

Milí čtenáři,

v rukou držíte sbírku úloh 28. ročníku Fyzikálního Náboje. Ve sbírce se nacházejí všechny úlohy, se kterými jste se v tomto ročníku mohli na soutěži střetnout. K úlohám přikládáme i vzorová řešení, ze kterých se můžete mnohé naučit. Pokud byste některému řešení nerozuměli, neváhejte se nám ozvat, všechno objasníme.

Tato sbírka by nevznikla bez významné pomoci mnohých lidí, kteří se podíleli na celém vývoji Fyzikálního Náboje. Autory Fyzikálního Náboje jsou převážně studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě a většina z nich se také podílí na organizování Fyzikálního korespondenčního seminára (FKS – <https://fks.sk/>). V České republice s překladem a organizací pomohli převážně studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, kteří se podílejí na české verzi FKS, tedy FYKOSu.

Fyzikální Náboj i v roce 2025 pokračuje ve své mezinárodní tradici. Za mezinárodní spolupráci děkujeme lokálním organizátorům: Katarína Nedeľková (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Urszula Goławska (Gdaňsk), Andrzej Karbowski (Toruň), Maciej Matyka (Vratislav), José Francisco Romero García (Madrid), Dmytro Rzhemovskiy (Víděň), Vasyl Rizak (Užhorod) a João Rico (Lisabon). Výsledky vzájemného souboje si můžete prohlédnout na našich stránkách.

FYKOS je korespondenční fyzikální soutěž. Zhruba jednou za měsíc zveřejňujeme různé zajímavé fyzikální úlohy, jejichž řešení nám do určených termínů můžete poslat. My vám úlohy opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejlepší řešitele zveme dvakrát do roka na týdenní soustředění. Více informací najdete na stránce <https://fykos.cz/>.

Jménem celého organizátorského týmu věříme, že jste si v roce 2025 Fyzikální Náboj užili, a doufáme, že se všichni uvidíme na Náboji i příští rok! Ať už v roli soutěžících, nebo organizátorů.

Jakub Kliment – hlavní organizátor v ČR

Jaroslav Valovčan – hlavní organizátor

Výsledky soutěže, archiv úloh a další informace najdete na stránce <https://physics.naboj.org/>.

Zadání

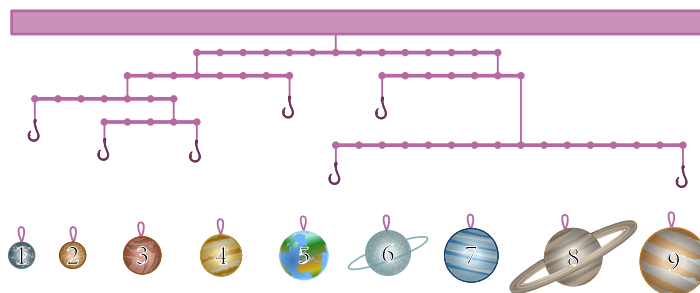
1 Anička se na stará kolena inspirovala babičkami ve svém okolí a řeší sudoku v nedělních novinách. To však samo o sobě není moc náročné. Vymyslela si proto vlastní hru: délka strany jednoho čtverečku v mřížce je 1 cm a každý čtvereček váží právě tolik gramů, jaká hodnota je v něm napsaná. Jak daleko bude těžiště takového sudoku vzdálené od geometrického středu mřížky, až ho Anička vyřeší?

8	7	9		3		4		6
		6		7	9		1	
1			2	4	6	7		9
9		7	3			5	6	4
	2		6		4		9	7
	5			8		2		1
5	6	3	7		8	1	4	
7			4	1	2	6		
4	1		5	6			7	8

2 Kupko sedí ve vlakovém kupé a užívá si cestu z Trenčína do Šaštína. Sedí zády ke směru jízdy a v zrcadle připevněném na protější stěně kupé vidí v odraze přibližující se návěstidlo stojící těsně u trati. Jakou zdánlivou rychlostí se ke Kupkovi přibližuje obraz návěstidla v zrcadle, když se vlak pohybuje vpřed rychlostí v ?

3 Helenka dostala od Kvíka k nultým narozeninám nad postýlku hudební kolotoč s hračkami. A ne jen tak ledajaký, ale astronomický: na lehkých tyčkách různých délek může viset až sedm plyšových planetek. Kvík si však pamatuje, že planet kdysi bývalo devět, a právě tolik jich ke kolotoči objednal. Planetky mají hmotnosti od 1 do 9 g a dají se zavěsit na háčky.

Kvík chce na každý háček zavěsit právě jednu planetku tak, aby byla všechna ramena v rovnováze. Které planetky při tom **nepoužije**?

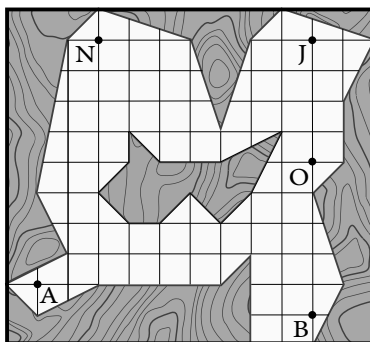


4 Jožko byl nedávno na výletě na Teplém Vrchu. K jeho překvapení to však nebyl vrch, ale vodní nádrž – a vodu tam měli studenou. Rozhodl se tedy, že se radši vykoupe doma. Protože je poměrně šikovný, lokalizoval v koupelně v krátkém čase dva kohoutky s teplou a studenou vodou.

Z prvního teče teplá voda s teplotou $68\text{ }^{\circ}\text{C}$. On by však rád vodu s teplotou $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ a průtokem 600 ml/s . S jakým průtokem musí z druhého kohoutku pustit studenou vodu s teplotou $17\text{ }^{\circ}\text{C}$, aby byl spokojený?

5 V tmavé jeskyni stojí Ninka (N), Adam (A), Barborka (B), Olin (O) a Jonka (J). Ninka, vedoucí dobrodružné výpravy, chce zjistit, kde jsou ostatní. Proto zakřičí své písmeno „N“. Půl sekundy potom, co ji Adam uslyší, vykřikne „Á“, potom to samé po zaslechnutí Adamova výkřiku udělá Barborka, a tak dále, až dokud Ninka neuslyší Jonku zakřičet svoje písmeno. Jak dlouho od Ninčina výkřiku potrvá, než uslyší celé slovo „NÁBOJ“ a bude vědět, že se nikdo neztratil?

Strana čtverečku v mřížce má 10 metrů a reakční doba mezi ušima a ústy je u všech členů výpravy stejná, $0,5\text{ s}$. Přes skálu se zvuk nešíří.



6 Patrik chodí běhat na okruh. Od té doby, co dostal chytré hodinky, vždy měří své průměrné tempo. Při posledním tréninku zjistil, že mezi třetím a čtvrtým oběhem se jeho průměrný čas na kolo zlepšil o celé dvě sekundy z $01:20$ na $01:18$.

Jak dlouho mu trvalo zaběhnout čtvrtý okruh?

7 Moderní navigace mají spoustu vychytávek. Ukazují například rychlost, kterou bychom měli jet, abychom dojeli do cíle včas. Marek spěchá na letiště a nastavil, že tam musí být v $22:00$. V $21:00$ mu navigace říká, že má jet 120 km/h , aby to stihnul. V $21:30$ se odhad zvýšil na 150 km/h .

V kolik přijede Marek na letiště, pokud pojede pořád stejnou rychlostí?

8 Soňa si koupila novou skleněnou lampu ve tvaru průhledné krychle. Tato krychle má index lomu $1,5$ a ve svém středu má umístěnou žárovku. Soňa chtěla svoji lampu hned otestovat a zavěsila ji přesně do středu svého krychlového pokoje. Jaká část Sonina pokoje byla osvětlená touto lampou?

9 Šimon cestuje Šinkansenem na svém vysněném výletě po Japonsku. Vlak ve kterém sedí, ze stanice vyjede se zrychlením $2,6\text{ km/h/s}$ a jeho maximální rychlost je 320 km/h . V jaké vzdálenosti od stanice dosáhne vlak se Šimonem své maximální rychlosti?

10 Veganka Lucka si s sebou na výlet vzala avokádo s hračkou uvnitř. Byla nicméně zklamána, neboť hračkou byla jen obyčejná dřevěná kulička s poloměrem 2 cm a s hustotou 750 kg/m^3 . Zahodila ji tedy do jezera. Tam ji však hned spatřil podvodník Mirko a stáhl kuličku až na dno jezera. Kolik práce při tom na kuličce vykonal, je-li hloubka jezera 30 m?

Práci na ponoření kuličky těsně pod hladinu zanedbejte.

11 Strojvůdce Kubko se svým vlakem právě blíží k přejezdu rychlostí v . Najednou však uvidí, že na přejezdu stojí auto. V zoufalé snaze předejít srážce začne Kubko houkat. Společně na to, že když řidič v autě uslyší zahoukání, dokáže odjet z kolejí za čas t .

V jaké nejmenší vzdálenosti před přejezdem musí Kubko houkat, pokud rychlost zvuku je c ?

12 Patrik si při přípravě na státnice psal poznámky na jeden velký papír, aby měl všechno pěkně pohromadě. Tento papír byl tak velký, že dokázal pokrýt celou podlahu Patrikova pokoje. Po státnicích se Patrikovi velmi ulevilo, protože kdyby psal dál a dál, jednou by určitě popsal papír, kterým by dokázal obalit celou Zemi. Který nejmenší papír A-formátu by Patrikovi stačil na obalení celé Země?

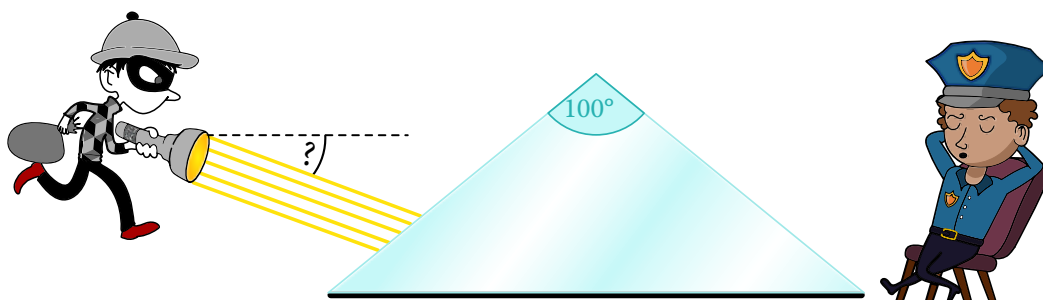
Papír formátu A0 má plochu 1 m^2 . Papír formátu A1 získáme tak, že papír formátu A0 přestříhneme napůl podél kratší strany, a tak dále. Patrikova balicí technika může také zahrnovat stříhání papíru.

