Milí čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 27. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s ktorými ste sa v tomto ročníku mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste niektorému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Táto zbierka by nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Väčšina z nás sú študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a časť z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

Fyzikálny Náboj pokračuje aj v roku 2024 vo svojej medzinárodnej tradícii. Za medzinárodnú spoluprácu ďakujeme lokálnym organizátorom: Katarína Nedeľková (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Urszula Goławska (Gdaňsk), Andrzej Karbowski (Toruň), Mirela Kaczmarek (Vroclav), José Francisco Romero García (Madrid) a Dmytro Rzhemovskyi (Viedeň).Výsledky vzájomného súboja si môžete pozrieť na našich stránkach.

FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom každého polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke `https://fks.sk/`*.*

V mene celého organizátorského tímu veríme, že ste si v roku 2024 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že sa všetci uvidíme na Náboji aj o rok! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov.

Jaroslav Valovčan
hlavný organizátor

Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke `https://physics.naboj.org/`.

Zadania

1 95 % ľudí túto úlohu nedokáže vyriešiť! Dokážete to vy?

🍌 ÷ (🍒 × 🍒) = 🍇

🍉 × (🍌 × 🍌) × 🍇 = 🍋

🍋 ÷ 🍌 = 2,7 kJ

🍋 ÷ ((🍌 × 🍌) × (🍌 × 🍌)) = 12,5 Pa

🍉 × (🍇 × (🍌 ÷ 🍒)) = 675 W

(🍉 × 🍌) ÷ (🍒 × 🍒) = 450 N

$$\frac{\dfrac{(\text{🍉}+\text{🍉})\times(\text{🍉}+\text{🍉})}{(\text{🍉}+\text{🍉})+(\text{🍉}+\text{🍉})}\;(\text{🍌}+\text{🍌})^{\frac{(\text{🍌}+\text{🍌})}{\text{🍌}}}}{((\text{🍒}+\text{🍒})\times\text{🍒})-\dfrac{\text{🍋}}{(\text{🍋}+\text{🍋})}\times\dfrac{\text{🍌}}{\text{🍇}}} = \,?\ \mathrm{Wh}$$

2 Tomáš opäť raz pozeral v telke nejaké formuly. Tentokrát také tie americké, čo zatáčajú stále len doľava. A keďže si ešte nenašetril na cestu do Ameriky, aby si ich mohol pozrieť naživo, zavolal Paťovi a Jožkovi, či by mu na miestnom kruhovom objazde nepredviedli súkromné preteky.

Chlapci prišli vo svojich autách, postavili sa vedľa seba a naraz vyštartovali. Obaja jazdili konštantnou krkolomnou rýchlosťou 18 km/h, ale Paťo jazdil vo vnútornom pruhu, čo je kružnica s obvodom 100 m, zatiaľ čo Jožko jazdil vo vonkajšom pruhu po kružnici s obvodom 120 m. Koľkokrát obíde Paťo kruhový objazd, kým prvýkrát predbehne Jožka?

Čas potrebný na rozbehnutie na krkolomnú rýchlosť zanedbajte.

3 Kvíkova svedomitá príprava na celonočné pozorovanie Perzeíd spočíva okrem iného v príprave kávy do termosky (sedem lyžičiek instantnej kávy a deväť lyžičiek cukru, netrepať, premiešať). Termoska má vnútornú nádobu v tvare valca s výškou 18 cm a polomerom podstáv 4 cm. Steny vnútornej nádoby majú hrúbku 0,5 mm a sú vyrobené z hliníka s hustotou 2,7 g/cm^3 a hmotnostnou tepelnou kapacitou 0,9 J/(g·K). Kvík vnútornú nádobu naplnil kávou s teplotou 95 °C až po okraj.

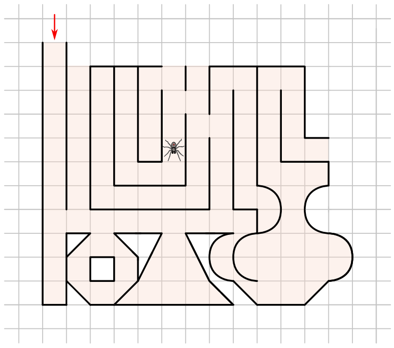
O koľko stupňov sa káva ochladila v dôsledku výmeny tepla s vnútornou nádobou? Vnútorná nádoba je od vonkajšej oddelená vákuom, a teda môžete predpokladať, že je perfektne tepelne odizolovaná. Hmotnostná tepelná kapacita kávy je rovnaká ako hmotnostná tepelná kapacita vody. Pôvodná teplota termosky bola izbových 20 °C.

4 Matúš sa konečne dočkal: jeho lietadlo sa práve rozbieha po vzletovej dráhe. Ako skúsený cestovateľ je už voči meškaniam, uvrešťaným deťom a hnusným suchým sendvičom úplne ľahostajný, ako fyzika ho však stále zaujímajú údaje o priebehu letu. Preto vytiahne mobil, ktorý mu ukáže, že lietadlo sa rozbieha s rovnomerným zrýchlením 2 m/s^2. Lenže rýchlosť lietadla sa obvykle udáva v km/h.

Aké je zrýchlenie lietadla v príbuzných jednotkách km/h^2?

5 Plyš s Kvíkom dostali ako svadobný dar sklenený výtvor od profesionálnych sklárov až z ďalekého Poltára, ktorého schému môžete vidieť na obrázku. Do daru im ale čoskoro vliezol masívny pavúk. Nevyzeral v ňom veľmi esteticky, takže po krátkej úvahe sa rozhodli ho odtiaľ vytopiť.

Koľko vody potrebujú naliať do ľavej trubice, aby bolo políčko s pavúkom celé vyplnené vodou? Jeden štvorček zodpovedá objemu 1 l a rozmery výtvoru sú dostatočne malé, aby sa vzduch pôsobením tlaku od vody stlačil **len zanedbateľne**.



6 Jaro na glóbuse odmeral, že vzdialenosť z Ria do Hongkongu je 17 700 km a vzdialenosť z Ria do Tokia je 18 600 km. Aká je najväčšia možná vzdialenosť medzi Tokiom a Hongkongom?

Zem je guľa s obvodom 40 000 km. *O skutočnej polohe spomenutých miest nepredpokladajte nič.*

7 Preborníci v Trackmanii, Tömáš a Maťko, sa pretekajú na rovnej trati dlhej 300 m. Tömášovo auto zrýchľuje s konštantným zrýchlením 8 m/s^2, Maťko má na štarte problémy so zapaľovaním a vyrazí až o sekundu neskôr, ale zato so zrýchlením až 9 m/s^2.

Kto prejde prvý cieľovou čiarou a o koľko sekúnd vyhrá?

8 Odovzdajte súčet čísel pravdivých výrokov.

1	Voda tečie hadicou so zúženým miestom. V ňom tečie voda nižšou rýchlosťou.
2	Ak v uzavretej nádobe s kvapalinou pôsobíme na hladinu silou, v každom mieste kvapaliny bude rovnaký tlak.
4	Ak teleso pláva na hladine vody, jeho hustota musí byť menšia ako hustota vody.
8	V úzkom odmernom valci je do polovice naliata ortuť. Ak valec nakloníme o 45°, tlak na dne klesne.
16	Na hladine vody v pohári s izbovou teplotou pláva kocka ľadu. Hladina v pohári bude stúpať, až kým sa kocka neroztopí.
32	Voda sa nevyparuje pri teplote výrazne nižšej než je jej bod varu.
64	Dve telesá plávajú na hladine. Teleso, ktorého vytŕčajúca časť má väčší objem, má menšiu hustotu.

Všetky spomenuté objekty sa nachádzajú v bežných pozemských podmienkach (homogénne tiažové pole, atmosférický tlak, izbová teplota, …).

9 Cez dierku v závese na okne plavárne dopadá na hladinu vody v bazéne jediný lúč slnečného svetla pod uhlom 45°. Keďže slnečné svetlo pozostáva z farebných zložiek, na dne bazéna sa objaví dúhový pásik. Aká je dĺžka tohto pásika, ak index lomu vody pre viditeľné svetlo leží v rozpätí 1,33 – 1,34 a bazén je hlboký 2 m?

Uvažujte index lomu vzduchu rovný 1.

10 Marek pred zimou zabudol do ostrekovačov svojho auta naliať nemrznúcu zmes a nechal tam nevypotrebovanú vodu. Teraz stojí zmrznutý pred autom, rozhadzuje rukami, kľaje a zisťuje, že v dvojlitrovej nádržke má 1 kg čistého ľadu.

Dolial ju doplna zimnou kvapalinou, ktorá tuhne až pri −20 °C. Pri akej najnižšej teplote bude výsledná zmes kvapalná, ak hustota zimnej kvapaliny je 800 kg/m^3 a teplota tuhnutia zmesi je jednoduchým váženým priemerom podľa hmotnosti konštituentov?

11 Adam si na jarmoku kúpil langoš a masívne jablko. Langoš samozrejme zjedol ihneď, s jablkom sa však prešiel až k neďalekej lávke ponad potok. Tam sa pozrel nadol a vo vode uvidel svoj vlastný odraz. To ho natoľko rozrušilo, až jablko pustil a to spadlo do potoka. Ukázalo sa, že hustota jablka je rovná dvom tretinám hustoty vody.

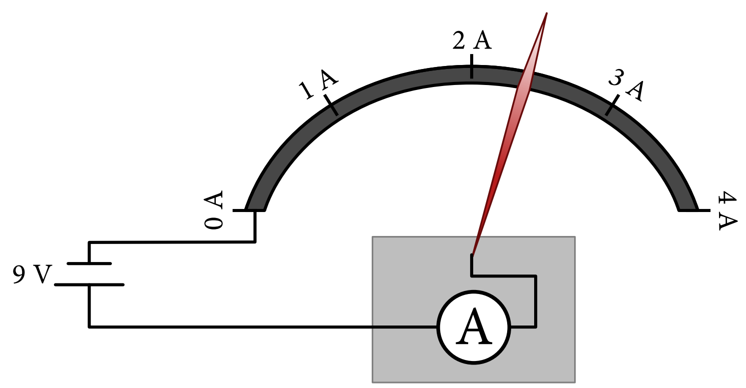
Keďže Adam má ruky stále mastné od langoša a nechce spôsobiť ekologickú katastrofu, nahol sa z lávky k vode s tým, že bude ohlodávať, čo z jablka trčí nad hladinou. Dopad jablka do vody však prilákal aj lačnú rybu, ktorá sa doň pod hladinou hneď pustila tiež.

Akú časť jablka zje Adam? Vzhľadom na značnú výhodu v počte zubov ohlodáva jablko trikrát rýchlejšie ako ryba.

12 Jaro si na Dvojkolesovačke sviští dole kopcom ako dážďovník, až kým mu do cesty nevbehne piskor. Rýchlo si uvedomí, že pri svojej aktuálnej rýchlosti by na vodorovnej rovine zabrzdil na dráhe s za čas t. Aký najmenší by musel byť sklon kopca voči vodorovnej rovine, aby Jaro nevedel zabrzdiť vôbec?

Uvažujte, že kolesá bicykla pri brzdení nepresmykujú.

13 Kubko doma hľadal multimeter, no bohužiaľ našiel len divný ampérmeter. Jeho ručička chodí po tenkom vodivom pliešku s dĺžkovým odporom 4 Ω na dielik tak, ako na obrázku. Na tento zázrak modernej elektrotechniky pripojil batériu s napätím 9 V. Aký prúd ukáže ampérmeter?



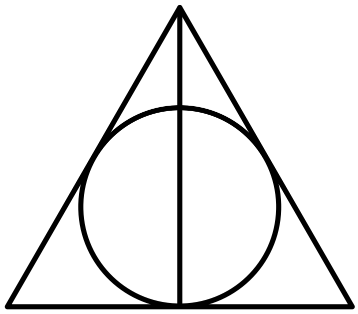
14 Patrik objavil v dedkovej skrini zvláštny čierny disk s obrázkom na papierovom obale. Skôr, než by na ňom stihol naservírovať sójový hamburger alebo ho použiť namiesto frisbee, mu dedko ukázal, že ak ho položí na gramofón, na vonkajší koniec špirálovej drážky na disku umiestni ihlu a postláča zopár tlačidiel, z reproduktorov sa okrem praskania a syčania ozve aj akási prehistorická hudba.

Syčanie a praskanie trvalo presne 20 minút. Aká je dĺžka drážky, ak vonkajší priemer disku je 30 cm a drážka končí 5 cm od jeho stredu? Záhadný disk sa na gramofóne otáčal rýchlosťou 33⅓ otáčky za minútu.

15 Skokan skáče do vody z mostíka vysokého 10 m. Odrazí sa nohami, urobí salto a dopadne do vody, pričom práve polovicu času strávi nad úrovňou mostíka. Ako dlho trvá celý skok?

16 Sára je veľkou fanúšičkou Harryho Pottera. Vytiahla zo šperkovnice prívesok Darov smrti a začala ho obdivovať. Neviditeľný plášť, kameň oživenia, bazový prútik. A keďže ani fyzika jej nie je cudzia, zamyslela sa, kde má tento prívesok ťažisko.

Prívesok geometricky pozostáva z rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky a, jemu vpísanej kružnice a jednej jeho výšky. Všetky tieto súčasti majú rovnakú dĺžkovú hustotu. Ako ďaleko sa nachádza ťažisko prívesku od vrcholu trojuholníka, do ktorého je vedená výška?



17 Andrej má nekalé balistické úmysly. Na ich realizáciu si postavil jednoduchý katapult: nehmotnú vodorovnú latu dlhú $2L$ umiestnil do výšky L od zeme a v strede ju podoprel. Na jeden jej koniec pevne priviazal kameň s hmotnosťou M a na druhom konci položil do plytkej jamky projektil s hmotnosťou $m < M$ a celé to zaistil západkou.

Projektil si spokojne hovel na late, až kým Andrej západku neuvoľnil. Lata spadla a projektil vyletel z jamky presne v okamihu, keď bola lata zvislo. Ako ďaleko projektil doletel?

18 Nová diaľnica z Bratislavy do Košíc je dlhá presne 400 kilometrov a má štyri pruhy v každom smere. V nich jazdia autá rýchlosťami 80 km/h, 100 km/h, 120 km/h a 160 km/h. Peter, Pavel a Arthur vyrazili z Košíc naraz, no každý išiel v inom pruhu, pretože každé z áut zvláda iné rýchlosti. Keď prišli do Bratislavy, chvália sa svojimi zážitkami:

Peter: „Išiel som v najrýchlejšom pruhu a cestou som predbehol 620 áut, a z toho 200 išlo v druhom najrýchlejšom pruhu!“

Pavel: „Ja som išiel rýchlosťou 120 km/h a predbehol som dokopy 220 áut!“

Arthur išiel rýchlosťou 100 km/h a nepamätá si, koľko áut predbehol. Spočítajte to za neho!

