fired, the gas expands adiabatically back to the original volume V. We can calculate the work done by the gas during the adiabatic process and set this work equal to the kinetic energy of the piston and the projectile,

$$\frac{1}{2}(m + M)v_{\mathrm{Y}}^2 = \frac{p_{\mathrm{Y}} V_0 - pV}{\kappa - 1}, \tag{37.3}$$

where v_{Y} is the speed of Yusuf's projectile. By substituting for p_{Y} from equation 37.2 and V_0, we obtain

$$v_{\mathrm{Y}} = \sqrt{\frac{2}{m + M}\frac{pV}{\kappa - 1}\left(16^{\kappa-1} - 1\right)} \approx 185{,}2\,\mathrm{m/s}. \tag{37.4}$$

Now let's look at Kim's shot. She also compressed the piston adiabatically, but then allowed it to cool to the ambient temperature at constant volume. However, since we are not interested in this process, but only its final state, we can treat it as an isothermal compression. Thus, the pressure p_{K} after compression can be calculated as

$$p_K V_0 = pV \quad \Rightarrow \quad p_K = p\frac{V}{V_0} = 16p. \tag{37.5}$$

Here, we must realize that in this case, during the shot, the process is again very quick and thus adiabatic. Atmospheric pressure is reached in the piston before the full volume V is achieved. The projectile is thus accelerated only until it reaches some partial volume V_1, where the pressures are equal (the pressure will thus equal the atmospheric pressure p). The piston will now start to decelerate while the projectile continues on its path. From the adiabatic law, we can derive

$$p_K V_0^\kappa = pV_1^\kappa, \tag{37.6}$$

and by substituting from equation 37.5, we get

$$V_1 = \left(\frac{p_K}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} V_0 = 16^{\frac{1}{\kappa}-1} V. \tag{37.7}$$

Now we again calculate the work done by the gas as it adiabatically expands from volume V_0 to volume V_1 and set it equal to the kinetic energy of the piston and the projectile,

$$\frac{1}{2}(m+M)v_K^2 = \frac{p_K V_0 - pV_1}{\kappa - 1}. \tag{37.8}$$

By substituting $p_K V_0 = pV$ and V_1 from equation 37.7, we obtain

$$v_K = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}, \tag{37.9}$$

which gives 96,1 m/s after substitution.

The quotient of v_Y to v_K is thus

$$\frac{v_Y}{v_K} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}(16^{\kappa-1}-1)}}{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}} = \sqrt{\frac{16^{\kappa-1}-1}{1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}}},$$

which, after substituting $\kappa = 1{,}4$, results in $\frac{v_Y}{v_K} \doteq 1{,}93$.

38 Let's start by solving the geometry. If an equilateral triangle has a side length a, the inscribed circle has a radius $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, and the height of this triangle is $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

The pendant consists of an equilateral triangle with a side length a, a circle with radius r, and a segment of length v. From the problem, we know that the axis of rotation passes through the entire segment, so its moment of inertia is $I_| = 0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.

The moment of inertia of the circle is a greater challenge. We know that the moment of inertia of a body can be calculated by breaking the body into small pieces and summing the contribution of each piece to the total moment of inertia, thus $I = \sum_i m_i \rho_i^2$, where m_i is the mass of the i-th piece and ρ_i is the perpendicular distance of this piece from the axis of rotation. If the axis of rotation passes through the centre of the circle perpendicular to the plane of the circle, its moment of inertia would be

$$I_{\odot} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = mr^2. \tag{38.1}$$