13 Sabinka byla na letecké show. Bylo jí tam poměrně chladno, protože jí celou dobu zleva do tváře foukal vítr rychlostí v . Nejvíce ji zaujaly akrobatické stíhačky. Na konci show přeletěla jedna stíhačka zprava doleva rychlostí u vzhledem k zemi. V průběhu celého letu před tribunou vypouštěla barevný dým, který se vzhledem ke vzduchu velmi rychle přestal pohybovat.

Jak dlouhá byla dýmová stopa, pokud byla délka tribuny s ?

14 Robberta se chystá uloupit z muzea křišťálový trojboký hranol s indexem lomu 2,4. Průřezem tohoto hranolu je rovnoramenný trojúhelník s vrcholovým úhlem 100° , jak je vidět na obrázku. Robberta si na něj bude muset posvítit rovnoběžným svazkem paprsků, avšak nechce, aby to spatřil strážník muzea na opačné straně hranolu. Jak nejméně musí sklopit baterku směrem k zemi oproti vodorovnému směru, aby na druhou stranu hranolu určitě nepronikly žádné paprsky, když zasvítí na kteroukoli část stěny hranolu?

Spodek hranolu je dokonale černý a pohlcuje všechny paprsky, které na něj dopadají.



15 Kačka si doma zařizuje posilovnu. Právě teď ve výtahu vážícím 250 kg vynáší do bytu novou činku s hmotností 20 kg. Vzhledem k tomu, že do posilky zatím moc nechodila, váží Kačka jenom 60 kg a její ruce jsou zatím tak lehké, že jejich hmotnost můžeme zanedbat. Výtah sice stoupá úctyhodnou konstantní rychlostí 4 m/s nahoru, ale Kačka přesto nechce ztrácet čas a začne s činkou hned posilovat.

Jakou silou je napínáno lano držící výtah ve chvíli, jestliže Kačka hýbe činkou dolů se zrychlením 5 m/s²?

16 Je půl třetí v noci a Samo hází z okna vejce na neidentifikovaného harmonikáře, který se schovává někde ve stínu pod kolejí. Pokud Samo vyhodí vejce směrem nahoru, na zem dopadne za čtyři sekundy. Pokud ho hodí stejnou rychlostí směrem dolů, stačí na to dvě sekundy.

Jak dlouho bude vejce padat, pokud jej Samo pouze volně pustí?

17 Lucka potřebovala aspoň na chvíli něčím zaujmout svého urvaného synovce. Když už nepomáhaly hračky, stavebnice, ani výhružky vařečkou, vyhrabala ze skříňky nehmotné lano s nehmotnou kladkou a zavěsila na konce lana dvě závaží — jedno s hmotností m a druhé s hmotností $\frac{m}{2}$. Společně lano zavěsili na kladku a čekali, co se stane. Synovec chvíli s napětím sledoval, jak se závaží pohybují, po chvílce však opět s křikem odběhl za dalšími neplechami. Lucce však zůstala v hlavně vrtat otázka:

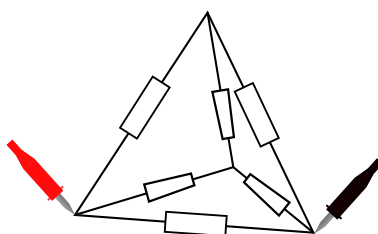
„S jakým zrychlením se vlastně závaží pohybují?“

Pomocte Lucce najít výraz pro zrychlení závaží.

18 Odevzdejte součet čísel pravdivých výroků.

- 1 Těleso sa nachází na kruhové orbitě. Když zvýší velikost své rychlosti, jeho oběžná doba se zkrátí.
- 2 Když je Země na své dráze blíže k Slunci, pohybuje se rychleji.
- 4 Zima nastává, protože je orbita eliptická a v tu chvíli je Země nejdál od Slunce.
- 8 Každá družice, která je na kruhové orbitě Země, se pohybuje stejnou rychlostí.
- 16 Geostacionární družice se můžou vyskytovat jenom nad rovníkem.
- 32 V soustavě dvou těles se lehčí těleso pohybuje okolo společného těžiště vždy po elipse.

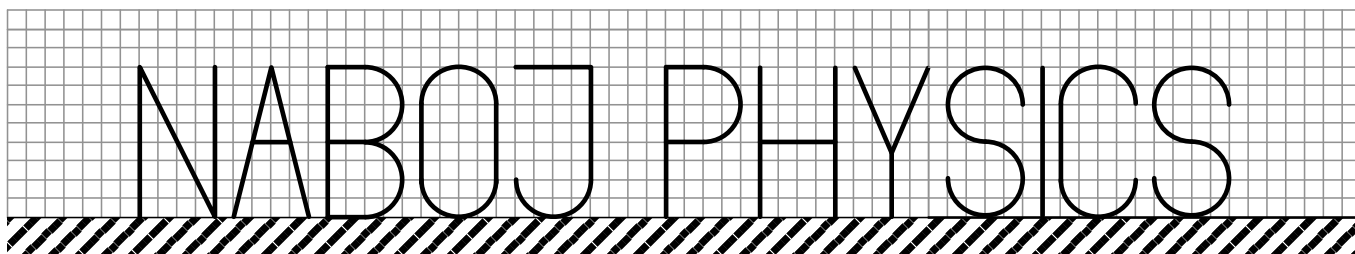
19 Z šesti stejných rezistorů s odporem R jsme sestrojili pravidelný čtyřstěn a na dva jeho vrcholy jsme připojili ohmmetr. Jaké hodnoty celkového odporu mezi vrcholy můžeme naměřit, když jednu větev s rezistorem ze čtyřstěnu kompletně odstraníme?



20 Pomozte nám seřadit písmena v názvu naší soutěže podle jejich stability. Pod stabilitou rozumíme, kolik práce je nutné vynaložit na převrácení písmena.

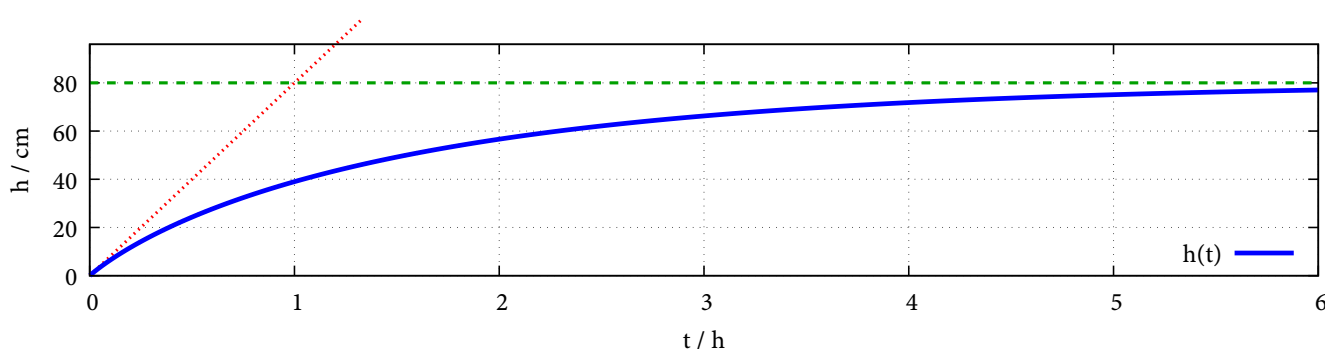
Písmena jsou vyrobena z homogenních pevných tyček ve tvaru úseček nebo částí kružnic s konstantní malou, ale **nenulovou** tloušťkou, mají ostré hrany a při překlápění musí zůstat v rovině papíru.

Písmena seřaďte **sestupně**. Ta, která nejsou v stabilní poloze, do výsledku **nezahrnujte**.

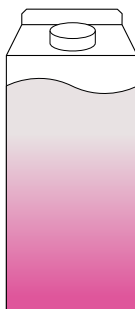


21 Zahradník Adam si do dvora koupil velkou nádrž na vodu ve tvaru válce s plochou podstavy 1 m^2 . Během předcházejícího dlouhého období sucha veškerou vodu spotřeboval. Teď však konečně začalo pršet a nádrž se začala plnit.

Adam má v nádrži senzor a aplikaci, která mu ukazuje graf vývoje výšky hladiny. Zpočátku se radoval, že vody v nádrži rychle přibýlo (viz tečkovanou čáru, která je tečnou ke grafu v čase 0). Po pár hodinách si však všiml, že i když prší pořád stejně, nádrž se jaksi neplní a výška hladiny nepřekročí 80 cm (čárkovaná čára). Na dně nádrže je totiž díra. Jaká je její plocha?

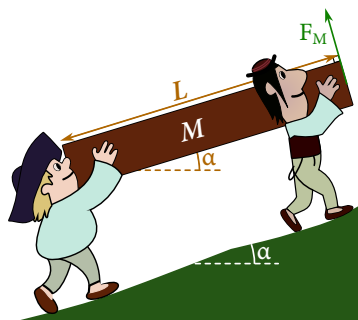


22 Piškót si koupil litrové jahodové jogurtové mléko s 10 % objemu jogurtu (a 90 % objemu vody) a dal ho do ledničky. Do rána se mléko usadilo tak, že na vrchu zůstala čistá voda a koncentrace jogurtu se lineárně zvyšovala až po dno. Když Piškót ráno mléko naléval do skleničky s objemem 400 ml, zapomněl láhev protřepat. Všiml si toho, až když do skleničky nalil 200 ml. V tu chvíli zbytek mléka protřepal a dolil skleničku doplna. Jakou procentuální koncentraci jogurtu má teď Piškótovo mléko ve skleničce?