Predpokladajte, že autá vychádzajú z Košíc v každom pruhu rovnomerne a všetky prejdú celú trasu.

19 Matúš občas vymýšľa neskutočné koniny. Raz si tak z ničoho nič uvedomil, že ak

- jedna *konská dĺžka* je osem stôp;
- jedna *konská sila* je výkon, ktorý treba na dvíhanie 75 kg rýchlosťou 1 m/s;
- a *konská dávka* je 1,7 kg krmiva na 100 kg hmotnosti za deň;

tieto tri jednotky mu stačia, aby z nich vytvoril systém, v ktorom bude môcť vyjadriť ľubovoľnú mechanickú fyzikálnu veličinu. Napríklad *konské zrýchlenie* bude *konská dĺžka* vynásobená *konskou dávkou* na druhú.

Keď Matúš minule stúpil istej slečne v električke na nohu, vynadala mu, že je ťažký ako kôň. Matúšovi sa to však nezdalo: keď si vyjadril v konskom systéme jednotku hmotnosti, vyšla mu riadne veľká hodnota. Koľko to je?

20 Katka s Vladkom sa vezú na eskalátore. Eskalátor má dĺžku 120 viditeľných schodov a pohybuje sa rýchlosťou dvoch schodov za sekundu. Obaja nastúpili na najnižší schod. Katka sa pokojne vezie, zatiaľ čo Vladko zbesilo pobehuje medzi ňou a vrchom eskalátora: smerom nahor rýchlosťou dva schody za sekundu a nadol až šesť schodov za sekundu.

Koľko schodov stihne dokopy prebehnúť, než ho Katka navrchu eskalátora chytí a vyzauškuje?

21 Marcel a Sabinka letia proti sebe v nadzvukových lietadlách, každý rýchlosťou Mach 3, po dvoch rovnobežných priamkach vzdialených 1 km. Aký dlhý čas uplynie medzi ich maximálnym priblížením a okamihom, keď Sabinka začuje zvuk Marcelovho lietadla?

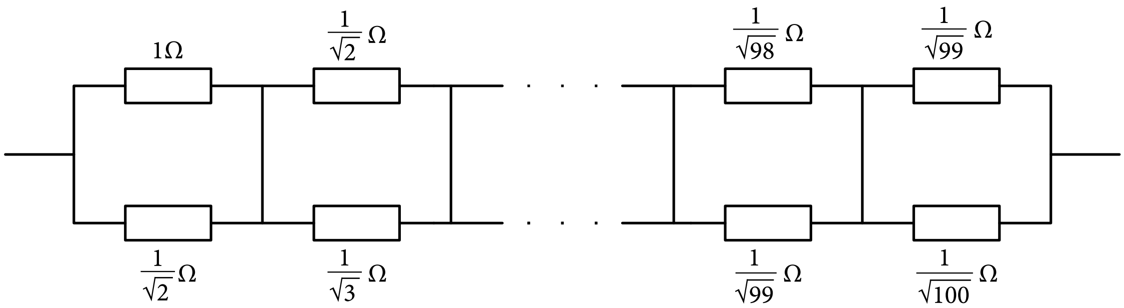
Rýchlosť zvuku je Mach 1 = 1 km *za* 3 s.

22 Marcel so Sabinkou idú na svadobnú cestu balónom. Ich rozpočet je však už teraz dosť napätý a aj keď sa Marcelovi nejak podarilo požičať si balón zadarmo, ešte stále ho potrebuje niečím naplniť. Keďže hélium je veľmi drahé, budú sa musieť uspokojiť s elektrolyticky získaným vodíkom.

Koľko ich bude stáť naplnenie balóna, ak prázdny balón aj s mladomanželmi má hmotnosť 1000 kg, mladomanželská cena elektriny je 0,2 €/kWh a celková účinnosť procesu je 50 %? Spálenie vodíka s kyslíkom vyprodukuje 285,8 kJ/mol energie.

Svadobná cesta prebieha pri štandardnom tlaku a teplote. Tlak vnútri balóna je rovný vonkajšiemu tlaku.

23 Samko našiel obrovskú škatuľu všelijakých rezistorov a dlhú cievku dokonale vodivého drôtu. Vyrobil z nich rebrík, ktorý má medzi každými dvomi priečkami na jednej strane rezistor s odporom $\frac{1}{\sqrt{n}}\ \Omega$ a na druhej rezistor s odporom $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ \Omega$ pre n od 1 až po 99.



Aký je celkový odpor medzi koncami rebríka?

$\boxed{24}$ Výšku morskej hladiny ovplyvňovanú prílivom a odlivom vo francúzskom meste Saint-Malo vieme v dňoch okolo splnu modelovať ako $A \cdot \sin(\omega t)$, kde A je amplitúda a ω je frekvencia taká, že príliv aj odliv nastávajú každých 12 hodín.

Námorníkov lode Santiano by zaujímalo, či už ráno kotva žblnkne doma u móla. Problém je, že ich loď dokáže vplávať do prístavu len vtedy, ak je hladina v prílive alebo nanajvýš o $A/3$ nižšie, a námorníci nevedia, kedy príliv nastane.

Aká je pravdepodobnosť, že kotva žblnkne doma u móla, teda že prídu v čase, kedy sa im podarí zakotviť?

$\boxed{25}$ Marcel a Krtko merajú vzdialenosti miest na Zemi rôznymi spôsobmi: Marcel ako letec uvádza vzdialenosť ako dĺžku najkratšej krivky vedúcej po povrchu planéty, zatiaľ čo Krtko ako krtko udáva vzdialenosť po priamej čiare, aj keď vedie pod povrchom.

Keď merali vzdialenosť medzi Zvolenom a Plaveckým Štvrtkom, vyšiel im rozdiel dĺžok presne 1 m. Akú vzdialenosť nameral Marcel?

Zem je dokonalá guľa s polomerom 6371 km.

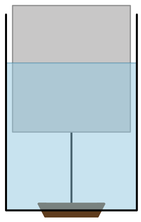
$\boxed{26}$ Adam sa hojdá na hojdačke zavesenej na reťaziach s dĺžkou L. V krajnej polohe, keď sa na okamih zastaví, cíti preťaženie 0,5 g. Aké preťaženie bude cítiť v najnižšej polohe?

$\boxed{27}$ Katka dostala nový kovový náhrdelník, ktorý má tvar kruhovej slučky s polomerom r a dĺžkovým odporom λ. V rámci oddychu sa išla potočiť na kolotoči na ihrisku pred domom. Sadla si do vzdialenosti R od osi rotácie a roztočila sa okolo nej na uhlovú rýchlosť ω. Vtom si všimla, že nejakí výtržníci dali pod kolotoč obrovský magnet vytvárajúci magnetické pole s indukciou B, ktoré má všade na kolotoči rovnakú veľkosť a smeruje v smere osi rotácie.

Katka sa začala obávať o svoj náhrdelník: aký prúd sa v ňom indukuje? Predpokladajte, že Katka je od strachu celá stuhnutá a drží sa na jednom mieste. Sedí v takej polohe, že náhrdelník zviera s vodorovnou rovinou uhol 30°.

$\boxed{28}$ Lucka definitívne sekla so záhradníčením a rozpredáva vybavenie pred garážou. Na predaj je napríklad odmerka z dostatočne vysokej valcovej nádoby s plochou podstavy S, ktorá má uprostred dna kruhový otvor siahajúci do polovice jeho polomeru prekrytý nehmotnou zátkou. Vo vnútri nádoby sa nachádza menší valec s hustotou 500 kg/m^3, plochou podstavy 0,99S a výškou H, ktorý je prichytený k zátke na dne lankom. Po napustení istého kritického množstva vody vnútorný valec fungujúci ako bójka zátku zo dna vytiahne, takže nie je možné do nádobky napustiť viac vody.

Aký najmenší a aký najväčší objem vody dokáže Lucka takouto odmerkou dávkovať, ak si vie nastaviť ľubovolnú dĺžku lanka? Objem vnútorného valca je 1 l.



29 „Hromy-blesky!!!“ …bastličovi Danovi sa zjavne niekto zase pokúšal v kancelárii upratať. Dva poháre s paradajkovým pretlakom sú rozbité a navyše mu zmizla vŕtačka…

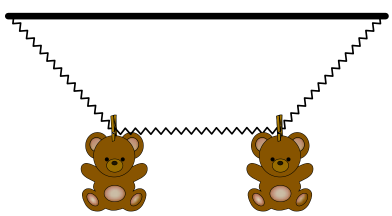
Našťastie Danove cenné kyvadielka upratovanie prežili nepoškodené. Keď ich naraz vychýli z rovnovážnej polohy, ich pohyb má nasledujúce vlastnosti:

- práve pri každom treťom prechode pomalšieho kyvadielka (toho s dlhšou periódou) krajnou polohou vpravo sa tam stretne s rýchlejším kyvadielkom;
- a práve pri každom piatom prechode rýchlejšieho kyvadielka krajnou polohou vľavo sa tam stretne s pomalším kyvadielkom.

Dlhšie z kyvadielok má záves dlhý 10 cm. Aký dlhý záves má kratšie kyvadielko?

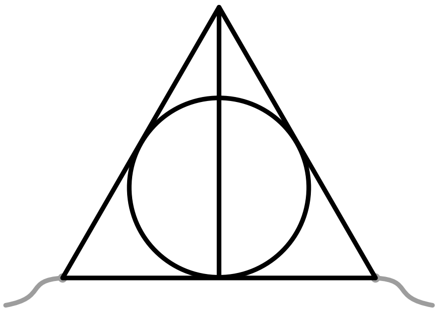
30 Pĺyš potrebovala usušiť dva čerstvo vypraté plyšáky, oba s hmotnosťou m. Pri prvom pokuse zavesiť ich sa jej ale podarilo utrhnúť poslednú šnúru na bielizeň. Vynašla sa však a na prázdny vodorovný rám sušiaka široký L napla pružinu s nulovou pokojovou dĺžkou a tuhosťou k. Potom plyšáky zavesila do tretiny a dvoch tretín dĺžky pružiny, ktorá pod ich tiažou klesla.

O koľko nižšie bude stred pružiny oproti jej koncom?



31 Sára opäť vytiahla svoj obľúbený prívesok Darov smrti. Tentokrát ju zaujíma, aký má veľký odpor. Sárin prívesok geometricky pozostáva z rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany a, jemu vpísanej kružnice a jednej jeho výšky. Dĺžkový odpor všetkých jeho súčastí je λ.

Aký veľký je odpor medzi dvomi vrcholmi trojuholníka, ktorých sa nedotýka prútik?



32 Pán Temnôt™ po dlhom štúdiu ovládol nové kúzlo čiernej mágie: vypnutie gravitácie. Zatiaľ mu to síce ide iba na pár sekúnd a s tým až tak veľa škody nenarobí, zjavne sa však chystá na čosi omnoho väčšie.

Chcel by sa vás opýtať – samozrejme len čisto akademicky a pre kamaráta – na aspoň ako dlho by musel vypnúť gravitáciu Slnka, aby Zem odletela do nekonečna?

33 Nina si na varenie kapustnice požičala starú dvojplatničku. Navzdory všeobecnému očakávaniu dvojplatnička hriala až veľmi dobre, takže po zapojení do elektriny sa zahriala na astronomických 250 °C. Pri takejto teplote jej však kapustnica začala pripáliť. Staručká dvojplatnička nanešťastie nemala funkčnú reguláciu teploty, a tak Nina musela improvizovať. Zobrala ostrekovač so špeciálnou chladiacou kvapalinou s teplotou 20 °C a aplikovala ju konštantným objemovým prietokom na rozžeravenú platňu dvojplatničky. Aký musel byť objemový prietok, aby teplota klesla na prijateľných 150 °C? Veľkosť povrchu varnej platne je 0,1 m^2 a vzhľadom na jej bohatú históriu ju môžete považovať za absolútne čierne teleso.

Špeciálna kvapalina má konštantnú mernú tepelnú kapacitu a hustotu naprieč širokým rozsahom teplôt, ktoré sú rovné mernej tepelnej kapacite a hustote vody pri izbovej teplote. Taktiež rovnako ako voda vrie pri teplote 100 °C *a má aj rovnaké merné skupenské teplo vyparovania.*

34 Kubko vezie v aute vzácny náklad – svadobnú tortu v tvare rotačného paraboloidu s výškou H a s polomerom podstavy R. Musí preto šoférovať extrémne opatrne. V momente, keď prichádza ku križovatke, mu na semafore naskočí červená a Kubko musí dupnúť na brzdu. S akým najväčším spomalením môže brzdiť, aby sa torta neprevrhla?

Efekty spôsobené ryvom neuvažujte.

35 Po dlhom a žiarivom živote naše Slnko zomrie. Proces zomierania vyzerá tak, že zo svojho povrchu odhodí vrstvu hmoty do voľného priestoru za pôsobenia radiálnych síl.

Uvažujte, že Slnko je guľa s rotačnou periódou 28 dní pozostávajúca z homogénneho jadra a taktiež homogénnej vonkajšej obálky. Pomer hmotností jadra a obálky je 1 : 1 a pomer ich hustôt je 63 : 1. Slnko pri zomieraní odhodí celú svoju obálku a jadro skolabuje do bieleho trpaslíka – homogénnej gule s polomerom 5000 km.

Aká bude rotačná perióda vzniknuvšieho bieleho trpaslíka?

36 Tok slnečných neutrín cez Zem dosahuje asi $10^{15}\ \mathrm{m^{-2} \cdot s^{-1}}$. Dušan postavil obrovský detektor v tvare kocky s objemom 1000 $\mathrm{m^3}$, naplnil ho vodou a zistil, že sa mu v ňom v priemere zachytí jedno neutríno každú sekundu.

Aká je stredná voľná dráha neutrína vo vode?

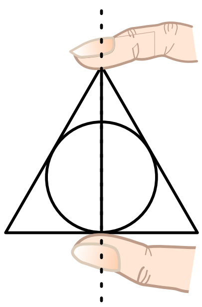
37 FKSáci sa po tohtoročnej olympiáde dali na výrobu vzduchových pištolí. Vystreľovací mechanizmus navrhli tak, že valec s objemom $V = 100\ \mathrm{cm^3}$ naplnený vzduchom s atmosférickým tlakom je uzavretý piestom s hmotnosťou $M = 1$ g. Pred výstrelom sa vystreľovací mechanizmus stlačí na objem $\frac{V}{16}$. Následne sa predeň umiestni náboj s hmotnosťou $m = 2$ g. Stlačením spúšte sa piest uvoľní a vzduch expanduje.