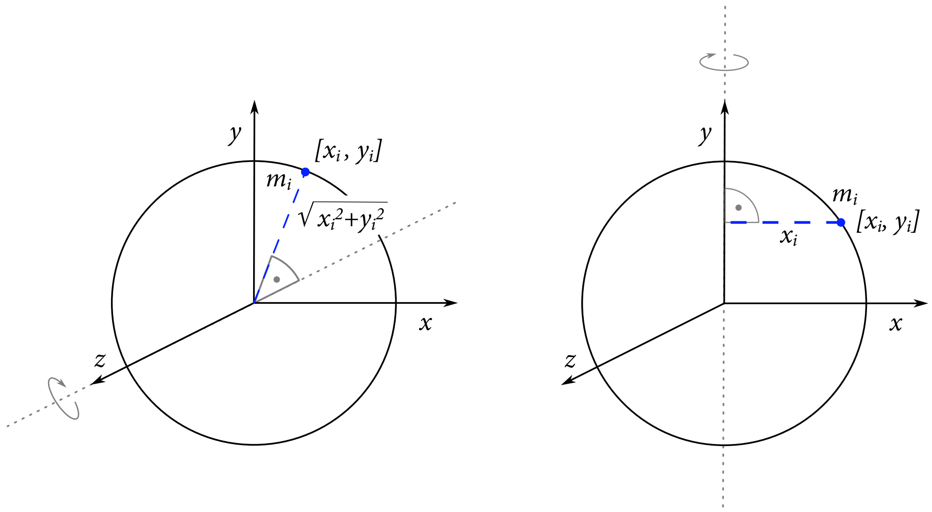


Figura 38.1: *The relationship between the moments of inertia for a circle rotating around two axes passing through its centre: axis perpendicular to its plane and an axis lying in its plane*

However, we have the axis of rotation located in the plane of the circle, thus

$$I_{\varnothing} = \sum_i m_i x_i^2. \tag{38.2}$$

When we realize that we can name the coordinates arbitrarily, obviously $2I_{\varnothing} = I_{\odot}$, which means

$$I_{\varnothing} = \frac{1}{2} mr^2. \tag{38.3}$$

The mass of the circle is $m = \lambda 2\pi r$, therefore

$$I_{\varnothing} = \lambda \pi r^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{72} \lambda a^3. \tag{38.4}$$

We still need the moment of inertia of the triangle. The moment of inertia of a rod perpendicular to the axis of rotation around its centre is $I_{-} = \frac{1}{12} m\ell^2 = \frac{1}{12}\lambda a^3$. When we realize that the moment of inertia of a point mass depends only on the perpendicular distance from the axis of rotation, in the case of a slanted rod we have to calculate the amount of mass of the rod at that distance. Here, this is very simple: mass is distributed homogeneously along their length, and so the moment of inertia of the empty triangle is the same as that of a single rod, but with three times more mass, so $I_{\triangle} = 3I_{-} = \frac{1}{4}\lambda a^3$.

Finally, we simply add the individual contributions to obtain the result

$$I = I_{|} + I_{\varnothing} + I_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3. \tag{38.5}$$

39 First of all, we must realize what we are going to calculate. Sound intensity level is a quantity which quantifies the energy per unit area and unit time carried by the sound wave. To be more precise, this is quantified by aound intensity I. Sound intensity level L is just a logarithm of ratio of sound intensity to some reference intensity I_0, and it is measured in bels, or in decibels:

$$L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{B}] = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{dB}] \tag{39.1}$$

If a sound source emits acoustic power P, sound intensity at distance r from the source is $I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$, and the corresponding intensity level is

$$L(r) = 10\log\left(\frac{P}{4\pi I_0 r^2}\right) = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.2}$$

Now we can start calculating. According to the problem statement, the intensity level equals Granny Julie's age every year. If Granny Julie celebrates L^{th} birthday this year, her age two years ago was

$$L - 2 = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.3}$$

Last year, our neighbour came to help. If the neighbour can sing with acoustic power Π, granny's age must have been

$$L - 1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.4}$$

This year, we additionally move Julie's armchair by d towards the singing congratulants, and therefore her age is

$$L = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r - d). \tag{39.5}$$

Subtracting equation 39.3 from equation 39.4 yields

$$1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(P) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1} \tag{39.6}$$

and subtracting equation 39.4 from 39.5 yields

$$1 = 20\log(r) - 20\log(r - d) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1}. \tag{39.7}$$

After substituting this into equation 39.3, we obtain

$$L = 2 + 10\log\left(\frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1}\right) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1}\right). \tag{39.8}$$

To determine Granny Julie's age, we must express the acoustic power of the invited neighbour in terms of sound intensity level which he can produce. If he can produce intensity level Λ at distance ρ, we can write

$$\Lambda = 10\log(\Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(\rho). \tag{39.9}$$

After substituting into equation 39.8, we finally obtain

$$L = 2 + \Lambda - 10\log\left(\sqrt[10]{10} - 1\right) + 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10} - 1}{\sqrt[20]{10}} \cdot \frac{\rho}{d}\right), \tag{39.10}$$

which means that, according to the provided numeric values, Granny Julie celebrates her 99$^{\text{th}}$ birthday this year. Congratulations!