23 Matko a Kubko nesou břemeno nahoru do svahu se sklonem α . Břemeno má tvar dlouhého tenkého válce s délkou L a hmotností M . Jelikož je břemeno těžké, musí ho nést oba. Matko ho nese za přední konec, Kubko za zadní. Matko si ale usnadňuje práci a silou nepůsobí směrem nahoru, ale kolmo na osu břemene. Jaký je poměr sil, kterými Matko a Kubko zvedají břemeno?

Matko a Kubko jsou stejně vysocí, a tudíž nesou břemeno ve stejné výšce nad povrchem svahu.



24 Na jaké části zemského povrchu můžeme někdy vidět slunce přesně na severu (v libovolné výšce nad obzorem)?

Zemi považujte za dokonalou kouli a sluneční paprsky za rovnoběžné. Ohyb světla v atmosféře zanedbejte.

25 Dano se připravuje na mistrovství světa v lukostřelbě. Terč je vzdálený 70 m a nachází se ve stejné výšce jako Dano. Jak vysoko nad středem terče se nachází bod, na který Dano musí mířit, aby se šíp zapíchl přesně do středu, pokud z Danova luku vyletí rychlostí 50 m/s?

Existují dvě možnosti, jak toho lze teoreticky docílit. Při soutěžní lukostřelbě se však střílí přímo, proto odezdejte tu menší z nich.

26 Američané budou na měření používat opravdu cokoli, jen ne jednotky SI. John Doe si takto vytvořil svůj osobní systém jednotek založený na jednotkách glg-grg-mrk definovaných následovně:

- 1 glg je objem, který dokáže polknout, přičemž jednopintový nápoj vypije na 20 glgů;
- 1 grg je intenzita zvuku, kterou zvládne vyvinout svým říhnutím, přičemž jeho říhnutí má hladinu intenzity zvuku 100 dB;

- 1 mrk je čas, který trvá jedno jeho mrknutí, přičemž za sekundu dokáže mrknout dvakrát.

Jaká je jeho hmotnost vyjádřená v přirozené jednotce hmotnosti v jeho soustavě jednotek, jestliže váží 200 liber?

Hladině intenzity zvuku 0 dB odpovídá intenzita zvuku 1 pW/m^2 .

27 Plyš doplňuje v práci zásoby dusíku. Má jednu velkou prázdnou nádobu s objemem 10 l, kterou potřebuje naplnit. Jako obvykle o půl páté ráno dorazil závozník a z dodávky vytáhl pět menších tlakových lahví s objemem 2 l, které jsou natlakované na 5 MPa.

Pracovní postup je následující: závozník spojí dvě lahve ventilem, který následně uvolní, čímž se vyrovnají tlaky v lahvích. Po vyrovnání teploty s okolím se lahve mohou opět rozpojit.

Jakého největšího tlaku dusíku může závozník dosáhnout ve velké nádobě?

28 Historie se opakuje. Patrik i tento rok objevil v dědově skříni zvláštní černý disk s obrázkem na papírovém obalu. Dřív, než by na něm stihl naservírovat sójový hamburger nebo ho použít místo frisbee, mu děda ukázal, že když ho položí na talíř gramofonu, na vnější konec spirálové drážky na disku umístí jehlu a zmáčkne pár tlačítek, z reproduktorů se kromě praskání a syčení ozve i jakási prehistorická hudba.

Patrika tentokrát zajímá, jak dlouho trvá, než se gramofonová deska roztočí z klidu na svou obvyklou rychlost $33\frac{1}{3}$ otáček za minutu. Předpokládejte, že jehlu na desku položí, teprve když se deska roztočí na požadovanou rychlost.

Deska je plný disk o průměru 30 cm a hmotnosti 200 g. Leží na talíři o stejném průměru a hmotnosti 2 kg, který se otáčí spolu s deskou. Gramofon je napájen adaptérem s výstupním stejnosměrným napětím 5 V a proudem 100 mA.

Jakékoli ztráty energie zanedbejte.

29 Skibidi Kvíklord rizzler si hrál s nabitou krychlí. Krychle dripovala jeden náboj $q = 1 \text{ C}$ v každém svém vrcholu. Kvíklord spawnul devátý náboj, jenž dropnul chillovat do středu krychle, fr fr. Kvíklord je lowkey sigma, a proto ví, jaký má být tenhle náboj, aby žádný náboj z vrcholů krychle neodletěl do Ohia, ani necrashnul do středu krychle, protože by to bylo lowkey cringe.

Jaký musí být tenhle náboj?

#elektrostatika #skibidi #naboj-physics #nocap #cappucinaballerina

30 Vesmírná společnost FYKOS ohlásila velký úspěch – přistání na Měsíci. Ve skutečnosti však neměli dostatek financí, proto jenom natočili video na Zemi. A to dokonce jenom obyčejným telefonem, jehož kamera měla snímkovací frekvenci 60 Hz. Pro začátek zkoušeli natočit šikmý vrh francouzským klíčem.

S jakou snímkovací frekvencí musí video přehrát, aby to působilo uvěřitelně? Tíhové zrychlení na Měsíci je 16 % zemského.

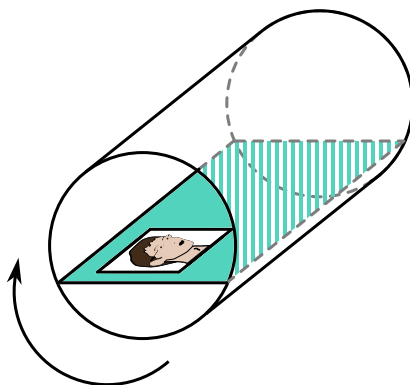
31 Zahradník Adam a babka bylinkářka Justína jsou sousedé a jejich domy mají společnou stěnu. Adam pochopitelně ve svém sklepe potřebuje chlad, aby se mu nesvraštela zelenina, a babička Justína zase teplo, aby se jí dobře sušily bylinky. Rozhodli se proto investovat do tepelného čerpadla. Tepelné čerpadlo je poháněné elektrickou energií a odčerpává teplo z Adamova sklepa do sklepa babky Justíny.

Po jistém čase se setkali a libovali si, jak se jim investice vyplácí. Babka Justína pozoruje, že průměrná účinnost tepelného čerpadla je 1500 %. Jakou průměrnou účinnost pozoruje zahradník Adam?

32 Stanko si minule četl o Mezinárodní vesmírné stanici. Proto ví, že její hmotnost je 400 t a obíhá Zemi po kružnici ve výšce 400 km nad povrchem. Přestože obíhá v nebeských výšinách, pořád na ni působí odporová síla atmosféry, v důsledku které klesne každý den o 100 m blíž k povrchu.

Jakou silou brzdí atmosféra Mezinárodní vesmírné stanici?

33 Áďa se zase zdržel na záchodě. Aby si zkrátil dlouhou chvíli, začal si hrát s roličkou od toaletního papíru. Vytáhl z peněženky ISIC a vložil ho dovnitř vodorovně držené roličky na její spodek. Potom začal roličkou otáčet. O jaký největší úhel může roličku otočit, aby ISIC nesklouznul? Šířka ISICu je $\sqrt{2}$ -krát větší než poloměr roličky a součinitel tření mezi ISICem a roličkou je 0,3.



34 Kvík rád vzpomíná na své dětství – na časy, kdy byla duha ještě černobílá, v obchodě platil korunou československou a sbíral kartičky s obrázky koní. Na kartičce bylo kromě jiného napsané, za jaký čas dokáže daný kůň na rovině zrychlit z 0 na 100 km/h.

Dnes už je duha barevná, Kvík platí eurem a sbírá kartičky s obrázky aut. Nejvíc si cení kartičku, na které je Rimac Nevera s výkonem 1888 hp a zrychlením z 0 na 100 km/h za 1,8 s. Limitujícím faktorem, který brání ještě většímu zrychlení, už není nedostatečný výkon, ale tření kol o zem.

Za jaký nejkratší čas dokáže Rimac Nevera zrychlit z 0 na 100 km/h z kopce dolů, když má k dispozici neomezený výkon a libovolně strmý kopec?

35 Na západním pobřeží jisté tropické země se z moře tyčí svislý skalní útes. V okamžiku, kdy Slunce na břehu zapadne, je vrcholek útesu ještě nějakou chvilku osvětlen: je-li Země kulatá, je obzor při pohledu z útesu o něco dále a Slunce na něj svítí o něco déle. Hrana stínu se pohybuje nahoru po útesu přibližně rovnoměrně zrychleným pohybem. Jaká je velikost tohoto zrychlení?

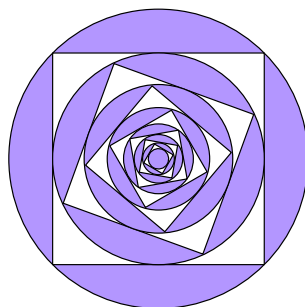
Útes se nachází přesně na rovníku a je právě jarní rovnodennost.

36 Kubko se během letní školy Trojstenu vypravil do jaderné elektrárny Mochovce. Na prohlídce vyprávěli o přírodním uranu, který obsahuje 0,72 % ^{235}U a zbytek ^{238}U s poločasy přeměny $7 \cdot 10^8$ a $4,46 \cdot 10^9$ roků. V jaderných reaktorech ale používají uran obohacený na 3 % ^{235}U .

Kubkovi se okamžitě v hlavě rozsvítila jiskřička zvědavosti: zajímá ho, o kolik procent bude aktivita takto obohaceného uranu vyšší v porovnání se shodným počtem atomů přírodního uranu.

37 Maminka věnovala Soničce harmonizující doplněk – náhrdelník s amuletem, který je vidět na obrázku. Jde o kruh s poloměrem r , ze kterého vyřízla vepsaný čtverec. Potom do něj vložila kruh vepsaný čtverci. Z něj následně vyřízla vepsaný čtverec a tak dále do nekonečna. A aby toho nebylo málo a aby amulet fungoval ještě lépe, vyříznuté vepsané čtverce ještě navíc pokaždé otočila o 20° .