Na testovanie si najali dvoch strelcov, Yusufa a Kim. Yusuf prišiel poriadne nažhavený, pištoľ nabil, vystrelil a bolo hotovo. FKSáci si ani nestihli všimnúť, kedy zamieril. Keď prišla druhá testerka, Kim, mali času na rozdávanie. Medzi nabitím a vystrelením si najskôr s chladnou hlavou nastavila klapku na ľavom oku, aby terč videla len pravým. Následne si ešte pred pravé umiestnila clonu s malým otvorom, takže na terč videla naozaj ostro. Kým sa pripravila, vzduch v pieste úplne vychladol. FKSákov teraz zaujíma, aký bol podiel rýchlostí Yusufovho a Kiminho vystreleného náboja.

Práca vykonaná plynom pri adiabatickom deji je $W = \frac{p_0 V_0 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$, *kde index* 0 *reprezentuje počiatočný stav a* 1 *konečný. Uvažujte, že vzduch je ideálny dvojatómový plyn s* $\kappa = 1{,}4$.

38 Sára aj do tretice vzala svoj prívesok Darov smrti. Uchopila ho medzi palec a ukazovák tak, že bazový prútik ležal na spojnici týchto dvoch prstov, a roztočila ho. Aký veľký je moment zotrvačnosti prívesku okolo tejto osi?

Sárin prívesok geometricky pozostáva z rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky a, jemu vpísanej kružnice a jednej jeho výšky. Dĺžková hustota všetkých jeho súčastí je λ.

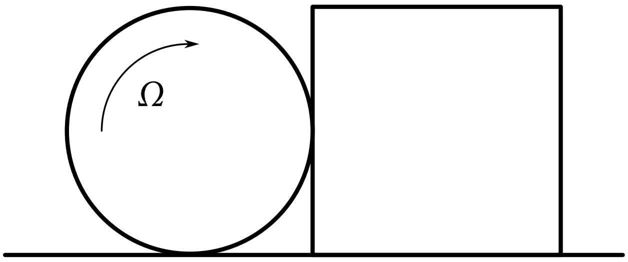


39 Babičke Justíne treba každé narodeniny spievať živió. Každý rok ho chce počuť s takou hladinou intenzity zvuku (meranej v decibeloch), koľko má rokov, takže sme sa museli usilovať stále viac a viac. Minulý rok sme už nevládali spievať dostatočne nahlas a museli sme si na pomoc prizvať hlučného suseda, ktorý je schopný vyvinúť hladinu intenzity zvuku 100 dB na vzdialenosť 1 m.

Tento rok sme usúdili, že už ani pomoc suseda stačiť nebude, a tak sme presunuli kreslo babičky Justíny o 30 cm bližšie ku spievajúcemu príbuzenstvu. Koľké narodeniny oslavuje tento rok babička Justína?

40 Kocka Dušan a valec Jaro sa opäť raz nezhodli a pustili sa do seba. Bez pästí a nôh ich súboj prebieha nasledovne: valec Jaro sa roztočí na uhlovú rýchlosť $\Omega = 23\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ a ľahne si hneď vedľa kocky Dušana tak, aby sa pohyboval smerom k nemu. Kockatý Dušan je v tomto súboji pomerne pasívny, no zaujíma ho, na akú najväčšiu rýchlosť ho Jaro urýchli.

Koeficient trenia Dušana o podložku a Dušana o Jara je $f = 0{,}2$ a koeficient trenia Jara o podložku je dvakrát väčší. Jaro aj Dušan sú už na prvý pohľad plní, homogénni a obaja úplne *asimetrickí* – všetky ich rozmery (výška, šírka a priemer) sú asi meter a každý váži asi metrák.



Vzorové riešenia

1 Budeme veriť, že ste prešli skrytým IQ testom a pri riešení nekreslili ovocie, ale označili si každé ovocie jedným písmenom, napríklad B – banán, C – citrón, H – hrozno, M – melón a V – višňa. Ozrutnú rovnicu, ktorej riešenie nás zaujíma, vieme po jednoduchých úpravách prepísať na

$$\frac{M(2B)^2}{2V^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{H}} = \text{? Wh.} \tag{1.1}$$

Vďaka rovnici $\frac{B}{V^2} = H$ vieme menovateľ upraviť. Následne vynásobíme ešte jednotkou v tvare $\frac{BC}{BC}$, čím dostávame

$$\frac{M(2B)^2}{2V^2 - \frac{1}{2}\frac{B}{H}} = \frac{4MB^2}{\frac{3B}{2H}} = \frac{8}{3}MBH = \frac{8}{3}\frac{C}{B}\frac{MB^2H}{C}. \tag{1.2}$$

Môžeme si všimnúť, že posledný zlomok je podľa jednej z rovníc rovný 1 a podľa ďalšej rovnice $\frac{C}{B} = 2{,}7$ kJ. To znamená, že ozrutný zlomok je rovný 7,2 kJ. Keď to chceme premeniť na Wh, stačí si uvedomiť, že 1 Wh = 3600 J. Teraz už vieme premeniť náš výsledok do požadovaných jednotiek a dostávame 2 Wh.

Pevne veríme, že od dnešného dňa už nebudete nadávať na písmenká v rovniciach.

2 Obaja pretekári jazdia rovnakou konštantnou rýchlosťou, a teda v každom čase majú prejdenú rovnakú vzdialenosť. Ak Paťo prešiel n okruhov, prešiel vzdialenosť $n \cdot 100$ m. Chceme, aby Jožko prešiel o kolo menej, a preto v tom istom momente mal prejdenú vzdialenosť $(n-1) \cdot 120$ m. Z rovnosti týchto vzdialeností máme rovnicu

$$n \cdot 100\ \text{m} = (n-1) \cdot 120\ \text{m}, \tag{2.1}$$

odkiaľ vyjadríme $n = 6$.

3 Čo sa s Kvíkovou kávou stane? Začne odovzdávať teplo hliníkovej nádobe, ktorá sa tým začne zohrievať. Výmena tepla prestane, keď káva bude mať rovnakú teplotu ako nádoba, pričom teplo odovzdané kávou sa rovná teplu prijatému nádobou.

Objem vnútornej nádoby je

$$V = \pi r^2 h \doteq 905\ \text{ml}, \tag{3.1}$$

kde r je polomer podstavy a h je výška valcovej nádoby. Káva s hustotou vody v nádobe má teda hmotnosť $m_k = V\rho_{H_2O} \doteq 905$ g, pričom má hmotnostnú tepelnú kapacitu c_{H_2O}, a jej teplota klesla z T_k na nejakú teplotu T.

Potom tu máme hliníkovú nádobu – valec, ktorého hmotnosť je

$$m_{Al} = (2\pi r^2 + 2\pi rh)\,\Delta h \rho_{Al} \doteq 75\ \text{g}, \tag{3.2}$$

kde Δh je hrúbka steny a ρ_{Al} je hustota hliníka. Vnútorná nádoba s hmotnostnou tepelnou kapacitou c_{Al} sa zohriala z pôvodnej T_{Al} na nejakú T, rovnakú ako káva. Kalorimetrická rovnica teda je

$$m_k c_{\mathrm{H_2O}}(T_k - T) = m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}(T - T_{\mathrm{Al}}), \tag{3.3}$$

odkiaľ ľahko vyjadríme novú teplotu kávy

$$T = \frac{m_k c_{\mathrm{H_2O}} T_k + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}} T_{\mathrm{Al}}}{m_k c_{\mathrm{H_2O}} + m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}}}. \tag{3.4}$$

Káva sa teda ochladila o $T_k - T \doteq 1{,}3\ ^\circ\mathrm{C}$.

$\boxed{4}$ Ak chceme premieňať jednotky, napríklad z metrov na kilometre, spravíme to tak, že hodnotu vynásobíme vhodnou jednotkou v tvare

$$1 = \frac{1 \text{ nová jednotka}}{x \text{ starých jednotiek}}. \tag{4.1}$$

Napríklad 563 m premeníme na kilometre tak, že si napíšeme

$$563\ \mathrm{m} = 563\ \mathrm{m} \cdot \underbrace{\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}}_{1} = \frac{563}{1000}\ \mathrm{km} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} = 0{,}563\ \mathrm{km}. \tag{4.2}$$

Rovnakým spôsobom postupujeme aj pri premene $\mathrm{m/s^2}$ na $\mathrm{km/h^2}$. Keďže $1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$, vhodné jednotky na násobenie sú $\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}$ a $\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}$.

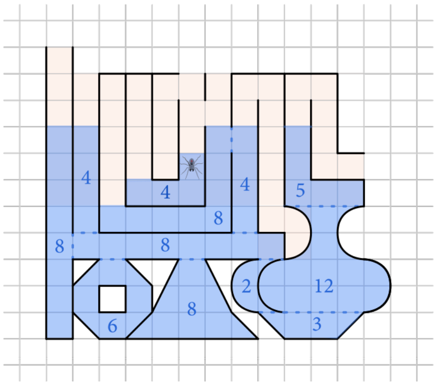
Celý výpočet by teda vyzeral takto:

$$2\ \mathrm{m/s^2} = 2\ \mathrm{m/s^2} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3600^2}{1000} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{s^2}}}{\cancel{\mathrm{s^2}}} \cdot \mathrm{km/h^2} = 25\,920\ \mathrm{km/h^2}. \tag{4.3}$$

$\boxed{5}$ Pri tom, ako voda nateká do podivuhodného skleneného výrobku, dodržiava isté pravidlá:

1. Vždy, ak môže natiecť niekam nižšie, kde ešte voda nie je, natečie tam.
2. Preto sa voľná hladina všade drží v rovnakej výške, ak jej v tom niečo nebráni.
3. Na začiatku je všade vzduch, takže ak má niekam voda natiecť, musí tam byť otvor, ktorým vzduch ujde. Ak tam otvor nie je, vzduch ďalšej vode zabráni natiecť.

Postupne, keď budeme dolievať vodu a riadiť sa týmito pravidlami, dospejeme k zaplneniu ako na obrázku 5.1.



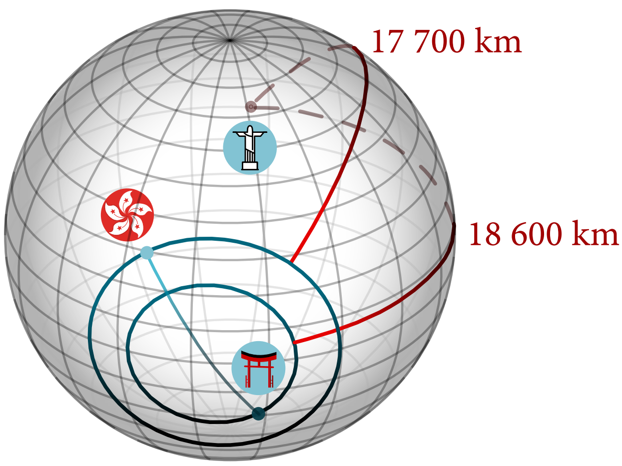
Obrázok 5.1: *Náčrt, ako sa voda rozmiestni po nádobe*

Ostáva nám už len zrátať objem natečenej vody. Ak si uvedomíme, že zrezané časti majú objem 1 l alebo 0,5 l a oblúkové časti sa navzájom doplnia na celé štvorčeky, objem natečenej vody jednoducho určíme ako 72 l.

6 Skúsme úlohu najprv vyriešiť v rovine. Okolo Ria nakreslíme dve kružnice s polomermi 17 700 km a 18 600 km a hľadáme na nich dvojicu bodov, ktorých vzájomná vzdialenosť je maximálna. To nastane vtedy, keď sú body vo vzájomne opačných smeroch, a teda ich vzdialenosť je daná jednoducho súčtom vzdialeností od Ria, čiže 36 300 km.

Na guľatej Zemi to vyzerá rovnako, akurát platí, že žiadne dva body nemôžu byť od seba ďalej, než je polovica jej obvodu, čiže 20 000 km – v takom prípade už totiž bude kratšia cesta viesť opačným smerom. Kratšia vzdialenosť medzi mestami je potom iba 40 000 km − 36 300 km = 3700 km.

Alebo si môžeme uvedomiť, že pre všetky body vo vzdialenosti x od Ria platí, že sú vo vzdialenosti $\pi R - x$ od antipodálneho bodu (presne na opačnej strane Zeme). Nachádzajú sa teda na kružnici s takýmto polomerom, a my potrebujeme nájsť dvojicu najvzdialenejších bodov na kružniciach so spoločným stredom a polomermi 1400 km a 2300 km, čo je opäť 3700 km.



Obrázok 6.1: *Náčrt možných miest, kde sa podľa zadania úlohy môžu nachádzať Tokio (torii) a Hongkong (kvietok). Rio (socha Krista) sa v náčrte nachádza presne na opačnej strane zemegule.*

7 Označme si dĺžku trate $L = 300$ m a Tömášovo, resp. Maťkovo zrýchlenie $a_\mathrm{T} = 8$ m/s, resp. $a_\mathrm{M} = 9$ m/s. Čas t_T, ktorý trvalo Tömášovi dôjsť do cieľa, vieme spočítať z rovnice pre rovnomerne zrýchlený pohyb

$$L = \frac{1}{2} a_\mathrm{T} t_T^2, \tag{7.1}$$

z čoho vieme hneď vyjadriť

$$t_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2L}{a_\mathrm{T}}}. \tag{7.2}$$

Analogicky vieme vypočítať aj čas t_M, ktorý trvalo Maťkovi dôjsť do cieľa ako

$$t_M = \sqrt{\frac{2L}{a_M}} \tag{7.3}$$

K tomuto času nám stačí pripočítať $\Delta t = 1$ s, a môžeme porovnať časy v ktorých do cieľa došli Tömáš a Maťko. Po dosadení zadaných hodnôt vyjde

$$(t_M + \Delta t) - t_T = 0{,}505 \text{ s}, \tag{7.4}$$

čiže do cieľa príde prvý Tömáš, a to o 0,505 s.

8 Čísla sú mocniny dvojky, takže musíme rozhodnúť o pravdivosti všetkých tvrdení.

Hadica (1)

Platí rovnica kontinuity: čo niekam natečie, musí aj vytiecť. Objemový prietok je konštantný, a teda menší prierez znamená väčšiu rýchlosť. Výrok je **nepravdivý**.