40 We will start by drawing all the forces acting on the cube and cylinder.

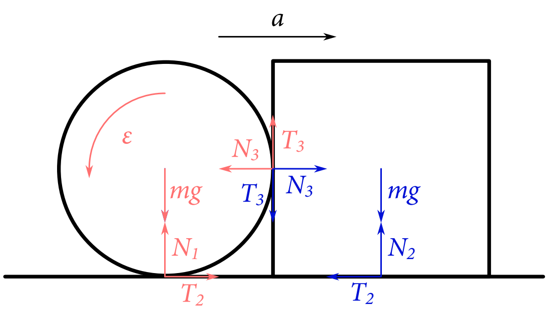


Figura 40.1: *Sketch of forces acting on the cylinder and cube*

Once we have the forces, we can write the motion equations. There will be five in total. Two for the motion of bodies in the vertical direction,

$$\begin{aligned} N_1 + f_3 N_3 &= mg, \\ N_2 - f_3 N_3 &= mg, \end{aligned} \tag{40.1}$$

two for the motion of bodies in the horizontal direction

$$\begin{aligned} ma - f_1 N_1 + N_3 &= 0, \\ ma + f_2 N_2 - N_3 &= 0, \end{aligned} \tag{40.2}$$

and one for the rotation of the cylinder

$$I\varepsilon - f_1 N_1 R - f_3 N_3 R = 0, \tag{40.3}$$

where a is the translational acceleration of the cylinder and cube. These must be equal, otherwise the cylinder would stop pushing the cube, and the fight would be over. $I = \frac{1}{2} mR^2$ is the moment of inertia of the cylinder, and ε is its angular acceleration.

By solving this gargantuan system of equations, we get

$$a = \frac{f(1-4f^2)}{2+f^2}g,$$
$$\varepsilon = \frac{4f+3f^2-4f^3}{2+f^2}\frac{2g}{R}. \tag{40.4}$$

When will the cube have the highest speed? The only force that can accelerate the whole system is the slip of the cylinder. When the cylinder stops slipping, the system will start to slow down due to the friction between the cube and the surface. The cylinder will stop slipping at time τ from the start, for which

$$a\tau - \Omega R + \varepsilon R\tau = 0, \tag{40.5}$$

which is the moment when the circumferential speed of a point on the surface of the cylinder matches its translational speed.

From there, we can express the maximum speed to which Danny is accelerated as

$$v = a\tau = a\frac{\Omega R}{\varepsilon R + a} = \Omega R\frac{1-4f^3}{9+6f-12f^2} \doteq 0{,}99\ \mathrm{m/s}, \tag{40.6}$$

which is about one meter per second.

Odpowiedzi

1 2 Wh

2 6

3 1,3 °C

4 25 920 km/h^2

5 72 l

6 3700 km

7 Thomas, by 0,505 s

8 8

9 13 mm

10 −8,4 °C

11 $\frac{3}{4}$

12 $\arcsin \frac{2s}{gt^2}$

13 $\frac{3}{2}$ A

14 $\frac{400\pi}{3}$ m ≐ 419 m

15 2 s

16 $\frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3} a \doteq 0{,}555a$

17 $L\sqrt{8\frac{M-m}{M+m}}$

18 60

19 $1{,}624 \cdot 10^{22}$ kg, *zaakceptuj wyniki w przedziale* $1{,}62 \cdot 10^{22}$ kg – $1{,}66 \cdot 10^{22}$ kg.

20 180

21 $\sqrt{2}\,\mathrm{s} \doteq 1{,}41\,\mathrm{s}$

22 1171 €, *zaakceptuj wyniki w przedziale* 1150 € – 1180 €.

23 $9\,\Omega$

24 $\frac{1}{2} - \frac{\arcsin\frac{2}{3}}{\pi} \doteq 26{,}8\,\%$

25 99,2 km, *zaakceptuj wyniki w przedziale* 99 km – 99,3 km.

26 $2\,g$

27 0 A

28 $V_{\mathrm{min}} = \frac{1}{148}\,\mathrm{l}$, $V_{\mathrm{max}} = 1\,\mathrm{l}$

29 3,6 cm

30 $\frac{mg}{3k}$

31 $\frac{a\lambda}{6}\frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{\pi + 3\sqrt{3}} \doteq 0{,}563a\lambda$

32 $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\mathrm{a} \doteq 101\,\mathrm{d} \doteq 8{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$

33 0,094 ml/s

34 $\dfrac{3Rg}{H}$

35 1975 s ≐ 33 min

36 10^{18} m ≐ 106 ly

37 1,93

38 $\dfrac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3$

39 99

40 0,99 m/s

Autorzy

Martin ‚Kvík' Baláž
Jozef Csipes
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Jakub ‚Andrej' Kliment
Katarína Nedeľková
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös

Rysunki

Katarína Nedeľková

Edytorzy

Martin ‚Kvík' Baláž