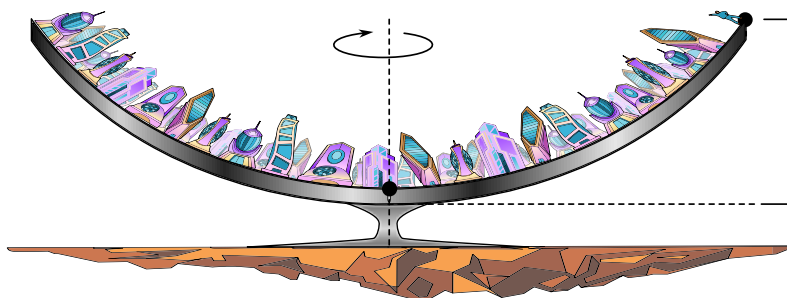
Sonička dobře ví, že čím déle se správný harmonizující doplněk točí, tím je efektivnější. Jaký je harmonizační potenciál moment setrvačnosti jejího amuletu okolo osy procházející středem amuletu a kolmé na rovinu, ve které se amulet nachází? Hmotnost amuletu je m .



38 V daleké budoucnosti se chystáme osídlit Mars. Tíhové zrychlení na Marsu je však pouhých 36 % zemského, a to při přestěhování na Mars lidem nedělá dobře.

Proto jsme pro ně postavili Gyropolis, masivní město ve tvaru rotačního paraboloidu s poloměrem 1000 m, které pomalu rotuje kolem svislé osy, a tak vytváří umělou tíhu. Když osadník přiletí na Mars, dostane nejdřív pokoj na úplném okraji, kde je výsledné tíhové zrychlení rovné zemskému, a postupně se bude stěhovat níž a níž, dokud si nezvykne na prostředí Marsu. V každém místě je zdánlivá tíha kolmá na povrch města.

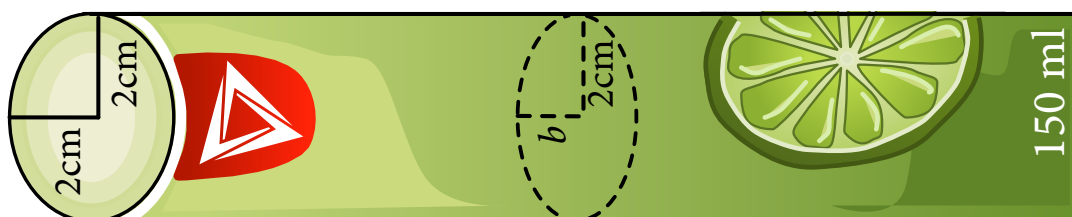
Jaký je výškový rozdíl mezi středem a okrajem města?



39 Jarda se během výjezdu na kole v horkém letním dni potřeboval zchladit. Vběhl proto do obchodu a koupil si mraženou dřeň. Dřeň je balená v obalu tvaru „zdeformovaného kuželu“. Obal má objem 150 ml a má tu vlastnost, že horizontální řez obalem v libovolné výšce má tvar elipsy. Hlavní poloosa této elipsy je stejná po celé výšce $a = 2$ cm a vedlejší poloosa se mění lineárně s výškou, přičemž úplně nahoře $b = a$ a úplně dole $b = 0$.

Jarda dřeň postupně celou vytlačuje z obalu a ujíždá vždy jenom shora. Jakou práci vykoná na zvedání dřene, než z ní dostane přesně polovinu objemu? Hustota dřene je 1000 kg/m^3 .

Obrázek je otočený, aby se vešel na papír, ale dokonce i Jarda drží dřeň normálně, otvorem nahoru.



40 Tomáš miluje rychlá auta. Momentálně se věnuje drag racingu. Při jeho poslední jízdě se podél trati dlouhé s rovnoměrně rozmístily davy fanoušků. Tomáš dupl na plyn a celou trať projel s rovnoměrným zrychlením a . Každý z fanoušků si poznamenal okamžitou rychlost, kterou projel Tomáš před ním. Po závodě se potkali při přátelském rozhovoru a ze zaznamenaných rychlostí vypočítali jejich průměr.

Jaký je poměr této hodnoty ke skutečné průměrné rychlosti Tomášova pohybu?

Vzorová řešení

1 Na vyřešení tejto úlohy sudoku vôbec nepotrebujeme dokončiť. Keďže podľa pravidiel sa v každom stĺpci každé číslo medzi 1 až 9 má vyskytnúť práve raz, všetky stĺpce majú rovnakú hmotnosť (45 g) a vodorovná súradnica ťažiska teda musí byť rovnaká ako súradnica stredu. Rovnaký argument platí aj pre riadky a zvislú súradnicu, takže ťažisko sa nachádza presne v strede a hľadanou odpoveďou je 0 cm.

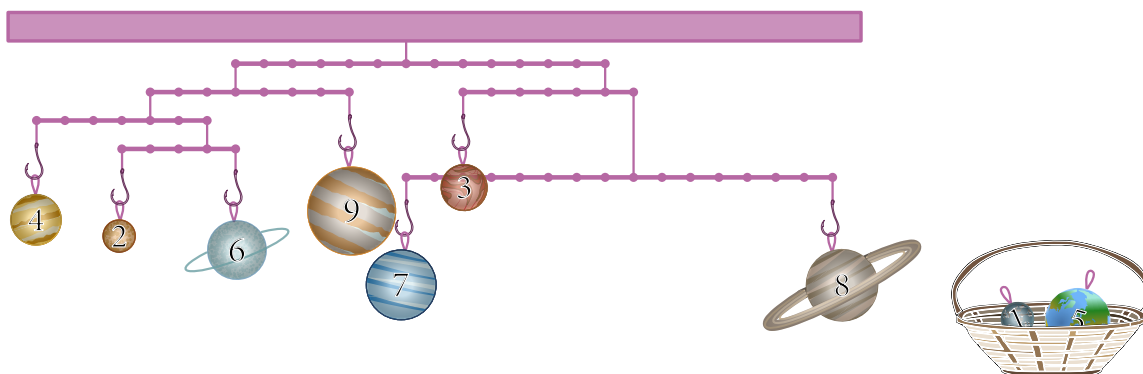
2 Pre potreby riešenia si môžeme predstaviť, že vlak (a teda aj Kupko a zrkadlo) stoja a návestidlo sa pohybuje smerom k nemu rýchlosťou v . Zrkadlo transformuje scenériu za Kupkovým chrbtom tak, že predmety vzdialené d od zrkadla bude Kupko vidieť ako umiestnené d za zrkadlom. A ak sa návestidlo pohybuje k nemu rýchlosťou v , rovnako sa aj jeho obraz v zrkadle bude pohybovať rýchlosťou v ku Kupkovi.

3 Označme si háčiky zľava doprava písmenami A až G. Pomer vzdialeností háčikov E a G od osi otáčania je $\frac{8}{7}$. Jediné dve ponúkané planétky, ktorých hmotnosti sú v pomere 7 : 8, sú práve 7- a 8-gramové. Na háčiky E a G teda musíme zavesiť práve tie. Dokopy je teda na týchto váhach hmotnosť $7 \text{ g} + 8 \text{ g} = 15 \text{ g}$.

Moment sily, ktorým pôsobia na tyč nad nimi, preto bude $15 \text{ g} \cdot g \cdot d$, kde d je dĺžka jedného dielika na ramenách. Aby sme háčikom F vzdialeným od osi otáčania $5d$ vyrovnali tento moment sily, musí tu určite byť planétka s hmotnosťou 3 g.

Teraz si všimnime, že pomer vzdialeností háčikov B a C od osi otáčania ich ramena je 3 : 1. Jediné zvyšné planétky, ktorých hmotnosti sú v tomto pomere, sú tie s hmotnosťami 2 g a 6 g. Spolu na rameno nad nimi pôsobia momentom sily $8 \text{ g} \cdot g \cdot d$, takže na háčiku A musí byť planétka s hmotnosťou 4 g. Hmotnosti planétok na háčikoch A, B a C sú spolu 12 g, teda na váhy nad nimi pôsobia momentom sily $12 \text{ g} \cdot g \cdot d$. Planétka na háčiku D to musí vyrovnať, takže sem treba zavesiť tú s hmotnosťou 9 g.

Zľava doprava teda na tyčkách visia planétky s hmotnosťami 4, 2, 6, 9, 7, 3 a 8 g a Kvík teda nepoužije dve s hmotnosťami 1 g a 5 g, čiže Pluto a Zem. A to akurát sedí: Pluto už aj tak nie je planéta a Zem už doma aj tak majú pod postielkou.



Obrázek 3.1: Vyrovnané váhy

4 Teplá voda odovzdá teplo studenej vode a nastane tepelná rovnováha. Tá má nastať podľa zadania pri 34 °C. Napíšeme si kalorimetrickú rovnicu

$$Q_{\text{prijaté}} = Q_{\text{odovzdané}},$$

$$m_{\text{studená}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t - t_{\text{studená}}) = m_{\text{teplá}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t_{\text{teplá}} - t).$$
(4.1)

Celú rovnicu môžeme predeliť tepelnou kapacitou vody $c_{\text{H}_2\text{O}}$. Objem studenej vody, ktorá pritečie do vane za sekundu, si označíme x . Dokopy má vytekať 600 ml/s, takže objem pretečenej teplej vody za sekundu bude 600 ml/s – x . Dosadíme si hodnoty do rovnice a upravujeme

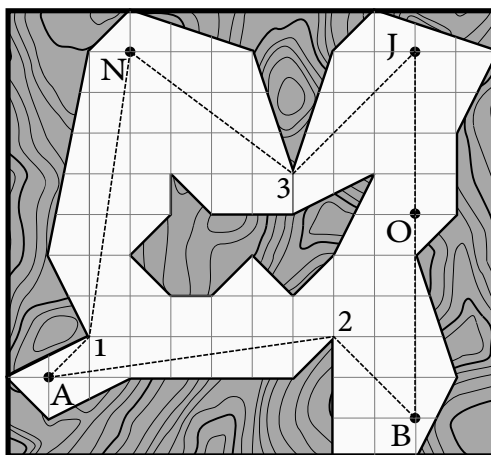
$$x \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (34^\circ\text{C} - 17^\circ\text{C}) = (600 \text{ ml/s} - x) \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (68^\circ\text{C} - 34^\circ\text{C}),$$

$$x \cdot 17^\circ\text{C} = (600 \text{ ml/s} - x) \cdot 34^\circ\text{C},$$
(4.2)

z čoho už len vyjadríme

$$x = \frac{600 \text{ ml/s} \cdot 34^\circ\text{C}}{17^\circ\text{C} + 34^\circ\text{C}} = 400 \text{ ml/s}.$$
(4.3)

5 Na obrázku 5.1 je znázornená najkratšia cesta, ktorou sa zvuk šíri medzi každými dvoma po sebe nasledujúcimi kamarátmi. Miestami však v priamočiarej ceste stojí kamenná stena, ktorú zvuk musí obísť.