Sila pôsobiaca na hladinu uzavretej nádoby (2)

Pascalov zákon by nám mohol niečo podobné napovedať. Lenže okrem tlaku spôsobeného našou silou je tu i tiaž kvapaliny a tlak, ktorý táto spôsobuje, sa nazýva tlakom hydrostatickým – ten je však v rôznych hĺbkach rôzny, takže výrok je **nepravdivý**.

Teleso na hladine (4)

Výrok je **nepravdivý**, či už si spomenieme na ihlu plávajúcu na hladine vďaka povrchovému napätiu, alebo na plávajúcu železnú loď.

Ortuť v odmernom valci (8)

Tlak na dne valca je tlakom hydrostatickým, ktorý závisí od toho, ako hlboko je toto dno pod hladinou. Naklonením valca sa jeho vodorovný prierez zväčší a teda výška hladiny zmenší. Zmenší sa teda i hydrostatický tlak a výrok je **pravdivý**.

Plávajúca ľadová kocka (16)

Ponorená časť ľadovej kocky zaberala taký objem, ako voda s rovnakou hmotnosťou – teda keď sa kocka roztopila, zabrala novovzniknutá voda len to miesto, ktoré zaberala ľadová kocka pod hladinu. Tvrdenie je **nepravdivé**.[1]

Vyparovanie (32)

Výrok je **nepravdivý** – aj pri nižšej teplote molekuly s najvyššou energiou z povrchu kvapaliny veselo unikajú. Pri dosiahnutí teploty varu sa kvapalina odparuje z celého objemu.

Dve telesá (64)

Aj keď má polystyrén omnoho menšiu hustotu ako drevo, môžu vedľa seba plávať veľké brvno a jedna guľôčka polystyrénu – a to je v priamom rozpore s vetou žadaní, takže je **nepravdivá**.

Sčítaním čísel pravdivých výrokov dostávame odpoveď 8.

9 Ak lúč svetla dopadá na optické rozhranie, láme sa podľa Snellovho zákona. Náš lúč dopadá pod uhlom 45° a prechádza z optického prostredia s indexom lomu 1 (vzduch) do optického prostredia s indexom lomu n (voda). Preto platí

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin\alpha} = n. \tag{9.1}$$

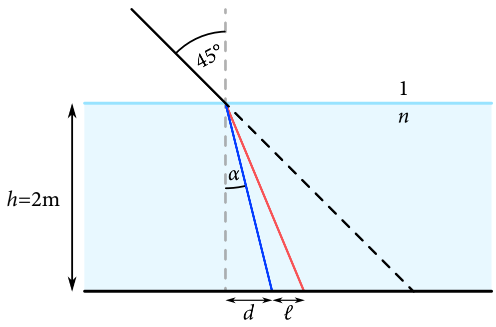
Ak nazrieme na pravouhlý trojuholník medzi lúčom, kolmicou na rozhranie v mieste dopadu (ďalej len kolmica) a dnom bazéna pomocou Pytagorovej vety, zistíme, že dráha, ktorú lúč prejde vo vode je $\sqrt{d^2+h^2}$, kde h je hĺbka bazéna a d je vzdialenosť bodu na dne, do ktorého dopadne lomený lúč od kolmice. Pre uhol α teda vieme písať

$$\sin\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}, \tag{9.2}$$

Po dosadení do predchádzajúcej rovnice a následnej úprave dostávame

$$d = \frac{h}{\sqrt{2n^2-1}}. \tag{9.3}$$

[1] Ak by niekto uvažoval, že v dôsledku roztopenia ľadu klesla teplota vody a v dôsledku teplotnej rozťažnosti aj jej objem, dospel by k záveru, že by hladina dokonca klesla.



Obrázok 9.1: *Krajné lúče dopadajúce na dno bazéna*

Jednotlivé farebné zložky svetla sa od seba líšia (okrem iného) indexom lomu. Po dopade na rozhranie sa preto každá zložka láme mierne inak. Zo zadania vieme, že index lomu vody pre jednotlivé zložky viditeľného svetla leží v nejakom rozpätí – označme krajné hodnoty n_{min} a n_{max}. Každej z nich bude zodpovedať iné d. Ich rozdiel bude zodpovedať hľadanej dĺžke svetelnej stopy na dne

$$\ell = \left| \frac{h}{\sqrt{2n_{\mathrm{min}}^2 - 1}} - \frac{h}{\sqrt{2n_{\mathrm{max}}^2 - 1}} \right|. \tag{9.4}$$

Pre hodnoty zo zadania $\ell \approx 13$ mm.

10 V nádrži je $m_{ľ} = 1$ kg ľadu s hustotou $\rho_{ľ} = 916\ \mathrm{kg/m^3}$, čiže jeho objem je $V_{ľ} = m_{ľ}/\rho_{ľ} \doteq 1{,}092$ l.

Ak celý objem nádrže označíme V, nemrznúca zmes zaberá objem $V_{\mathrm{z}} = V - V_{ľ} \doteq 0{,}908$ l, a preto je jej hmotnosť $m_{\mathrm{z}} = (V - V_{ľ})\rho_{\mathrm{z}} \doteq 0{,}727$ kg. Nová teplota tuhnutia je vážený priemer podľa hmotnosti konštituentov, teda

$$T = \frac{m_{ľ} T_{ľ} + m_{\mathrm{z}} T_{\mathrm{z}}}{m_{ľ} + m_{\mathrm{z}}}, \tag{10.1}$$

kde $T_{ľ}$, T_{z} je teplota tuhnutia vody, respektíve nemrznúcej zmesi.

Pre hodnoty zo zadania to je $T \doteq -8{,}4$ °C.

11 Nech z jablka odhryzne malý kúsok ryba alebo Adam, vztlaková sila vždy spôsobí, že sa jablko ustáli v takej novej polohe, aby bola nad hladinou opäť práve taká časť jablka ako pred odhryznutím, čiže v našom prípade jedna tretina. Preto majú obaja vždy čo hrýzť bez ohľadu na to, koľko z jablka ešte ostalo. No a keďže obaja jedia celý čas a dojedia naraz, pomer veľkostí zjedených častí je určený iba pomerom rýchlostí jedenia. Odpoveď je teda $\frac{3}{4}$.

12 Povedzme, že Jaro ide rýchlosťou v_0. Počas brzdenia na rovine spomaľuje rovnomerne so spomalením a, čiže jeho rýchlosť $v(t)$ sa v čase mení ako

$$v(t) = v_0 - at. \tag{12.1}$$

Vidíme, že $v(t) = 0$ nastane, ak čas je $t = v_0/a$, čo je čas potrebný na zastavenie. Prejdená dráha je potom

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2, \tag{12.2}$$

čo znamená, že za čas $t = v_0/a$, teda pred zastavením na rovine, Jaro prešiel

$$s = \frac{1}{2}at^2, \tag{12.3}$$

odkiaľ ľahko vyjadríme, že Jaro vie brzdiť so spomalením

$$a = \frac{2s}{t^2}. \tag{12.4}$$

Z jednoduchej trigonometrie vieme, že ak Jaro ide dole kopcom po naklonenej rovine so sklonom α, je urýchľovaný zrýchlením $g\sin\alpha$. Ak je veľkosť tohto zrýchlenia rovnaká ako veľkosť Jarovho spomalenia, nikdy nezastaví, čiže sklon kopca α vyjaríme ako

$$\frac{2s}{t^2} = g\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{2s}{gt^2}. \tag{12.5}$$

13 Aj keď je obvod podivuhodný, Ohmov zákon musí platiť. V tomto prípade však elektrický odpor v obvode závisí od toho, aký prúd ukáže ampérmeter. Konkrétne ak ampérmeter ukáže prúd k ampérov, má odpor $4k\ \Omega$. Z Ohmovho zákona $U = RI$ dostávame

$$9\ \mathrm{V} = 4k\ \Omega \cdot k\ \mathrm{A}, \tag{13.1}$$

z čoho dostávame

$$k = \frac{3}{2}. \tag{13.2}$$

Po ustálení teda ampérmeter ukáže $\frac{3}{2}$ A.

14 Keďže poznáme uhlovú rýchlosť otáčania platne[2], vieme hneď určiť, že za 20 minút vykoná $20 \cdot 33⅓ = 666⅔$ otáčok. Za túto dobu teda prejde ihla celou dĺžkou jeho drážky. Z toho vyplýva, že drážka okolo stredu disku vytvorí dokopy 666⅔ drážok. Keďže priemer disku je 30 cm a drážka končí 5 cm od jeho stredu, časť disku s drážkou je široká 15 cm − 5 cm = 10 cm, takže vzdialenosť medzi dvomi ovinmi drážky je približne

$$w \approx \frac{10\ \mathrm{cm}}{666⅔} = \frac{3}{20}\ \mathrm{mm} = 0{,}15\ \mathrm{mm}. \tag{14.1}$$

Plochu pokrytú drážkou S spočítame jednoducho ako rozdiel plochy celého disku a diery v strede,

$$S \approx \pi\left((15\ \mathrm{cm})^2 - (5\ \mathrm{cm})^2\right) = 200\pi\ \mathrm{cm}^2. \tag{14.2}$$

[2]Mlčky dúfame, že Patrikov disk bola naozaj gramofónová platňa.

Nakoniec si drážku rozvinieme do tvaru veľmi dlhého obdĺžnika. Ak poznáme plochu a šírku, druhý rozmer, čiže jej dĺžku ℓ vieme určiť ako ich podiel

$$\ell \approx \frac{S}{w} = \frac{200\pi\ \mathrm{cm}^2}{0{,}15\ \mathrm{mm}} \approx 418{,}88\ \mathrm{m} \doteq 419\ \mathrm{m}. \tag{14.3}$$

15 Rýchlosť skokana počas jeho skoku si môžeme rozložiť na vodorovnú a zvislú zložku. Vodorovná zložka nie je zaujímavá, pretože sa počas celého pohybu nemení. Stačí nám teda modelovať celú situáciu ako zvislý vrh. Počiatočnú rýchlosť skokana označme v_0. Jedinou pôsobiacou silou je konštantná tiažová a teda skokan padá so zrýchlením g, takže jeho rýchlosť bude lineárnou funkciou času.

Na začiatku mal skokan rýchlosť v_0 a v momente, keď prelietal úrovňou mostíka smerom nadol, mal rýchlosť $-v_0$. Rozdiel v týchto rýchlostiach je teda $2v_0$ a čas, ktorý skokan strávil nad úrovňou mostíka potom bude $\frac{2v_0}{g}$. Toto má byť polovica celkovej doby letu T, teda

$$T = \frac{4v_0}{g}. \tag{15.1}$$

Teraz si ešte vyjadríme počiatočnú rýchlosť v_0 v závislosti od výšky mostíka $h = 10$ m. Začnime od momentu, keď skokan prelieta úrovňou mostíka smerom nadol. Vtedy pre jeho rovnomerne zrýchlený pohyb nadol platí

$$h = v_0\frac{T}{2} + \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2. \tag{15.2}$$

Nakoniec z rovnice 15.1 vyjadríme v_0 a dosadíme do rovnice 15.2. Tým sa to zjednoduší na

$$h = \frac{gT^2}{4}, \tag{15.3}$$

z čoho jednoducho vyjadríme

$$T = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \approx 2\ \mathrm{s}. \tag{15.4}$$

16 Ako prvé si rozmyslime, ako vyzerá geometria náhrdelníka. Zvislá úsečka (bazový prútik) tvorí ťažnicu, výšku a aj os uhla rovnostranného trojuholníka (plášť neviditeľnosti). Jej dĺžku vieme z Pytagorovej vety vypočítať ako $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Keďže ide o rovnostranný trojuholník, všetky ostatné ťažnice budú zároveň aj osi uhlov. Vďaka tomu vieme, že ťažisko trojuholníka bude splývať so stredom vpísanej kružnice (kameňa vzkriesenia). Jeho polomer bude zároveň aj jedna tretina dĺžky ťažnice, t. j. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Vďaka symetrii celej úlohy vieme, že ťažisko útvaru sa bude nachádzať na úsečke. Polohu ťažiska vieme potom vypočítať ako priemer vzdialeností jednotlivých ťažísk vážených ich hmotnosťou. Stačí nám teda vypočítať vertikálnu polohu ťažiska. Za počiatok, od ktorého meriame vzdialenosť, si kvôli jednoduchosti môžeme zvoliť bod, od ktorého nás zaujíma vzdialenosť ťažiska. Keďže hmotnosť je priamo úmerná dĺžke drôtu, vzdialenosť ťažiska od vrcholu trojuholníka bude

$$x = \frac{m_\triangle x_\triangle + m_\circ x_\circ + m_| x_|}{m_\triangle + m_\circ + m_|} = \frac{3a\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\pi a}{\sqrt{3}}\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4}}{3a + \frac{\pi a}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3}a \doteq 0{,}555a. \tag{16.1}$$

17 Rýchlosť vystrelenia projektilu zistíme zo zákona zachovania energie. Na začiatku sa obe hmotné telesá nachádzajú vo výške L nad zemou a sú nehybné. Ich celková mechanická energia na začiatku E_1 sa teda skladá len z potenciálnej, ktorú si môžeme zvoliť ľubovoľnú, napríklad voči zemi

$$E_0 = MgL + mgL. \tag{17.1}$$

V čase, keď je lata zvislo, sa obe telesá hýbu rýchlosťou v, ale závažie je na zemi a projektil je vo výške $2L$, teda celková mechanická energia je

$$E_1 = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{17.2}$$

Keďže sa mechanická energia zachováva, platí $E_0 = E_1$, teda

$$MgL + mgL = mg2L + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2, \tag{17.3}$$

odkiaľ vyjadríme rýchlosť vystrelenia projektilu

$$v = \sqrt{2gL\frac{M-m}{M+m}}. \tag{17.4}$$

Táto rýchlosť má vodorovný smer.

Odteraz sa projektil hýbe po parabole, pretože v zvislom smere je urýchľovaný tiažovým zrýchlením. My chceme vedieť, aký čas t mu potrvá prejsť zvislú vzdialenosť $2L$, aby spadol na zem. Bude to jednoducho

$$\frac{1}{2}gt^2 = 2L \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{4L}{g}}. \tag{17.5}$$

Vo vodorovnom smere sa projektil hýbe konštantnou rýchlosťou v a teda za čas t prejde vzdialenosť

$$s = vt = 2\sqrt{2\frac{M-m}{M+m}}L. \tag{17.6}$$

18 Predpokladajme, že všetci vodiči vyrazili z Košíc o 10:00 – bude sa nám jednoduchšie počítať.

Označme si jednotlivé pruhy od najpomalšieho A, B, C a D a počty áut, ktoré za minútu vyrážajú z Košíc v každom z nich a, b, c a d. Najprv si vypočítame, ako dlho trvá cesta v každom z pruhov: je to postupne 5, 4, 3⅓ a 2,5 hodiny.

Arthur v pruhu B do Bratislavy dorazil o 14:00. V najpomalšom pruhu vtedy do Bratislavy akurát prichádzali autá, ktoré z Košíc vyrazili o 09:00. Arthur teda predbehol všetky autá v pruhu A, ktoré z Košíc vyrazili medzi 09:00 a 10:00, čo je spolu $60a$ áut.

Koľko áut predbehol Peter, najrýchlejší vodič? Ak dorazil do Bratislavy o 12:30, musel predbehnúť všetky autá v pruhu C, ktoré vyrazili z Košíc medzi 9:10 a 10:00, čiže $50c$ áut. Podľa zadania ale musí byť $50c = 200$.

Ak spravíme podobnú úvahu pre oboch vodičov, zistíme, že zadanie nám hovorí nasledovné informácie:

$$\begin{aligned} 50c &= 200, \\ 150a + 90b + 50c &= 620, \\ 100a + 40b &= 220. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Odtiaľ vieme poľahky vyjadriť $a = 1$, takže tým pádom $60a = 60$ a Arthur teda cestou predbehol 60 áut.

19 Dve z jednotiek, *konská dĺžka* a *konská dávka*, vieme do sústavy SI premeniť priamo, keďže ich fyzikálny rozmer je rovno meter, resp. prevrátená sekunda:

- *konská dĺžka* ζ je 8 ft $\doteq$ 2,438 m a
- *konská dávka* δ je $\frac{1{,}7\ \mathrm{kg}}{100\ \mathrm{kg}\cdot 1\ \mathrm{d}}$, čiže asi $1{,}97 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$.

Konská sila je napriek svojmu názvu jednotkou výkonu, a teda jej rozmer musí byť rovnaký, ako má watt. Keď si do definície dosadíme hodnoty, zistíme, že jedna *konská sila* ψ zodpovedá 735,5 W[3] a fyzikálny rozmer jednotky výkonu v základných jednotkách je

$$\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m/s} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3. \tag{19.1}$$

Aby sme z tohto získali konskú jednotku hmotnosti, zjavne stačí výkon predeliť druhou mocninou jednotky dĺžky a treťou mocninou jednotky prevráteného času. Teda

$$1\ \text{konská hmotnosť} = \frac{\psi}{\zeta^2 \delta^3} \doteq \frac{735{,}5\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}}{(2{,}438\ \mathrm{m})^2 \cdot (1{,}97 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1})^3} \doteq 1{,}624 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}. \tag{19.2}$$

20 Nech už Vladko behá po eskalátore akokoľvek, musia platiť dve obmedzenia:

- celkový čas jeho pobehovania musí byť rovný času, ktorý na eskalátore strávi Katka;
- nakoniec skončí pri Katke, takže celkový počet schodov prebehnutých nahor aj nadol musí byť rovnaký.

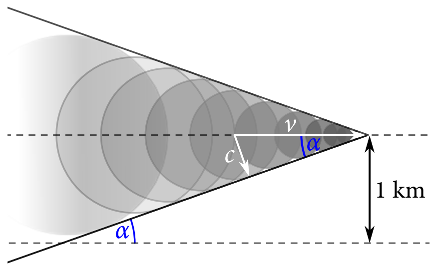
Keďže nahor beží len tretinovou rýchlosťou oproti behu nadol, pomer časov strávených behom jednotlivými smermi musí byť opačný, teda 6 : 2 = 45 : 15. To teda znamená, že zo 60 sekúnd, ktoré na eskalátore bude stáť Katka, Vladko strávi 45 s behom nahor a 15 s behom nadol.

Celková prebehnutá vzdialenosť teda bude

$$45\ \mathrm{s} \cdot 2\ \text{schody/s} + 15\ \mathrm{s} \cdot 6\ \text{schodov/s} = 180\ \text{schodov}. \tag{20.1}$$

21 Zvuk sa v každom momente šíri od lietadla všetkými smermi rýchlosťou zvuku c voči atmosfére. Keďže sa lietadlo navyše pohybuje rýchlosťou v vyššou ako c, obálka vznikajúcich zvukových vĺn (rázová vlna) má tvar kužeľa v smere letu lietadla s vrcholovým uhlom 2α, pre ktorý platí $\sin\alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{3}$. Vrchol tohto kužeľa sa teda hýbe v smere letu lietadla (spolu s lietadlom) rýchlosťou v a jeho plášť sa šíri v smere normály rýchlosťou zvuku.

[3] Alebo 750 W, ak použijeme $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



Obrázok 21.1: *Rázová vlna od Marcelovho lietadla*

Ak by Sabinka so svojím lietadlom stála na mieste, zvuková obálka od Marcelovho lietadla by sa k nej dostala, až keď by bol Marcel vo vzdialenosti

$$1\,\mathrm{km} \cdot \cot\alpha = 1\,\mathrm{km} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{km} \tag{21.1}$$

od bodu ich maximálneho priblíženia. Keďže sa ale Sabinka hýbe rýchlosťou v v opačnom smere, obaja sa stihnú dostať iba do polovičnej vzdialenosti $\sqrt{2}$ km. Túto vzdialenosť prejde Marcel za čas

$$\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/s}} = \sqrt{2}\,\mathrm{s}. \tag{21.2}$$

22 Ak prázdny balón s mladomanželmi váži M a vodík v ňom váži m_H, dokopy bude na nafúknutý balón pôsobiť gravitačná sila $(M + m_\mathrm{H})g$. Aby sa balón vznášal, musí naň pôsobiť vztlaková sila $V\rho_\mathrm{a}g$, kde V je objem balóna a ρ_a je hustota vzduchu[4]. Rovnica pre rovnosť síl je

$$(M + m_\mathrm{H})g = V\rho_\mathrm{a}g, \tag{22.1}$$

z ktorej po dosadení $V = \frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}$, kde ρ_H je hustota vodíka, dostaneme

$$M + m_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{H}}{\rho_\mathrm{H}}\rho_\mathrm{a}, \tag{22.2}$$

a odtiaľ vyjadríme hmotnosť vodíka

$$m_\mathrm{H} = \frac{M}{\frac{\rho_\mathrm{a}}{\rho_\mathrm{H}} - 1}. \tag{22.3}$$

Teraz si môžeme nájsť hustotu vodíka pri bežných podmienkach $\rho_\mathrm{H} = 0{,}09\,\mathrm{kg/m^3}$ alebo využiť znalosť, že pri štandardných podmienkach má mól ľubovoľného ideálneho plynu objem 22,4 l, čiže má molárny objem $V_\mathrm{m} = 22{,}4\,\mathrm{l/mol}$. Preto hustota vodíka je

$$\rho_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{H}}{V} = \frac{m_\mathrm{H}}{nV_\mathrm{m}} = \frac{M_\mathrm{H}}{V_\mathrm{m}}, \tag{22.4}$$

[4] Predpokladáme, že objem mladomanželov je voči tomuto objemu zanedbateľný.

kde $M_\mathrm{H} = 2$ g/mol je molárna hmotnosť molekulárneho vodíka. Rovnica 22.3 potom prejde na

$$m_\mathrm{H} = \frac{M}{\frac{\rho_\mathrm{a} V_\mathrm{m}}{M_\mathrm{H}} - 1} \doteq 73{,}7\ \mathrm{kg}, \tag{22.5}$$

a preto látkové množstvo vodíka je

$$n_\mathrm{H} = \frac{M}{\rho_\mathrm{a} V_\mathrm{m} - M_\mathrm{H}} \doteq 36{,}9\ \mathrm{kmol}. \tag{22.6}$$

Tento vodík bol vyrobený elektrolyticky. Mladomanželia ho pália, čo je proces opačný k elektrolýze. Preto ak spálením mólu vodíka získame energiu H, na jeho výrobu taktiež treba v ideálnom svete energiu H. Avšak mladomanželia v takom svete nežijú a ich elektrolýza má účinnosť η, čiže na získanie mólu vodíka treba až $\frac{H}{\eta}$ energie, a pre n_H to je energia

$$E = \frac{H}{\eta} n_\mathrm{H} = \frac{H}{\eta} \frac{M}{\rho_\mathrm{a} V_\mathrm{m} - M_\mathrm{H}}, \tag{22.7}$$

čo pre hodnoty zo zadania je približne 21 GJ alebo 5855 kWh. Pri mladomanželskej cene elektriny to stojí zhruba 1171 €.

23 Vidíme, že medzi každými dvomi článkami rebríčka máme dokonalý vodič. Rebrík teda vieme rozdeliť na sériové zapojenie 99 paralelných obvodov, ktorého celkový odpor by sme už mali vedieť algoritmicky spočítať. Odpor n-tého článku rebríka spočítame ako odpor paralelného zapojenia dvoch rezistorov,

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega \parallel \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Omega} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\,\Omega. \tag{23.1}$$

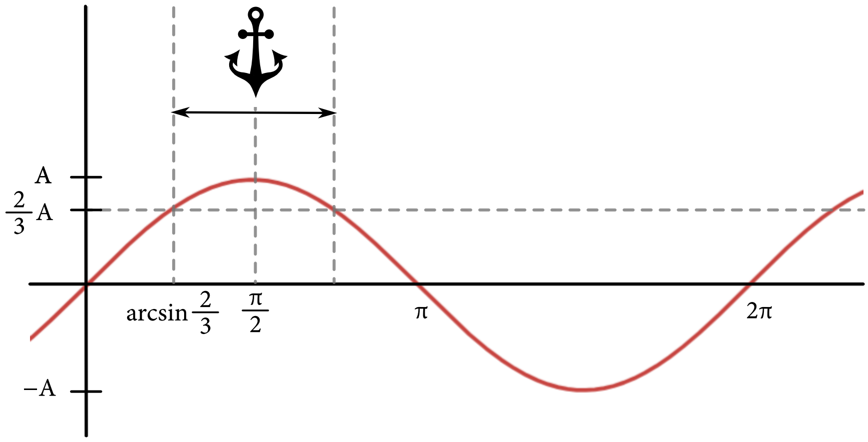
Teraz vieme zapojenie zredukovať na 99 sériovo zapojených rezistorov a ostáva nám sčítať ich odpory. To nevyzerá jednoducho… našťastie asi jediná rozumná vec, ktorú vieme spraviť, je rozšíriť každú hodnotu vhodným výrazom, aby sme eliminovali odmocniny v menovateli:

$$R = \sum_{n=1}^{99} R_n = \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right) \Omega = \sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \Omega. \tag{23.2}$$

V tomto už ľahko identifikujeme takzvaný *teleskopický rad*: okrem posledného kladného a prvého záporného polčlena sa v ňom všetko navzájom pohluší a my dostaneme výsledok

$$\sum_{n=1}^{99} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \Omega = \left(\sqrt{100} - \cancel{\sqrt{99}} + \cancel{\sqrt{99}} - \sqrt{98} + \ldots - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1} \right) \Omega = 10\ \Omega - 1\ \Omega = 9\ \Omega. \tag{23.3}$$

24 Výška morskej hladiny v čase sa bude správať ako škálovaný sínus, takže si jeden nakreslíme. Perióda bude zjavne nie 2π ale 12 h. Zadanie sa pýta, pre akú časť hodnôt argumentu funkcie (vodorovnej osi) je hodnota vyššia ako $\frac{2}{3}A$. A toto vôbec nebude závisieť od toho, či je perióda funkcie 2π alebo 12 h – pre jednoduchosť si teda nakreslime taký s periódou 2π.



Obrázok 24.1: *Priebeh výšky morskej hladiny s vyznačeným časom vhodným na zakotvenie*

Z obrázku je zrejmé, že nás bude zaujímať, v akom čase bude funkcia dosahovať hodnotu $\frac{2}{3}A$. Presne to vieme vypočítať ako $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$.

Aká časť jednej periódy dlhej 2π je medzi $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ a $\frac{\pi}{2}$? Je to

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \tag{24.1}$$

a takéto kúsky sú dva, teda celková pravdepodobnosť je

$$2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \doteq 0{,}267\,72 \doteq 26{,}8\ \%. \tag{24.2}$$

25 Postavme sa do stredu Zeme a označme si uhol medzi miestami α. Vzdialenosť, ktorú nameria Marcel, je $R\alpha$ a vzdialenosť, ktorú nameria Krtko, ľahko spočítame ako podstavu rovnoramenného trojuholníka, konkrétne

$$2R \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{25.1}$$

Tieto dve vzdialenosti sa majú líšiť o $\Delta\ell = 1\ \mathrm{m}$. Z toho dostávame rovnicu

$$R\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2} + \Delta\ell. \tag{25.2}$$

Túto rovnicu by sme chceli vyriešiť pre α. To vôbec nie je jednoduché! Ba dokonca až analyticky nemožné! Budeme sa preto musieť uspokojiť s približným riešením, napríklad numericky binárnym vyhľadávaním alebo pomocou Taylorovho rozvoja. Pre funkciu sínus platí

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots. \tag{25.3}$$

Keďže $\Delta\ell$ je malé, môžeme očakávať, že bude malé aj α, vezmeme len prvý netriviálny člen a dostaneme

$$R\alpha = R\alpha - R\frac{\alpha^3}{24} + \Delta\ell, \tag{25.4}$$

odkiaľ úpravou vyjadríme

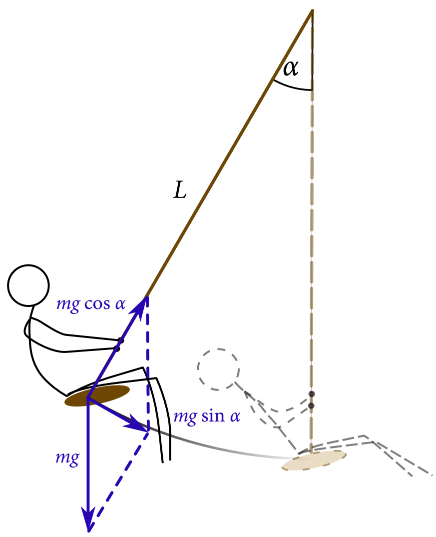
$$R\alpha = R\sqrt[3]{\frac{24\,\Delta\ell}{R}} = \sqrt[3]{24R^2\,\Delta\ell}. \tag{25.5}$$

Toto je presne hľadaná Marcelova vzdialenosť. Po dosadení vyjde 99,2 km.