Obrázek 5.1: Cesta zvukovej vlny v jaskyni

Hneď prvú časť cesty medzi bodmi N a A si tak musíme rozdeliť na dva kratšie úseky: od bodu N po bod 1, a od bodu 1 do bodu A . Našťastie na štvorcovej mriežke sú všetky úseky buď rovno na osiach, alebo sú to prepony pravouhlých trojuholníkov. Vystačíme si teda s Pytagorovou vetou.

Pre prvý úsek platí, že jeho dĺžka je súčtom

$$d_{\text{NA}} = d_{\text{N1}} + d_{\text{1A}} = \sqrt{(70 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} + \sqrt{(10 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} =$$

$$\sqrt{5000} \text{ m} + \sqrt{200} \text{ m} = 50\sqrt{2} \text{ m} + 10\sqrt{2} \text{ m} = 60\sqrt{2} \text{ m}.$$
(5.1)

Podobne si prejdeme všetky úseky a dostaneme postupne dĺžky

$$d_{A2} = 50\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{2B} = 20\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{BO} = 50 \text{ m}, \quad d_{OJ} = 40 \text{ m}, \quad d_{J3} = 30\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{3N} = 50 \text{ m}. \quad (5.2)$$

Ak všetky vzdialenosti sčítame, dostaneme sa k celkovej dráhe $(140 + 160\sqrt{2})$ m. Zvuk sa šíri rýchlosťou približne $c_s = 343$ m/s, takže prejdienie tejto dráhy mu bude trvať

$$t_s = \frac{(140 + 160\sqrt{2}) \text{ m}}{343 \text{ m/s}} \doteq 1,07 \text{ s}. \quad (5.3)$$

Vieme však, že reakčná doba členov výpravy je pre všetkých pol sekundy. Keďže výkrik takto prejde cez štyroch členov výpravy (Ninka už ďalej kričať nemusí), ich reakčný čas je spolu $t_r = 4 \cdot 0,5 \text{ s} = 2 \text{ s}$ a Ninka teda celé slovo NABOJ začuje po $t_s + t_r \approx 3,07 \text{ s}$.

6 Ak bol Patrikov priemerný čas, za ktorý obehok okruh pri prvých troch obehoch 80 s, celkový čas, za ktorý obehok tri okruhy, musí byť $3 \cdot 80 \text{ s} = 240 \text{ s}$. Priemerný čas, za ktorý Patrik obehok okruh, je po štvrtom obehu 78 s, takže celkový čas, za ktorý zabehok štyri okruhy, je $4 \cdot 78 \text{ s} = 312 \text{ s}$.

Štvrtý okruh teda zabehok za $312 \text{ s} - 240 \text{ s} = 72 \text{ s}$, alebo 01:12.

7 Prvýkrát Marcelovi navigácia tvrdí, že má ísť rýchlosťou 120 km/h, z čoho vieme priamo vypočítať Marcelovu vzdialenosť od letiska o 21:00,

$$s = v \cdot t = 120 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 120 \text{ km}. \quad (7.1)$$

Rovnako vieme dopočítať aj Marcelovu vzdialenosť od letiska o 21:30,

$$s = 150 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 75 \text{ km}. \quad (7.2)$$

Z toho vieme, že za prvú polhodinu jazdy prešiel $120 \text{ km} - 75 \text{ km} = 45 \text{ km}$, takže rýchlosť, ktorou Marcel ide, je $\frac{45 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 90 \text{ km/h}$. Cesta mu teda bude trvať

$$\frac{120 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 80 \text{ min} \quad (7.3)$$

a na letisko dôjde v čase 22:20.

8 Ak by žiarovka svietila bez toho, aby bola v kocke, osvietila by celú miestnosť. Ak okolo žiarovky umiestnime kocku s indexom lomu väčším ako 1 (pokojne aj iným ako 1,5), podľa Snellovho zákona sa bude na rozhraní medzi stenou kocky a vzduchom svetlo lámať od kolmice na rozhranie. Ak sa teda pozrieme na nejakú konkrétnu stenu kocky, lúče pri dopade na ňu budú viac rozptyľované ako doteraz, teda toho osvetlia viac a určite nie menej. Teda stále bude iste osvetlených 100 % miestnosti.

9 Najdôležitejšie je všimnúť si jednotky oboch uvedených veličín. Rýchlosť $v_{\max} = 320 \text{ km/h}$ nie je kompatibilná s uvedenými jednotkami zrýchlenia $2,6 \text{ km/h/s}$. Tie však vieme upraviť na použiteľný tvar

$\text{km}/(\text{h} \cdot \text{h}) \equiv \text{km}/\text{h}^2$. Ak vieme, že vlak zrýchli o $2,6 \text{ km}/\text{h}/\text{s}$ každú sekundu, za hodinu (ktorá pozostáva z 3600 sekúnd) by zrýchli o $2,6 \text{ km}/\text{h}/\text{s} \cdot 1 \text{ h} = 9360 \text{ km}/\text{h}$.

Zo vzťahu $v = a \cdot t$ teraz vieme vyjadriť čas, za ktorý je vlak schopný zrýchliť na svoju maximálnu rýchlosť. Pre rovnomerne zrýchlený pohyb začínajúci z pokoja platí

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v_{\max}t. \quad (9.1)$$

Keď za t dosadíme $\frac{v_{\max}}{a}$, zistíme, že dráha, ktorú vlak prejde, než zrýchli na svoju maximálnu rýchlosť, je

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_{\max} \cdot \frac{v_{\max}}{a} = \frac{v_{\max}^2}{2a}. \quad (9.2)$$

Dosadením za obe veličiny hodnoty v správnych jednotkách dostaneme dráhu 5,47 km.

10 Sila F_t pôsobiaca na plne ponorenú guľôčku je výslednicou vztlakovej sily F_b a tiažovej sily F_g , teda

$$F_t = F_b - F_g = V\rho_v g - V\rho_d g = (\rho_v - \rho_d)\frac{4}{3}\pi r^3 g. \quad (10.1)$$

Prácu, ktorú podvodník vykonal pri ponáraní, určíme zo vzorca $W = F_t \cdot h$ a dostaneme

$$W = (\rho_v - \rho_d)\frac{4}{3}\pi r^3 g \cdot h \doteq 2,5 \text{ J}. \quad (10.2)$$

11 Za čas, kým dôjde električka k priecestiu, musí zvuk zvonenia stihnúť dôjsť k šoférovi a auto sa musí stihnúť uhnúť. Keďže chceme najmenšiu vzdialenosť, aby sa to podarilo, čas, za ktorý dôjde električka k priecestiu (t_e), sa bude rovnať súčtu času, kým dôjde zvuk k autu (t_{zvuk}) a kým auto odíde (t).

Označme hľadanú vzdialenosť medzi električkou a priecestím s . Časy vieme vyjadriť ako

$$t_e = \frac{s}{v} \quad \text{a} \quad t_{\text{zvuk}} = \frac{s}{c}. \quad (11.1)$$

Výrazy dosadíme do rovnosti časov

$$t_e = t_{\text{zvuk}} + t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{v} = \frac{s}{c} + t, \quad (11.2)$$

a z toho už len vyjadríme vzdialenosť

$$s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v}. \quad (11.3)$$

12 Začnime tým, že zistíme, aký veľký povrch to vlastne chceme pokrývať. Zem aproximujeme ako guľu s polomerom $R_{\oplus} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$. Jej povrch vieme vyjadriť ako

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2. \quad (12.1)$$

Zo zadania úlohy vieme, že plocha papiera A0 je 1 m^2 a že veľkosť s rastúcim číslom klesá vždy o polovicu. Napríklad najbežnejší papier veľkosti A4 má plochu $\frac{1}{2^4} \text{ m}^2 = \frac{1}{16} \text{ m}^2$.

Rovnako by sme ale mohli pokračovať opačným smerom k záporným číslam. Papier A-1 by teda mal plochu 2 m^2 a každý ďalší dvojnásobnú... až kým nepresiahneme hodnotu z rovnice 12.1. Na takéto prípady môžeme použiť šikovní funkciu menom logaritmus so základom 2. Tú už vieme spočítať na kalkulačke¹.

Nemali by sme zabudnúť, že ju chceme zaokrúhliť nahor, keďže potrebujeme *najmenší dostatočne veľký* papier. Výsledkom teda bude

$$-[N] = -\lceil \log_2 (5,1 \cdot 10^{14}) \rceil = -49, \quad (12.2)$$

čiže hľadáme papier veľkosti A-49.

13 Dym sa vzhľadom na vzduch nehýbe – to znamená, že vzhľadom na zem sa hýbe spolu so vzduchom rýchlosťou vetra v . Za čas, kým stíhačka dôjde na koniec tribúny, bude začiatok dymovej stopy unášaný opačným smerom a prejde nejakú vzdialenosť. Tento čas bude

$$t = \frac{s}{u} \quad (13.1)$$

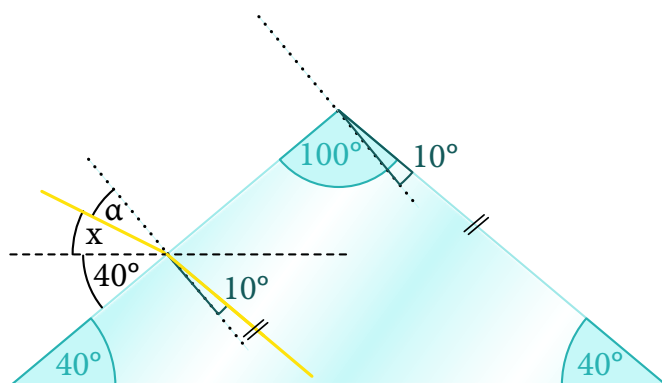
a za tento čas prejde začiatok dymu

$$s_d = vt = v \frac{s}{u}, \quad (13.2)$$

takže dĺžka dymovej stopy teda bude

$$s + s_d = s + v \frac{s}{u} = s \left(1 + \frac{v}{u} \right). \quad (13.3)$$

14 Keďže hranol má väčší index lomu ako vzduch, lúče sa pri dopade naň budú lámať ku kolmici. Aby na druhú stranu hranola ku strážnikovi neprenikli žiadne lúče, treba, aby sa pri dopade na hranol lúče zlomili aspoň rovnobežne so stenou hranola, za ktorou sedí strážnik, alebo smerovali príkrehšie do dolnej podstavy. Z obrázka zbadáme, že na to potrebujeme, aby sa zlomili pod uhlom najviac 10° ku kolmici.



Obrázek 14.1: Prehľad relevantných uhlov v hranoli

¹ Ak to naša kalkulačka priamo nevie, môžeme využiť vzťah $\log_y x = \frac{\log x}{\log y}$, čiže pre $y = 2$ $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$.

Z toho vieme zo Snellovho zákona určiť, pod akým uhlom musia lúče dopadnúť,

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ). \quad (14.1)$$

Keďže hranol je rovnoramenný, vieme určiť, že jeho stený sú oproti vodorovnému smeru pod uhlom 40° . Keď sa teda pozrieme na uhly pri kolmici na rozhranie, zbadáme, že $40^\circ + \gamma + \alpha = 90^\circ$, pričom γ je uhol, pod ktorým musí Robberta nakloniť baterku. Tento uhol je teda

$$\gamma = 50^\circ - \alpha = 50^\circ - \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ) \doteq 25,4^\circ. \quad (14.2)$$

15 V prvom rade si uvedomme, že rýchlosť výťahu nezohráva žiadnu rolu. Ak by Kai činku držal nehybne, pôsobila by na neho silou $m_c g$. Avšak on ju necháva klesnúť so zrýchlením a , teda mu stačí pôsobiť silou $m_c(g - a)$. Lano výťahu okrem tohto potrebuje uniesť aj Kaia aj výťah samotný, teda bude okrem toho potrebovať pôsobiť aj $m_k g$ a $m_v g$, dokopy teda musí pôsobiť silou

$$\begin{aligned} F &= m_k g + m_v g + m_c(g - a) \\ &= 60 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 250 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 20 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s}^2 - 5 \text{ m/s}^2) \\ &= 3200 \text{ N} \doteq 3,2 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

16 Vo všetkých troch prípadoch ide o zvislý vrh v tom istom tiažovom poli, líšia sa iba počiatočnými podmienkami. Bude nám teda stačiť poznať vzorce pre dráhu a trvanie rovnomerne zrýchleného pohybu,

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \quad (16.1)$$

Všimneme si, že druhá polovica hodu nahor je úplne rovnaká ako celý vrh smerom nadol: na úrovni okna vajce určite dosiahne rovnakú rýchlosť v_0 , akou ho Samo hodil. Prvá polovica hodu nahor teda trvá 2 s a za ten čas sa rýchlosť vajca zmení o $2v_0 = g \cdot 2 \text{ s}$. Samo teda zjavne hádže rýchlosťou $v_0 = 10 \text{ m/s}$, čo znamená, že vajce doletí do výšky

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \approx 5 \text{ m} \quad (16.2)$$

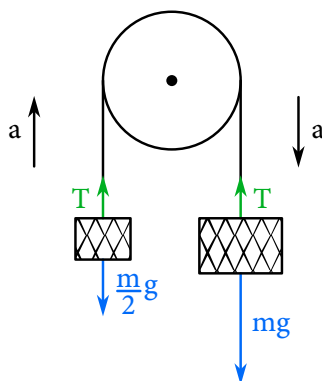
nad úrovňou okna. Zároveň vieme, že v najvyššom bode tohto pohybu sa vajce zastaví, a od toho okamihu ide o najjednoduchší rovnomerne zrýchlený pohyb s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Pád z najvyššieho bodu bude vajcu trvať

$$\tau = t_\uparrow - \frac{t_\uparrow - t_\downarrow}{2} = \frac{t_\uparrow + t_\downarrow}{2} = 3 \text{ s}, \quad (16.3)$$

odkiaľ vieme, že $H = \frac{g\tau^2}{2} = 45 \text{ m}$. Samovo okno je teda vo výške $H - h = 40 \text{ m}$ nad zemou. Voľný pád z tejto výšky trvá

$$\sqrt{\frac{2(H - h)}{g}} = \sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s}. \quad (16.4)$$

17 Začneme s nakreslením si situácie a vyznačením všetkých síl, ktoré v danej sústave pôsobia. Pri popise si plne vystačíme s druhým Newtonovým zákonom $F = ma$.



Obrázek 17.1: Dve závažia na kladke

Na obrázku vidíme, že na závažia pôsobí očakávaná tiažová sila $F_1 = mg$ a $F_2 = \frac{m}{2}g$. Zároveň tam pôsobí aj ťahová sila lana T_1 a T_2 , ktorá vzniká pôsobením síl na lano. Keďže kladka je nehmotná, potrebujeme, aby na pravej aj ľavej strane na ňu lano pôsobilo rovnako veľkými silami; v opačnom prípade by ju roztáčal nenulový moment sily. To by malo za následok, že by nehmotná kladka mala nekonečne veľké uhlové zrýchlenie, čo, ako všetci uznáme, je nemožné. Z toho dôvodu sa $T_1 = T_2$ a ďalej ich budeme značiť T .

Zároveň vieme, že závažia sa budú pohybovať s rovnako veľkým zrýchlením a a očakávame, že ťažšie závažie bude zrýchľovať smerom dole. Po týchto úvahách nám stačí len napísať jednotlivé pohybové rovnice pre obe závažia

$$\frac{m}{2}a = -\frac{m}{2}g + T \quad \text{a} \quad ma = mg - T. \quad (17.1)$$

Ich sčítaním sa vieme zbaviť neznámeho T a vieme si vyjadriť ich zrýchlenie

$$a = \frac{m - \frac{m}{2}}{m + \frac{m}{2}}g = \frac{1}{3}g. \quad (17.2)$$

18 Čísla sú mocniny dvojky, takže musíme rozhodnúť o pravdivosti všetkých tvrdení.

Zvýšenie rýchlosti na orbite (1)

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že ak zvýšime rýchlosť pohybu, mala by sa obežná doba skrátiť. Musíme si ale uvedomiť, že ak zmeníme rýchlosť pohybu telesa na orbite, zmení sa aj tvar jeho orbity. Na posúdenie pravdivostnej hodnoty výroku nám stačí si uvedomiť, že môžeme rýchlosť pohybu zvýšiť až tak, že dosiahneme únikovú rýchlosť. V takom prípade by sa obežná doba stala prakticky nekonečnou, takže by sa určite zvýšila. Výrok je preto **nepravdivý**.

Rýchlosť pohybu v perihéliu (2)

Z druhého Keplerovho zákona priamo vyplýva, že čím je Zem bližšie k Slnku, pohybuje sa rýchlejšie. Výrok je preto **pravdivý**.

Zima (4)

Uvedomme si, že keď je na severnej pologuli zima, na južnej je leto. Ak by platilo predostrené zdôvodnenie, musela by byť zima na oboch pologuliach súčasne. Výrok je preto **nepravdivý**. V skutočnosti Zem je najbližšie k Slnku na začiatku januára, kedy je na severnej pologuli treskúca zima. Alebo aj menej treskúca.

Kruhová orbita a prvá kozmická rýchlosť (8)

Dostredivou silou, ktorá spôsobuje, že je pohyb telesa kruhový, je gravitačná sila, ktorá klesá so vzdialenosťou úmerne $\frac{1}{r^2}$. Dostredivá sa mení ako $\frac{v^2}{r}$. To znamená, že rýchlosť na kruhovej orbite sa s výškou h nad povrchom mení ako $v \propto \frac{1}{R+h}$. Výrok je preto **nepravdivý**.

Geostacionárne družice (16)

Geostacionárne družice sú družice, ktoré sa nachádzajú stále nad tým istým miestom na Zemi. To sa docieli tak, že sa umiestnia v takej výške, aby ich uhlová rýchlosť, ktorou obiehajú okolo Zeme, bola rovná uhlovej rýchlosti rotácie Zeme. Ak majú byť stále nad tým istým miestom, môžu sa pohybovať len v smere rovnobežiek. Ak by sa ale mali pohybovať nad akoukoľvek inou rovnobežkou než nad rovníkom, tiažová sila smerujúca do stredu Zeme by ich ťahala k rovníku, preto by sa na tejto rovnobežke nedokázali udržať. Geostacionárne družice sa teda naozaj môžu nachádzať len nad rovníkom. Výrok je teda **pravdivý**.

Pohyb po elipse (32)

Teleso sa voči ťažisku sústavy pohybuje po elipse, len ak je k ťažšiemu telesu gravitačne viazané (a nemá náhodou kruhovú rýchlosť). Ak má však príliš vysokú rýchlosť, dokáže uniknúť až do nekonečna. Vtedy sa pohybuje po hyperbole alebo parabole. Výrok je teda **nepravdivý**.

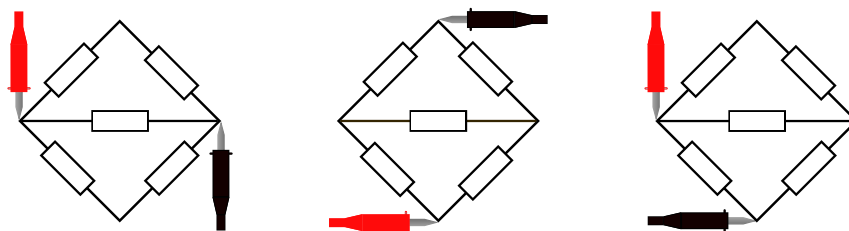
Sčítaním čísel pravdivých výrokov dostávame odpoveď 18.

19 Dobrým prvým krokom je všimnúť si, že všetky hrany a všetky dvojice vrcholov v pravidelnom štvorstene sú rovnocenné. Je teda úplne jedno, ako ho otočíme a na ktoré dva vrcholy ohmmeter na začiatku pripojíme – výsledok to nezmení; rôzne odpory nameriame až po odstránení rezistora.