26 Na Adama pôsobia vždy len dve sily: tiažová, smerujúca vždy nadol s veľkosťou mg, a ťahová od reťaze, ktorej veľkosť sa môže meniť, ale zato smeruje vždy do závesu hojdačky. Preťaženie, ktoré Adam cíti, je v každom okamihu rovné súčtu všetkých kontaktných síl, čo je v našom prípade všetko okrem tiažovej, čiže opäť len ťahová sila od reťaze. Stačí nám teda zistiť, akou silou naňho reťaz pôsobí v najnižšom bode.

V úvrate, teda v najvyššom bode pohybu, sa Adam nehýbe. Aby v tomto bode neostal visieť naveky, musí naňho pôsobiť nejaké zrýchlenie. Keďže Adam je reťazou viazaný na pohyb po časti kružnice, jeho smer je jednoznačne určený a jeho veľkosť je zatiaľ neznáma. Poznáme však preťaženie, čiže silu od reťaze, ktorá smeruje k závesu, a jej veľkosť je $m \cdot 0{,}5\,g$, a tiež tiažovú silu mg.

Keď si pôsobiace sily nakreslíme pre všeobecný uhol výchylky α, z trigonometrie zistíme, že veľkosť dostredivej sily od reťaze je v krajnej polohe $mg\cos\alpha$. Odtiaľ vieme, že v našom prípade musí byť uhol maximálnej výchylky rovný 60°, keďže $\cos 60° = 0{,}5$.



Obrázok 26.1: *Sily pôsobiace na Adama v úvrate*

Teraz vypočítame rýchlosť v najnižšom bode. Tá pochádza z premeny rozdielu potenciálnych energií v najvyššom a najnižšom bode na kinetickú energiu, a o nej vieme, že je rovná

$$\Delta U = mg(L - L\cos 60°) = mg\frac{L}{2}, \tag{26.1}$$

a teda

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL}. \tag{26.2}$$

Nakoniec spočítame ťahovú silu v reťaziach v najnižšom bode. Tá bude dvojakého pôvodu: dostredivá, ktorá spôsobuje, že sa Adam aj tam pohybuje po kružnici, s veľkosťou $\frac{mv^2}{L}$, a navyše reakcia hojdačky na stále prítomnú tiažovú silu mg. Ich súčtom je

$$F = ma = \frac{mv^2}{L} + mg = mg + mg = 2mg \tag{26.3}$$

a teda zdanlivé zrýchlenie pociťované Adamom bude spolu

$$a = \frac{2mg}{m} = 2\,g. \tag{26.4}$$

27 Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie hovorí, že indukované napätie je rovné zápornej časovej zmene magnetického indukčného toku cez slučku. Magnetický indukčný tok vypočítame ako $\Phi = BS\cos\theta$, kde B je veľkosť magnetickej indukcie, ktorá prechádza plochou S, a vstupuje do nej pod uhlom θ.

V našom prípade je S plocha, ktorej obvod tvorí náhrdelník. Ten je zrejme na Katkinom krku, a teda má tvar Katkinho krku, ktorý sa nemení. Veľkosť magnetickej indukcie B sa podľa zadania tiež nemení. A keďže sa Katka točí len okolo osi otáčania kolotoča, ani uhol θ sa nemení.

Toto všetko znamená, že magnetický indukčný tok Katkiným náhrdelníkom sa v čase nemení, a preto sa v ňom neindukuje žiadne napätie, a teda ani prúd.

28 Označme si plochu podstavy bójky S_b, jej hustotu ρ_b a jej objem V_b; ďalej plochu otvoru S_o a dĺžku lanka ℓ. Nech v kritickej situácii voda v nádobe siaha do výšky h. Vtedy je pod hladinou časť bójky vysoká $v = h - \ell$. Sily pôsobiace na bójku musia byť v rovnováhe, teda platí

$$F_G + F = F_{\mathrm{vz}}, \tag{28.1}$$

kde F_G je tiažová sila, F_{vz} je vztlaková sila a F je sila, ktorou pôsobí lanko na bójku. V kritickom prípade je sila od lanka rovná tlakovej sile, ktorou je zátka zatláčaná do otvoru,[5] t. j. $F = p_h S_o$, kde p_h je hydrostatický tlak pri dne. Po vyjadrení všetkých síl dostávame

$$S_b H \rho_b g + h\rho g S_o = S_b(h - \ell)\rho g, \tag{28.2}$$

kde ρ je hustota vody.

Najmenší objem vody, ktorý dokážeme napustiť, zrejme zodpovedá situácii, keď bójku priviažeme čo najtesnejšie ku dnu, teda $\ell \to 0$. V takom prípade dostaneme

$$h = \frac{S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}H \tag{28.3}$$

[5] Ak by bola väčšia, uvoľnilo by to zátku.

a tomu zodpovedajúci objem

$$V_{\min} = (S - S_b)h = \frac{S - S_b}{S_b - S_o}\frac{\rho_b}{\rho}V_b. \tag{28.4}$$

Najväčší možný objem vody, ktorý dokážeme odmerkou namerať, zodpovedá situácii, keď zátka povolí práve vtedy, keď voda zaleje bójku až po jej horný okraj, teda keď $h = H + \ell$. To sa stane vtedy, keď je dĺžka lanka

$$\ell = \left(\frac{S_b}{S_o}\frac{\rho - \rho_b}{\rho} - 1\right)H, \tag{28.5}$$

čomu zodpovedá objem

$$V_{\max} = S\ell + (S - S_b)H = \left[\frac{S}{S_o}\left(1 - \frac{\rho_b}{\rho}\right) - 1\right]V_b. \tag{28.6}$$

Podľa zadania $S_o = \frac{S}{4}$ a $S_b = 0{,}99S$. Pre hodnoty zo zadania dostávame minimálny objem $V_{\min} = \frac{1}{148}$ l a maximálny objem $V_{\max} = 1$ l.

29 Informácia zo zadania, že pri každom treťom prechode pomalšieho kyvadielka s periódou T_1 krajnou polohou vpravo sa tam stretne s rýchlejším s periódou T_2 (pričom $T_1 > T_2$) nám hovorí, že medzi dvomi takýmito okamihmi vykoná pomalšie kyvadlo tri periódy a rýchlejšie nejaký počet n periód, teda

$$3T_1 = nT_2. \tag{29.1}$$

Druhá informácia o stretávaní v ľavej krajnej polohe nám zase hovorí, že medzi dvomi takými okamihmi vykoná rýchlejšie kyvadlo päť periód a pomalšie nejaký počet m periód, čiže

$$mT_1 = 5T_2. \tag{29.2}$$

Vôbec nezáleží na tom, či sa v zadaní kyvadlá stretávajú vľavo alebo vpravo. Vykonávajú totiž harmonický pohyb a ak sa takto stretávajú vľavo aj vpravo, na oboch stranách sa stretnú po vykonaní piatich, respektíve troch periód. Preto ani nie je dôležité, či Dano na začiatku vychýlil kyvadlá doľava alebo doprava.

Ak vydelíme rovnice 29.1 a 29.2, dostaneme

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad mn = 15. \tag{29.3}$$

Jedným riešením tejto rovnice je $m = 15$, $n = 1$, ale toto riešenie v tejto úlohe nedáva zmysel, lebo ak sa pozrieme do prvého odseku tohto riešenia, vieme, že ak pomalšie kyvadlo spraví tri periódy a rýchlejšie n periód, musí byť $n > 3$. Druhým riešením rovnice 29.3 je $m = 3$, $n = 5$, čo spĺňa našu požiadavku. To znamená, že kyvadlá majú periódy v pomere 3 : 5.

Perióda kyvadla s dĺžkou závesu ℓ je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{29.4}$$

Ak si toto napíšeme pre naše kyvadlá so závesmi dĺžky ℓ_1 a ℓ_2 a dáme to do pomeru, máme

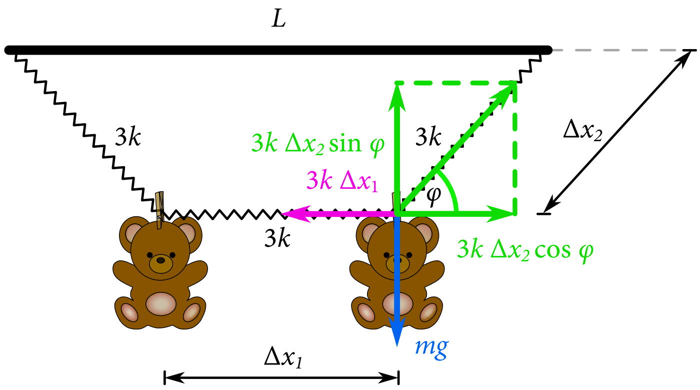
$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}. \tag{29.5}$$

Zo zadania poznáme $\ell_1 = 10$ cm a z rovnice 29.5 vyjadríme

$$\ell_2 = \ell_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \tag{29.6}$$

čo pre pomer $T_2 : T_1 = 3 : 5$ dáva výsledok $\ell_2 = 3{,}6$ cm.

30 Ako prvé si uvedomme, že ak máme pružinu tuhosti k a rozdelíme ju na tri rovnaké kúsky, každý kúsok bude mať tuhosť $3k$. Ak by sme totiž natiahli pôvodnú pružinu silou F, každá jej tretina by sa natiahla o jednu tretinu natiahnutia celej. Zároveň ale na každú tretinu pôsobí rovnaká sila F, z čoho dostávame trojnásobnú tuhosť.



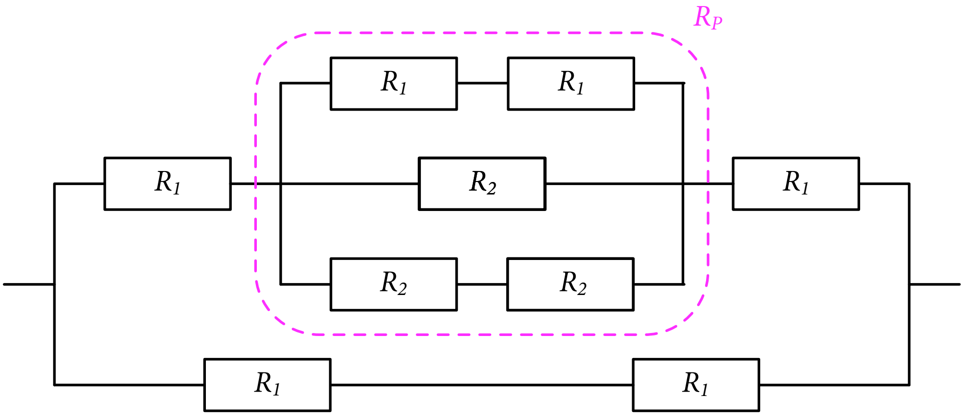
V mieste závesu každého z plyšákov pôsobia dokopy tri sily. Pozrime sa na pravý. Prvá, tiažová, má veľkosť mg a smeruje kolmo dole. Druhá, od pružiny, smeruje priamo doľava k druhému plyšáku a má veľkosť $3k\,\Delta x_1$. Tretia zviera vo všeobecnosti uhol φ s vodorovným smerom a má veľkosť $3k\,\Delta x_2$. Tretiu silu si môžeme rozdeliť na vodorovnú zložku $3k\,\Delta x_2 \cos\varphi$ a vertikálnu zložku $3k\,\Delta x_2 \sin\varphi$, pričom vieme, že sústava je nehybná a teda vertikálna musí mať velkosť mg a horizontálna $3k\,\Delta x_1$. Všimnime si, že vzdialenosť, o ktorú klesne stred pružiny, je presne $\Delta x_2 \sin\varphi$. Túto hodnotu vieme z rovnosti vertikálnych síl vyjadriť ako

$$\Delta x_2 \sin\varphi = \frac{mg}{3k}. \tag{30.1}$$

31 Ako sme už ukázali vo vzorovom riešení úlohy 16, výška trojuholníka je $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, polomer kružnice je $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ a jej stred je identický s ťažiskom trojuholníka.

Ako prvé zistíme, že ak by sme pripojili zdroj napätia na body, medzi ktorými meriame odpor, cez výšku trojuholníka (bazový prútik) nebude tiecť žiadny prúd. Ak by sme zdroj napätia pripojili opačne, mal by tadiaľ tiecť prúd opačným smerom. No zároveň zisťujeme, že zapojenie vyzerá úplne identicky ako predtým, takže prúdy musia tiecť rovnako. Platí teda $I = -I$, čo spĺňa jedine $I = 0$.

Analogickou úvahou vieme zistiť, že žiadny prúd nebude tiecť ani medzi kružnicou a trojuholníkom v ich spodnom bode dotyku. Keďže cez tento uzol nebude tiecť prúd, vieme ho rozpojiť a schému si ešte viac zjednodušiť. Po prekreslení teda dostávame schému na obrázku [@-fig:deathly-hallow-2:sol].



Obrázok 31.1: *Prekreslenie odporovej siete tvorenej Sáriným príveskom*

Použili sme označenie $R_1 = \frac{\lambda a}{2}$ pre odpor polovice strany trojuholníka a $R_2 = \frac{a\pi\lambda}{3\sqrt{3}}$ pre odpor jednej tretiny kružnice. Toto je už len sériovo-paralelné zapojenie rezistorov, ktorého výsledný odpor vieme vypočítať podľa známych pravidiel:

- odpor sériovo zapojených rezistorov je súčtom ich odporov;
- prevrátená hodnota odporu paralelne zapojených rezistorov je súčtom prevrátených hodnôt ich odporov.

Ak si odpor trojice paralelných vetiev označíme R_P, platí preň

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2} = \frac{3R_1 + R_2}{2R_1R_2} \quad \Rightarrow \quad R_P = \frac{2R_1R_2}{3R_1 + R_2}. \tag{31.1}$$

Následne pre celkový odpor prívesku platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1 + \frac{2R_1R_2}{3R_1+R_2}} = \frac{6R_1 + 3R_2}{2R_1(3R_1 + 2R_2)} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2}{3}\frac{3R_1 + 2R_2}{2R_1 + R_2}R_1 = \frac{\lambda a}{6}\frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{3\sqrt{3} + \pi} \doteq 0{,}563\lambda a. \tag{31.2}$$

$\boxed{32}$ Keď gravitačné pôsobenie od Slnka zmizne, Zem bude pokračovať po priamke rovnomernou rýchlosťou, ktorá je rovná jej pôvodnej obežnej rýchlosti a táto priamka je dotyčnicou k jej pôvodnej dráhe. Navyše by sme mali tušiť, že ak by bola gravitácia vypnutá dostatočne dlho, unikne do nekonečna. Medzi týmito krajnými prípadmi ostane obiehať po nejakej elipse.

Tieto dva osudy oddeľuje situácia, v ktorej bude celková mechanická energia (po zapnutí gravitácie) nulová. Keďže bez gravitácie tu žiadna potenciálna energia neexistuje, kinetická energia sa nemení. Stačí nám teda zistiť, za akú dobu Zem doletí na miesto, kde súčet jej kinetickej a potenciálnej energie po zapnutí gravitácie bude akurát rovný nule:

$$T + U(r) = 0. \tag{32.1}$$

Potenciálna energia Zeme v centrálnom gravitačnom poli je

$$U(r) = -\frac{GM_\odot m_♁}{r}, \tag{32.2}$$

zatiaľ čo kinetická energia Zeme $T = \frac{m_♁ v^2}{2}$ ostáva konštantná. Pre známy polomer dráhy d si veľkosť rýchlosti v vieme vyjadriť napríklad z rovnosti dostredivej a gravitačnej sily,

$$\frac{v^2}{d} = \frac{GM_\odot}{d^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_\odot}{d}. \tag{32.3}$$

Po dosadení rovníc 32.2, 32.3 do rovnice 32.1 a predelení hmotnosťou Zeme $m_♁$ teda musí platiť

$$\begin{aligned} \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{v^2}{2}, \\ \frac{GM_\odot}{r} &= \frac{GM_\odot}{2d} \qquad \Rightarrow \qquad r = 2d. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Zem teda musí doletieť do vzdialenosti od Slnka rovnej dvojnásobku polomeru jej pôvodnej dráhy. Keďže však neletí smerom od Slnka, ale po dotyčnici, dĺžku tejto dráhy musíme spočítať z Pytagorovej vety ako $L = \sqrt{(2d)^2 - d^2} = \sqrt{3}d$. Obežnú rýchlosť môžeme vypočítať explicitne, ale jednoduchšie bude si uvedomiť, že pri rovnomernom pohybe po kružnici musí jeden celý obeh trvať práve jeden rok. Platí teda

$$v = \frac{2\pi d}{1\,\mathrm{a}} \tag{32.5}$$

a Pán Temnôt™ bude musieť gravitáciu vypnúť aspoň na

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{3}d}{2\pi d} \cdot 1\,\mathrm{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\mathrm{a} \doteq 101\,\mathrm{d}, \tag{32.6}$$

čiže o trochu viac než tri mesiace.

33 Absolútne čierna dvojplatnička rozohriata na astronomickú teplotu T_0 sa chladí vyžarovaním. Pri rovnovážnej teplote vyžaruje s takým výkonom, aký je jej dodávaný z elektrickej siete. To jest

$$P = S\sigma T_0^4, \tag{33.1}$$

kde S je jej plocha a σ je Stefanova-Boltzmannova konštanta.

Keď ju chladíme kvapalinou, nejaká časť tohto výkonu P' sa použije na zohrievanie a odparovanie kvapaliny, a to konkrétne vieme zapísať ako

$$P = S\sigma T_1^4 + P', \tag{33.2}$$

kde T_1 je teplota chladenej dvojplatničky. Kvapalina teda dostáva výkon

$$P' = S\sigma\left(T_0^4 - T_1^4\right). \tag{33.3}$$

Za čas t prijme kvapalina teplo $Q = P't$, čo sa využije na zohriatie a odparenie kvapaliny hmotnosti m, hmotnostnej tepelnej kapacity c, merného skupenského tepla vyparovania l o teplotu ΔT, čo vieme konkrétne zapísať ako $Q = mc\,\Delta T + ml$. V našom prípade je $\Delta T = 80\ °\mathrm{C}$, lebo kvapalina sa zohrieva z 20 °C na 100 °C, a potom sa odparí a odíde z povrchu. Máme teda

$$P't = mc\,\Delta T + ml. \tag{33.4}$$

Už len zapíšeme m ako $V\rho$ a za P' dosadíme z rovnice 33.3, aby sme mohli vyjadriť objemový prietok

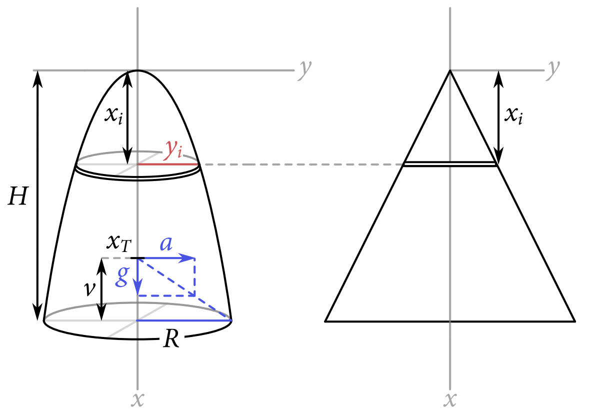
$$\frac{V}{t} = \frac{S\sigma(T_0^4 - T_1^4)}{\rho(c\,\Delta T + l)}. \tag{33.5}$$

Pre hodnoty zo zadania to je 0,094 ml/s.

$\boxed{\textbf{34}}$ Aby sme vedeli zodpovedať na otázku, potrebujeme nájsť ťažisko paraboloidu. Umiestnime ho do súradnicovej sústavy tak, ako na obrázku. Povrch paraboloidu potom možno popísať funkciou $y = k\sqrt{x}$. Keďže bod $[H; R]$ leží na povrchu paraboloidu, platí $R = k\sqrt{H}$, odkiaľ $k = \frac{R}{\sqrt{H}}$, teda $y = \frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{x}$.

Ťažisko paraboloidu leží na osi paraboloidu vo výške v. Túto výšku nájdeme tak, že si paraboloid rozdelíme na vhodne zvolené kúsky a ťažisko nájdeme ako vážený priemer ťažísk týchto kúskov. Vhodne zvolenými kúskami sú v tomto prípade veľmi tenké horizontálne plátky. Potom x-ovú súradnicu ťažiska nájdeme ako

$$x_T = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i} = \frac{\sum\limits_i \sigma\pi y_i^2 \cdot x_i}{M} = \frac{\sum\limits_i \sigma\pi \frac{R^2}{H} x_i \cdot x_i}{M}. \tag{34.1}$$



Obrázok 34.1: *Horizontálny rez paraboloidom a trojuholníkom. V oboch prípadoch hmotnosť vrstvičky rastie lineárne so vzdialenosťou od vrchola, preto obe telesá majú ťažisko v rovnakej výške.*

Všimnime si, že hmotnosť jednotlivých kúskov $m_i = \sigma\pi\frac{R^2}{H}x_i$ rastie lineárne so súradnicou. Rovnakú vlastnosť má aj trojuholník: ak ho nakrájame na prúžky – dĺžka, a teda aj hmotnosť jednotlivých prúžkov rastie lineárne s ich vzdialenosťou od vrcholu.[6] Pre trojuholník ale vieme, že jeho ťažisko leží v tretine výšky,

[6] Platí tu akási analógia Cavalieriho princípu.

preto aj paraboloid bude mať rovnakú vlastnosť, teda

$$v = \frac{H}{3}. \tag{34.2}$$

Teraz už len potrebujeme nájsť maximálne prípustné spomalenie auta. Pre to zrejme platí, že v limitnom prípade bude výsledné zrýchlenie (tiažové plus spomalenie v dôsledku brzdenia) smerovať od ťažiska do hrany podstavy paraboloidu. Z podobnosti trojuholníkov teda dostávame

$$\frac{a}{g} = \frac{R}{\frac{H}{3}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3Rg}{H}. \tag{34.3}$$

35 Slnko si rozdelíme na jadro a vonkajšiu vrstvu, ktorá je pri umieraní odhodená. Pretože pri procese odhodenia pôsobia sily len v radiálnom smere, nemôže to zmeniť moment hybnosti jadra. Preto nás zaujíma iba pôvodný moment hybnosti jadra, ktorý sa zachová. Na jeho výpočet budeme potrebovať hmotnosť a polomer jadra.

Z pomeru hustôt v zadaní vieme, že

$$\rho_{\mathrm{o}} = \frac{\rho_{\mathrm{j}}}{63}, \tag{35.1}$$

kde ρ_{j} a ρ_{o} sú hustoty jadra a obálky.

Okrem toho, ak od objemu Slnka odčítame objem jadra, dostaneme objem obálky

$$V_{\mathrm{o}} = \frac{m_{\mathrm{o}}}{\rho_{\mathrm{o}}} = \frac{m_{\odot}}{\rho_{\odot}} - \frac{m_{\mathrm{j}}}{\rho_{\mathrm{j}}}. \tag{35.2}$$

Ak využijeme, že $m_{\mathrm{j}} = m_{\mathrm{o}} = m_{\odot}/2$ a dosadíme za ρ_{o} z rovnice 35.1, dostaneme pre hustotu jadra

$$\rho_{\mathrm{j}} = 32\rho_{\odot} = 32\frac{m_{\odot}}{V_{\odot}} = \frac{24}{\pi}\frac{m_{\odot}}{r_{\odot}^3}. \tag{35.3}$$

Polomer guľového jadra z jeho hmotnosti a hustoty vypočítame ako

$$r_{\mathrm{j}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{m_{\mathrm{j}}}{\rho_{\mathrm{j}}}} = \frac{r_{\odot}}{4}. \tag{35.4}$$

Označme si moment zotrvačnosti jadra na začiatku I_0 (keď má polomer $r_{\odot}/4$) a na konci I. Zachovanie momentu hybnosti vyjadríme v tvare

$$I_0\omega_0 = I\omega, \tag{35.5}$$

kde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ je uhlová frekvencia otáčania a $T_0 = 28$ d je perióda otáčania na začiatku, pričom $\omega = 2\pi/T$ je konečná uhlová frekvencia a T je hľadaná perióda otáčania. Dosadením a úpravou dostaneme

$$T = T_0\frac{I}{I_0}. \tag{35.6}$$

Stačí nám teda vypočítať pomer I/I_0. Moment zotrvačnosti gule hmotnosti m a polomeru r je

$$I = \frac{2}{5} m r^2. \tag{35.7}$$

V našom prípade jadro skolabuje do menšej gule, a teda sa mu mení len polomer. Preto v pomere I/I_0 sa vykráti všetko okrem štvorca polomerov, teda

$$T = T_0 \frac{r_{\mathrm{WD}}^2}{r_{\mathrm{j}}^2} = 16 T_0 \frac{r_{\mathrm{WD}}^2}{r_{\odot}^2}. \tag{35.8}$$

kde $r_{\mathrm{WD}} = 5000$ km je konečný polomer bieleho trpaslíka. Po dosadení hodnôt dostaneme $T \doteq 1975$ s.

36 Tok slnečných neutrín si označme $\Phi = 10^{15}/(\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s})$. Ide o počet neutrín, ktoré preletia plochou veľkou 1 m^2 a kolmou na spojnicu so Slnkom za čas 1 s. Môžeme teda písať

$$\Phi = \frac{\Delta N}{S\,\Delta t}, \tag{36.1}$$

kde ΔN je počet neutrín, S je plocha a Δt je čas. Ešte si označme objem detektora $V = 1000\ \mathrm{m}^3$ a frekvencia interakcií medzi neutrínami a vodou $R = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Tú môžeme zapísať ako

$$R = \frac{\Delta N_{\mathrm{int}}}{\Delta t}, \tag{36.2}$$

kde ΔN_{int} je počet neutrín, ktoré za čas Δt interagujú s vodou.

Pretože neutrína interagujú s vodou veľmi slabo, môžeme predpokladať, že tok Φ je v celom objeme detektora konštantný. Preto si predstavme, že máme veľké množstvo vody, v ktorej sa šíria neutrína s konštantným tokom Φ. Avšak namiesto toho, aby sme uvažovali, že neutrína pri interakcii zaniknú (to by znížilo tok), predstavíme si, že po interakcii pokračujú ďalej. Každé neutríno teda letí vodou neporušené a vždy po prejdení strednej voľnej dráhy ℓ zinteraguje.

Teraz si predstavme, že plochou S za čas Δt preletí ΔN neutrín. Teda každé neutríno interaguje raz v objeme $S\ell$. Vyjadrime si veličinu $\frac{R}{V}$, ktorá má význam počtu interakcií na jednotku objemu a jednotku času. Teda

$$\frac{R}{V} = \frac{\Delta N}{S\ell\,\Delta t} = \frac{\Phi}{\ell}. \tag{36.3}$$

Z toho vieme hneď vypočítať

$$\ell = \frac{\Phi V}{R}, \tag{36.4}$$

čo je číselne rovné $\ell = 10^{18}$ m $\doteq 106$ ly.

37 Začnime s Yusufom. Zadanie nám zjavne chce povedať, že piest stláčal tak rýchlo, že tepelná výmena medzi plynom a okolím bola za ten čas zanedbateľná. Šlo teda o adiabatický dej. Označme p_{Y} tlak vzduchu a $V_0 = \frac{V}{16}$ objem vzduchu po stlačení. Z adiabatického zákona potom platí

$$p_{\mathrm{Y}} V_0^{\kappa} = p V^{\kappa}, \tag{37.1}$$

kde $p = 101\,325$ Pa je atmosférický tlak. Z tohto odvodíme

$$p_\mathrm{Y} = p\frac{V^\kappa}{V_0^\kappa} = 16^\kappa p. \tag{37.2}$$

Pri vystrelení plyn expanduje znova adiabaticky na pôvodný objem V. Môžeme vypočítať prácu vykonanú plynom pri adiabatickom deji a túto prácu položiť rovnú kinetickej energii piestu a projektilu,

$$\frac{1}{2}(m+M)v_\mathrm{Y}^2 = \frac{p_\mathrm{Y}V_0 - pV}{\kappa - 1}, \tag{37.3}$$

kde v_Y je rýchlosť Yusufovho projektilu. Dosadením za p_Y z rovnice 37.2 a V_0 dostaneme

$$v_\mathrm{Y} = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(16^{\kappa-1}-1\right)} \approx 185{,}2\ \mathrm{m/s}. \tag{37.4}$$

Teraz sa pozrime na Kimin výstrel. Tá piest stlačila tiež adiabaticky, ale potom ho nechala vychladnúť na teplotu okolia pri konštantnom *objeme*. Keďže nás ale nezaujíma tento *proces*, ale iba jeho konečný stav, môžeme sa na to pozrieť ako na izotermické stlačenie. Teda tlak p_K po stlačení vieme vypočítať ako

$$p_\mathrm{K}V_0 = pV \quad\Rightarrow\quad p_\mathrm{K} = p\frac{V}{V_0} = 16p. \tag{37.5}$$

Tu si ale musíme uvedomiť, že v tomto prípade sa pri adiabatickom výstrele dosiahne v pieste atmosférický tlak skôr ako pri dosiahnutí celého objemu V. Náboj je teda urýchľovaný iba do dosiahnutia nejakého čiastočného objemu V_1, kde sa tlaky vyrovnajú (tlak bude teda rovný atmosférickému tlaku p). Piest teda začne spomaľovať, projektil však poletí ďalej. Z adiabatického zákona vieme odvodiť

$$p_\mathrm{K}V_0^\kappa = pV_1^\kappa, \tag{37.6}$$

a dosadením z rovnice 37.5 dostaneme

$$V_1 = \left(\frac{p_\mathrm{K}}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} V_0 = 16^{\frac{1}{\kappa}-1}V. \tag{37.7}$$

Teraz opäť vypočítame prácu, ktorú vykoná plyn, keď adiabaticky expanduje z objemu V_0 na objem V_1, a položíme ju rovnú kinetickej energii piestu a projektilu,

$$\frac{1}{2}(m+M)v_\mathrm{K}^2 = \frac{p_\mathrm{K}V_0 - pV_1}{\kappa - 1}. \tag{37.8}$$

Dosadením $p_\mathrm{K}V_0 = pV$ a V_1 z rovnice 37.7 dostaneme

$$v_\mathrm{K} = \sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}, \tag{37.9}$$

čo po dosadení dáva 96,1 m/s.