Preto môžeme riešiť ekvivalentnú, ale trochu jednoduchšiu úlohu: najprv odstránime ľubovoľný jeden rezistor a až potom na niektoré dva vrcholy pripojíme svorky ohmmetra.

Hneď by sme mali vidieť, že musíme vyriešiť² len tri rôzne prípady z obrázka 19.1:

²Použijeme pritom skrátené značenie pre odpor dvoch paralelných vetiev, $a \parallel b \equiv \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.



Obrázek 19.1: Tri možné merania odporu na štvorstene bez jedného rezistora

- Ak ho pripojíme na dva vrcholy, na ktoré odstránený rezistor nebol pripojený, ostane nám tri paralelné vetvy s jedným, dvomi a dvomi rezistormi, pre ktoré vieme celkový odpor spočítať priamo ako

$$R_1 = R \parallel (R + R) \parallel (R + R) = R \parallel 2R \parallel 2R = \frac{1}{2}R. \quad (19.1)$$

- Ak svorky pripojíme na dva vrcholy, medzi ktorými už po novom žiadny rezistor nie je, dostaneme príjemne jednoduché zapojenie s dvomi paralelnými vetvami s dvomi rezistormi. Keďže je teraz zapojenie úplne súmerné, medzi koncami posledného rezistora nemôže byť žiadne napätie a kde nie je napätie, nie je ani prúd. Preto je jeho odpor

$$R_2 = (R + R) \parallel (R + R) = 2R \parallel 2R = R. \quad (19.2)$$

- A napokon ak svorky ohmmetra pripojíme na jeden nedotknutý vrchol a jeden vrchol bez rezistora, ostane nám netriviálne sériovoparalelné zapojenie s odporom

$$R_3 = R \parallel (R + (R \parallel 2R)) = R \parallel \left(R + \frac{2}{3}R\right) = R \parallel \frac{5}{3}R = \frac{5}{8}R. \quad (19.3)$$

Tieto tri hodnoty sú navzájom rôzne, takže odpoveďou je množina $\left\{\frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R\right\}$.

20 Aby sa nám ľahšie zoraďovalo, rozdelíme si písmenká do niekoľkých skupín. Hneď by sme mali poňať podozrenie, že mnohé písmená veru samy stáť nebudú.

Napríklad j a c stoja na jedinom bode, avšak ich ťažisko nie je priamo nad týmto bodom, preto sa okamžite prevrátia. Podobne sa okamžite prevráti aj p. To síce stojí na základni malej konečnej dĺžky, ale jeho ťažisko sa taktiež určite nachádza viac napravo.

Do druhej skupiny patria písmená o a s. Tie síce samy od seba nespádnu, pretože ich ťažiská sa nachádzajú priamo nad bodmi, ktorými sa dotýkajú podložky; stačí do nich však ťuknúť ľubovoľne malým impulzom a prevrátia sa.

Ďalšiu kategóriu tvoria písmená i a v. Keďže hrúbka tyčiek je nenulová, stoja stabilne; je však oveľa menšia než ostatné rozmery tyčiek a stačí do nich ťuknúť malým (ale narozdiel od o a s *konečne* malým) impulzom a prevrátia sa. Z nich dvoch má v výrazne viac hmoty, ale jeho ťažisko je tiež o trochu vyššie. Spočítajme si, ktoré z týchto dvoch písmen je stabilnejšie.

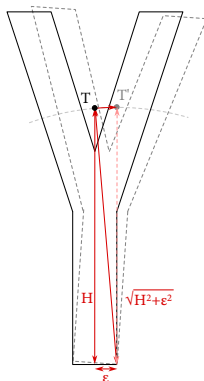
Uvažujme písmeno s hmotnosťou m , ktoré má ťažisko vo výške H a pre ktoré hrana, cez ktorú chce spadnúť, je vzdialená o ε v horizontálnom smere od ťažiska. Pri prevracaní písmenka cez hranu sa jeho potenciálna energia zvýši o

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg(\sqrt{H^2 + \varepsilon^2} - H). \quad (20.1)$$

Toto je práca, ktorou kvantifikujeme stabilitu písmena. Pre $\varepsilon \ll H$ platí

$$\sqrt{H^2 + \varepsilon^2} \approx H \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2H^2} \right) \Rightarrow W \approx \frac{mg\varepsilon^2}{2H}. \quad (20.2)$$

Pri stabilite je teda podstatný pomer $\frac{m\varepsilon^2}{H}$. Písmenko, ktoré má tento pomer väčší, je stabilnejšie, pričom hmotnosť písmenka je úmerná súčtu dĺžok jeho paličiek.



Obrázek 20.1: Preklápanie ypsilonu. Na preklopenie ypsilonu ho treba zdvihnúť do čiarkovanej polohy. Vidíme, že jeho ťažisko T' je v tejto polohe vyššie, než T v pôvodnej polohe.

Písmenká I a Y majú rovnaký ε . Rozhodujúci je teda pomer $\frac{m}{H}$. Nech má jeden štvorček štvorčekovej siete stranu jednotkovej dĺžky a tyč písmenka tejto dĺžky jednotkovú hmotnosť. Potom pre I je výška ťažiska 4 a jeho hmotnosť 8, čiže pomer $\frac{m}{H}$ je 2. Pre Y je H približne 4,76 a hmotnosť cca 12,9, preto pomer určujúci stabilitu je približne 2,7. Y je preto stabilnejší ako I.

Podme ďalej. Písmená N, A a H majú všetky ťažisko presne v strede im opísaného obdĺžnika, teda vo výške štyroch štvorčekov, a prevracajú sa okolo bodu na okraji, ktorý sa vo všetkých prípadoch nachádza dva štvorčeky od stredu horizontálnym smerom. Stabilita je teda určená jedine ich hmotnosťou. Jednoduchým sčítaním dĺžok tyčiek zistíme, že najväčšiu hmotnosť má N, potom H a napokon A.

Ešte zostáva posledný problémový solitér – B. To spočíva na spodku na rovnej paličke dĺžky 2, na ktorú nadväzuje polkružnica s polomerom 2. Ak by sa jeho ťažisko nachádzalo viac ako dva štvorčeky od jeho zvislej paličky, mali by sme vybavené. Avšak približným výpočtom zistíme, že jeho ťažisko je od zvislej paličky vzdialené o málo viac než³

$$x = \frac{8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4\pi \cdot 3}{14 + 4\pi} \doteq 1,645. \quad (20.3)$$

³Ide len o dolný odhad, pretože ťažisko polkružnice je o kúsok bližšie k jej okraju, preto jeho súradnica je o málo väčšia než 3.

To znamená, že ťažisko B je od hrany, cez ktorú ho chceme preklopiť, vodorovne vzdialené o menej než 0,355, čo je rozhodne menej ako v prípade písmen z predchádzajúcej skupiny, no viac ako pre I a Y, takže v rade stability bude ležať medzi nimi.⁴

Odpoveďou je teda postupnosť N, H, A, B, Y, I. Zvyšné písmená buď spadnú úplne samy, alebo na ich prevrátenie stačí ľubovoľne malá práca.

21 Prítok do nádrže Q je podľa zadania konštantný. Rýchlosť vytekania cez malú dierku naspodu nádrže však bude závisieť aj od hydrostatického tlaku, a ten zase od výšky hladiny v nádrži h . Vyriešiť časový priebeh takéhoto deja je pravdepodobne nad naše sily.⁵ Našťastie ani netreba, lebo zadanie úlohy na časový priebeh nie je zvedavé, zaujíma ho iba jeden konkrétny parameter a ten sa dá určiť jednoduchšie.

Asymptota pri $t \rightarrow \infty$ určuje maximálnu výšku hladiny v nádrži $h_{\max} = 80$ cm – teda takú, pri ktorej je hydrostatický tlak na dne dostatočný na to, aby voda vytekala rovnako rýchlo, ako stíha pritekať. Z Bernoulliho rovnice vieme určiť rýchlosť vytekania ako funkciu výšky hladiny v nádrži,

$$\rho \frac{v^2(h)}{2} = \rho gh \quad \Rightarrow \quad v(h) = \sqrt{2gh}. \quad (21.1)$$

Potom dokážeme z grafu odčítať bodkovanú dotyčnicu v $t = 0$. Vtedy je ešte výška hladiny nulová, takže aj hydrostatický tlak je takisto nulový a voda ešte v prvom okamihu neodteká, ako keby tam ani žiadna diera nebola. Bez diery by sa tak nádrž zjavne zaplnila za čas $\tau = 1$ h. Odtiaľ vieme vyjadriť prítok ako

$$Q = \frac{h_{\max} \cdot S}{\tau}. \quad (21.2)$$

Vieme, že pri výške hladiny $h_{\max} = 80$ cm bude prítok rovný odtoku, ktorý je zas daný súčinom rýchlosti vytekania a neznámej plochy diery A. Vtedy platí

$$Av = A\sqrt{2gh_{\max}} = Q, \quad (21.3)$$

a po dosadení za Q z rovnice 21.2 dostávame výsledok

$$A = \frac{Q}{\sqrt{2gh_{\max}}} = \frac{S}{\tau} \sqrt{\frac{h_{\max}}{2g}} = 56 \text{ mm}^2. \quad (21.4)$$

22 Hneď vieme spočítať, že v mlieku je presne 100 ml jogurtu, keďže to je zo zadania 10 % z 1 l. Keď je mlieko usadené, na vrchu je len voda, čiže koncentrácia jogurtu je 0 %. Aby bola priemerná koncentrácia 10 %, koncentrácia naspodku musí byť 20 %, a teda rastie o 2 % na každých 100 ml. Horných 200 ml má teda priemernú koncentráciu 2 %, čiže spolu 4 ml jogurtu.

Zostávajúci objem vo fľaši je 800 ml a zostávajúci objem jogurtu je 96 ml. Pri pretrepaní sa koncentrácia zhomogenizuje, teda bude $\frac{96 \text{ ml}}{800 \text{ ml}} = 12$ %. Z tohto Piškót odlial 200 ml, čiže 24 ml jogurtu.