Podiel v_Y a v_K je teda

$$\frac{v_\mathrm{Y}}{v_\mathrm{K}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(16^{\kappa-1}-1\right)}}{\sqrt{\frac{2}{m+M}\frac{pV}{\kappa-1}\left(1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)}} = \sqrt{\frac{16^{\kappa-1}-1}{1-16^{\frac{1}{\kappa}-1}}},$$

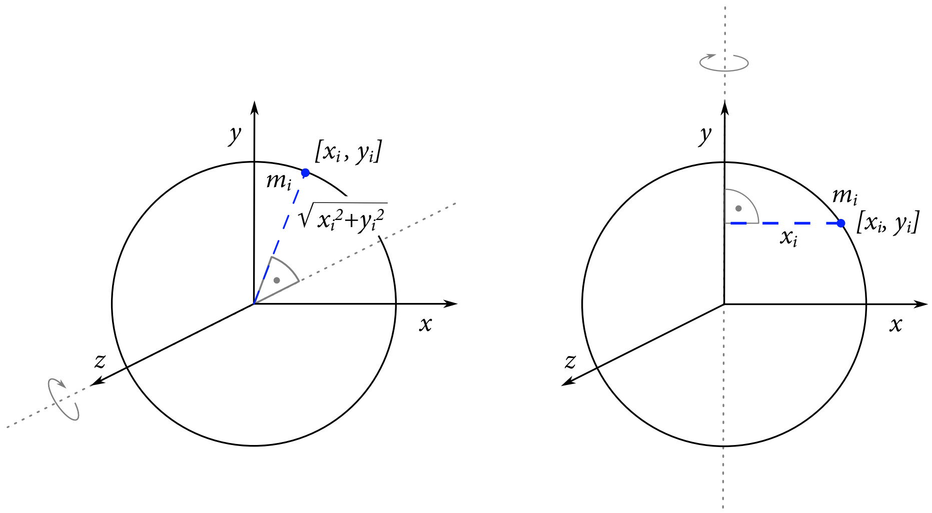
čo po dosadení $\kappa = 1{,}4$ vyjde $\frac{v_\mathrm{Y}}{v_\mathrm{K}} \doteq 1{,}93$.

$\boxed{\mathbf{38}}$ Začnime tým, že vyriešime geometriu. Ak má rovnostranný trojuholník dĺžku strany a, jemu vpísaná kružnica má polomer $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ a výška tohto trojuholníka je $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Prívesok pozostáva z rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky a, kružnice s polomerom r a úsečky dĺžky v. Zo zadania vieme, že os otáčania prechádza cez celú úsečku, takže jej moment zotrvačnosti je $I_| = 0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

Moment zotrvačnosti kružnice je väčšia výzva. Všeobecne je moment zotrvačnosti aditívna veličina a teda ho vieme vypočítať tak, že teleso rozkúskujeme na malé kúsky a sčítame príspevok každého z nich k celkovému momentu zotrvačnosti, teda $I = \sum_i m_i\rho_i^2$, kde m_i je hmotnosť i-teho kúska a ρ_i je vzdialenosť tohto kúska od osi otáčania. Ak by os otáčania prechádzala stredom kružnice kolmo na rovinu kružnice, bol by jej moment zotrvačnosti

$$I_\odot = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = mr^2. \tag{38.1}$$



Obrázok 38.1: *Vzťah medzi momentami zotrvačnosti pre kružnicu rotujúcu okolo dvoch osí prechádzajúcich jej stredom: osi kolmej na jej rovinu a osi ležiacej v jej rovine*

My však máme os otáčania ležiacu v rovine kružnice, preto

$$I_\varnothing = \sum_i m_i x_i^2. \tag{38.2}$$

Keď si uvedomíme, že túto súradnicu môžeme pomenovať ľubovoľne, zjavne platí $2I_\varnothing = I_\odot$, teda

$$I_\varnothing = \frac{1}{2}mr^2. \tag{38.3}$$

Hmotnosť kružnice je ale $m = \lambda 2\pi r$, preto

$$I_{\varnothing} = \lambda \pi r^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{72}\lambda a^3. \tag{38.4}$$

Ešte nám zostáva moment zotrvačnosti trojuholníka. Ten pozostáva z troch tyčiek. Moment zotrvačnosti tyčky kolmej na os otáčania okolo stredu je $I_{-} = \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{12}\lambda a^3$. Keď si uvedomíme, že moment zotrvačnosti hmotného bodu závisí len od kolmej vzdialenosti od osi otáčania, v prípade sklonenej tyčky nám stačí vypočítať množstvo hmoty tyčky v danej vzdialenosti. To je tu ale veľmi jednoduché: obe šikmé tyčky majú hmotu distribuovanú rovnomerne po celej dĺžke, takže v každej vzdialenosti od osi bude spolu trikrát viac hmoty, ako pri samotnej kolmej tyčke. Preto $I_{\triangle} = 3I_{-} = \frac{1}{4}\lambda a^3$.

Na záver už len sčítame jednotlivé príspevky a dostaneme výsledok

$$I = I_{|} + I_{\varnothing} + I_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3. \tag{38.5}$$

39 Prv, než sa pustíme do počítania, objasnime si, čo ideme počítať. Hladina intenzity zvuku je veličina, ktorá popisuje, akú energiu prenesie zvuková vlna jednotkovou plochou za jednotku času. Presnejšie povedané, toto popisuje intenzita zvuku I. Hladina intenzity zvuku L je len logaritmus podielu intenzity zvuku I a nejakej referenčnej intenzity I_0 a udáva sa v beloch, resp. v decibeloch:

$$L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{B}] = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)[\mathrm{dB}] \tag{39.1}$$

Ak zdroj zvuku má akustický výkon P, intenzita zvuku vo vzdialenosti r od zdroja je $I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$ a príslušná hladina intenzity potom

$$L(r) = 10\log\left(\frac{P}{4\pi I_0 r^2}\right) = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.2}$$

Keď už toto všetko vieme, môžeme začať počítať. Podľa zadania vieme, že každý rok sa hladina intenzity spevu rovná babičkinmu veku. Ak babička Justína tento rok oslavuje L-té narodeniny, pred dvomi rokmi zrejme platilo

$$L - 2 = 10\log(P) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.3}$$

Minulý rok už prišiel na pomoc sused. Ak sused vie vyvinúť akustický výkon Π, minulý rok muselo platiť

$$L - 1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r). \tag{39.4}$$

Tento rok navyše posúvame babičkino kreslo o d bližšie k spievajúcim gratulantom, preto bude platiť

$$L = 10\log(P + \Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(r - d). \tag{39.5}$$

Rozdiel rovníc 39.3 a 39.4 dáva

$$1 = 10\log(P + \Pi) - 10\log(P) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1} \tag{39.6}$$

a z rozdielu rovníc 39.4 a 39.5

$$1 = 20\log(r) - 20\log(r - d) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1}. \tag{39.7}$$

Po dosadení do rovnice platnej pred dvomi rokmi dostávame

$$L = 2 + 10\log\left(\frac{\Pi}{\sqrt[10]{10} - 1}\right) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10}d}{\sqrt[20]{10} - 1}\right). \tag{39.8}$$

Na to, aby sme dokázali určiť vek babičky Justíny, musíme ešte prepočítať akustický výkon prizvaného suseda na hladinu intenzity zvuku, ktorú vie vyvinúť. Ak na vzdialenosť ρ dokáže vyvinúť hladinu intenzity Λ, platí

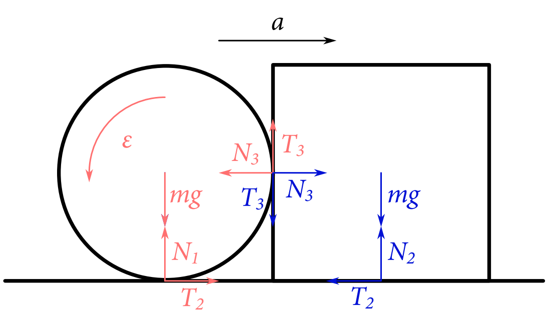
$$\Lambda = 10\log(\Pi) - 10\log(4\pi I_0) - 20\log(\rho). \tag{39.9}$$

Po dosadení do rovnice 39.8 konečne dostávame

$$L = 2 + \Lambda - 10\log\left(\sqrt[10]{10} - 1\right) + 20\log\left(\frac{\sqrt[20]{10} - 1}{\sqrt[20]{10}} \cdot \frac{\rho}{d}\right), \tag{39.10}$$

čo pre hodnoty zo zadania prezrádza, že babička Justína tento rok oslavuje 99 rokov. Gratulujeme!

40 Začneme tým, že nakreslíme všetky sily, ktoré na kocku a valec pôsobia.



Obrázok 40.1: *Náčrt síl pôsobiacich na valec a kocku*

Keď už máme sily, vieme si napísať pohybové rovnice. Bude ich dohromady päť. Dve pre pohyb telies vo vertikálnom smere

$$\begin{aligned} N_1 + f_3 N_3 &= mg, \\ N_2 - f_3 N_3 &= mg, \end{aligned} \tag{40.1}$$

dve pre pohyb telies v horizontálnom smere

$$\begin{aligned} ma - f_1 N_1 + N_3 &= 0, \\ ma + f_2 N_2 - N_3 &= 0, \end{aligned} \tag{40.2}$$

a jedna pre rotáciu valca

$$I\varepsilon - f_1 N_1 R - f_3 N_3 R = 0, \tag{40.3}$$

kde a je translačné zrýchlenie valca a kocky. Tie si musia byť rovné, lebo inak by valec prestal kocku tlačiť a bolo by po súboji. $I = \frac{1}{2}mR^2$ je moment zotrvačnosti valca a ε je jeho uhlové zrýchlenie.

Vyriešením tejto gargantuóznej sústavy rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(1-4f^2)}{2+f^2} g, \\ \varepsilon &= \frac{4f + 3f^2 - 4f^3}{2+f^2} \frac{2g}{R}. \end{aligned} \tag{40.4}$$

Kedy bude mať kocka najväčšiu rýchlosť? Jediná sila, ktorá môže sústavu urýchľovať, pochádza od prešmykovania valca, takže až valec prešmykovať prestane, sústava začne kvôli treniu kocky o podložku spomaľovať. No a valec prestane prešmykovať v čase τ od začiatku, pre ktorý platí

$$a\tau - \Omega R + \varepsilon R \tau = 0, \tag{40.5}$$

teda v čase, keď sa obvodová rýchlosť bodu na povrchu valca vyrovná s jeho translačnou rýchlosťou.

Odtiaľ vieme vyjadriť maximálnu rýchlosť, na ktorú je Dušan urýchlený

$$v = a\tau = a\frac{\Omega R}{\varepsilon R + a} = \Omega R \frac{1-4f^3}{9+6f-12f^2} \doteq 0{,}99\ \mathrm{m/s}, \tag{40.6}$$

čiže asi meter za sekundu.

Výsledky

1 2 Wh

2 6

3 1,3 °C

4 25 920 km/h^2

5 72 l

6 3700 km

7 Tömáš, o 0,505 s.

8 8

9 13 mm

10 −8,4 °C

11 $\frac{3}{4}$

12 $\arcsin \frac{2s}{gt^2}$

13 $\frac{3}{2}$ A

14 $\frac{400\pi}{3}$ m $\doteq$ 419 m

15 2 s

16 $\frac{6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{3} + 2\pi + 3} a \doteq 0{,}555a$

17 $L\sqrt{8\frac{M-m}{M+m}}$

18 60

19 $1{,}624 \cdot 10^{22}$ kg, *uznajte výsledky v intervale* $1{,}62 \cdot 10^{22}$ kg – $1{,}66 \cdot 10^{22}$ kg.

20 180

21 $\sqrt{2}$ s ≐ 1,41 s

22 1171 €, *uznajte výsledky v intervale* 1150 € – 1180 €.

23 9 Ω

24 $\frac{1}{2} - \frac{\arcsin\frac{2}{3}}{\pi} \doteq 26{,}8\,\%$

25 99,2 km, *uznajte výsledky v intervale* 99 km – 99,3 km.

26 $2\,g$

27 0 A

28 $V_{\text{min}} = \frac{1}{148}\,\text{l}$, $V_{\text{max}} = 1\,\text{l}$

29 3,6 cm

30 $\frac{mg}{3k}$

31 $\frac{a\lambda}{6}\frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{\pi + 3\sqrt{3}} \doteq 0{,}563a\lambda$

32 $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\text{a} \doteq 101\,\text{d} \doteq 8{,}7 \cdot 10^{6}\,\text{s}$

33 0,094 ml/s

34 $\dfrac{3Rg}{H}$

35 $1975\ \mathrm{s} \doteq 33\ \mathrm{min}$

36 $10^{18}\ \mathrm{m} \doteq 106\ \mathrm{ly}$

37 1,93

38 $\dfrac{\sqrt{3}\pi + 18}{72}\lambda a^3$

39 99

40 0,99 m/s

Autori úloh

Martin ‚Kvík‘ Baláž
Jozef Csipes
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Jakub ‚Andrej‘ Kliment
Katarína Nedeľková
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög‘ Vörös

Obrázky

Katarína Nedeľková

Technická úprava

Martin ‚Kvík‘ Baláž