⁴Pre B je ε dostatočne menšie než výška ťažiska, takže na vyšetrenie stability možno použiť rovnakú stratégiu ako pri I a Y. Nemusíme to však poctivo spočítať, pretože B má ďaleko väčší ε , a ten navyše v pomere stability vystupuje v druhej mocnine, takže B bude určite s prehľadom stabilnejšie.

⁵Vedie to na Chiniho diferenciálnu rovnicu $\frac{dh}{dt} = \alpha + \beta\sqrt{h}$, ktorej riešenie obsahuje Lambertovu W-funkciu a exponenciálu a ktorú určite riešiť nechceme, ani ak to náhodou vieme.

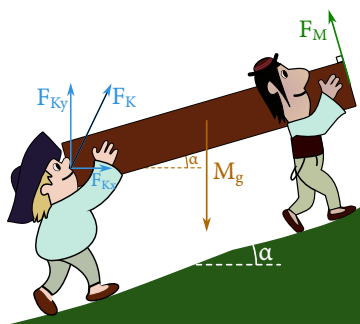
Nakoniec už len sčítame objem jogurtu v pohári,

$$4 \text{ ml} + 24 \text{ ml} = 28 \text{ ml}, \quad (22.1)$$

a vypočítame celkovú koncentráciu ako podiel objemu jogurtovej zložky a celkového objemu, čiže

$$\frac{28 \text{ ml}}{400 \text{ ml}} = 7 \%. \quad (22.2)$$

23 Zadanie implikuje, že bremä je naklonené voči horizontálnemu smeru o uhol α . Na stred bremena pôsobí zvislo nadol tiažová sila Mg , na jeho horný koniec pôsobí Maťko kolmo na jeho povrch silou F_M a na jeho dolný koniec pôsobí Kubko nejakou orientovanou silou F_K . Túto silu možno rozložiť na horizontálnu zložku F_{Kx} a vertikálnu zložku F_{Ky} .



Obrázek 23.1: Rozklad síl, ktorými na bremä pôsobia Maťko a Kubko

V rovnovážnej polohe možno písať

- pre sily vo vertikálnom smere $Mg = F_M \cos \alpha + F_{Ky}$;
- pre sily v horizontálnom smere $F_M \sin \alpha = F_{Kx}$;
- pre momenty síl vzhľadom na dolný koniec bremena $Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = F_M L$.

Vyriešením tejto sústavy rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} F_M &= \frac{1}{2} Mg \cos \alpha, \\ F_{Kx} &= \frac{1}{2} Mg \sin \alpha \cos \alpha, \\ F_{Ky} &= \frac{1}{2} Mg + \frac{1}{2} Mg \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (23.1)$$

Sila, ktorou pôsobí Kubko, je

$$F_K = \sqrt{F_{Kx}^2 + F_{Ky}^2} = \frac{1}{2} Mg \sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}, \quad (23.2)$$

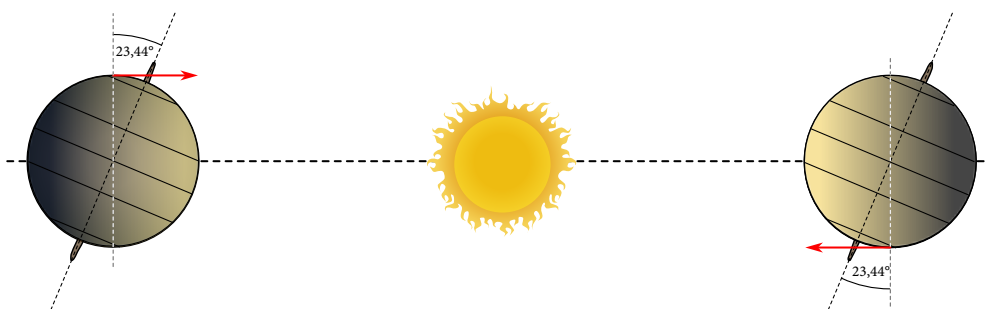
a hľadaný pomer síl konečne

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}}. \quad (23.3)$$

24 Hneď si všimneme, že zemepisná dĺžka nás nemusí zaujímať: deň je omnoho kratší než rok a poloha Slnka sa v smere východ-západ mení omnoho rýchlejšie, než v smere sever-juh. Počas jedného dňa teda môžeme zemepisnú šírku Slnka považovať za konštantnú a stačí nám pozerať sa na zemepisnú šírku.

Sklon zemskej osi určuje, ako ďaleko na sever alebo na juh sa Slnko počas roka vie dostať. Tieto rovnobežky sa nazývajú obratníky Raka (júnový slnovrat) a Kozorožca (decembrový slnovrat). Zároveň v decembri, keď je Slnko najviac na juhu, severná polárna oblasť Slnko nevidí vôbec. Najjužnejšia rovnobežka, kde toto môže nastať, sa nazýva severná polárna kružnica. To isté sa deje na juhu, akurát opačne a o pol roka neskôr. Zemepisná šírka obratníkov je $\varepsilon_{\oplus} = \pm 23,44^\circ$ a zemepisná šírka polárnych kružníc je $\pm(90^\circ - \varepsilon_{\oplus}) \approx \pm 66,56^\circ$.

Celú situáciu môžeme vidieť na obrázku 24.1.



Obrázek 24.1: Vzájomná poloha Zeme a Slnka pri júnovom a decembrovom slnovrate

Tieto kružnice povrch Zeme delia na päť oblastí, kde sa poloha Slnka na oblohe počas roka správa rôzne:

- V južnej polárnej oblasti aspoň raz ročne nastáva polárny deň, keď Slnko nezapadne vôbec. Pri svojom obehu okolo obzoru teda nutne pretne aj severný smer.
- Medzi obratníkom Kozorožca a južnou polárnou kružnicou môžeme Slnko vidieť na severe každý deň bez ohľadu na ročné obdobie presne na pravé poludnie.
- V tródoch, teda medzi obratníkmi, môže byť Slnko na poludnie na severe alebo na juhu podľa ročného obdobia. Nás zaujíma júnový slnovrat, keď Slnko dosiahne svoju najsevernejšiu polohu, a teda na poludnie bude na severe.
- V oblastiach severného mierneho pásma, t. j. medzi obratníkom Raka a severnou polárnou kružnicou, vidíme Slnko na poludnie len na juhu. O polnoci sa síce nachádza severným smerom, je však pod obzorom, a teda ho nevidíme.
- Nakoniec, vnútri severnej polárnej kružnice Slnko pri júnovom slnovrate nezapadá vôbec. Opäť počas svojho obehu teda nutne pretne aj severný smer, akurát sa to nedeje na poludnie, ale o polnoci. Jedinou výnimkou je samotný severný pól, kde sú všetky svetové strany „juh“; to je však iba jeden bod a do plochy neprispieva.



Obrázek 24.2: Zem s vyznačenými oblasťami, kde je možné Slnko vidieť na severe

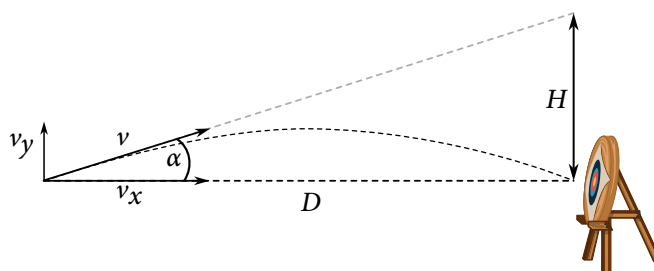
Ostáva nájsť súčet plôch všetkých oblastí južne od obratníka Raka $S_{\downarrow}$ a plochy za severným polárnym kruhom $S_{\uparrow}$, ktoré sú vyznačené na obrázku 24.2. Ten vieme spočítať napríklad pomocou vzorca pre povrch guľového vrchlíka. V ňom budeme potrebovať výšky oboch oblastí: pre polárnu čiapočku je to $h_{\uparrow} = R(1 - \cos \varepsilon)$ a pre oblasť južne od obratníka Raka zas $h_{\downarrow} = R(1 + \sin \varepsilon)$. Čiže spolu

$$S = S_{\downarrow} + S_{\uparrow} = 2\pi R h_{\downarrow} + 2\pi R h_{\uparrow} = 2\pi R (h_{\downarrow} + h_{\uparrow}) = 2\pi R^2 (1 - \cos \varepsilon + 1 + \sin \varepsilon) = 2\pi R^2 (2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon) \quad (24.1)$$

a keďže nás zaujíma pomer k povrchu celej Zeme $S_{\oplus}$, odpoveďou je

$$\frac{S}{S_{\oplus}} = \frac{2\pi R^2 (2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon)}{4\pi R^2} = \frac{2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon}{2} \doteq 0,74 = 74 \%. \quad (24.2)$$

25 Dano, ako správny lukostrelec, premýšľa nad tým, kam má mieriť. Pozná vzdialenosť terča $d = 70$ m a rýchlosť $v_0 = 50$ m/s. Aby vedel, na ktorý bod musí namieriť, hneď pri výstrele si nakreslí obrázok sústavy.



Obrázek 25.1: Výstrel z luku na terč

Ako prvé si všimne, že bod, na ktorý mieri, je vo výške H nad stredom terča a vie si preň vyjadriť vzťah

$$\tan \alpha = \frac{H}{D}. \quad (25.1)$$

Ostáva mu už len vyjadriť $\tan \alpha$, ktorý sa objavuje aj pri rozklade počiatkovej rýchlosti do x -ového a y -ového smeru

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \quad (25.2)$$

V y -ovom smere pôsobí na šíp len tiažová sila, preto v tomto smere platí

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (25.3)$$

pričom nás zaujíma dopad šípu do roviny terča, teda $y = 0$. To sa udeje za čas

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.4)$$

V x -ovom smere nepôsobí na šíp žiadna sila, preto medzi časom t a vzdialenosťou D platí

$$D = v_x t = v \cos \alpha \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.5)$$

Keďže H a D sú previazané skrzevá tangens uhla, použijeme goniometrické identity

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}. \quad (25.6)$$

Po dosadení do rovnice pre dĺžku dostrelu dostávame

$$D = \frac{2v^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}. \quad (25.7)$$

Za $\tan \alpha$ dosadíme H/D podľa rovnice 25.1 a po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$H^2 - \frac{2v^2}{g} H + D^2 = 0, \quad (25.8)$$

ktorej riešením je⁶

$$H = \frac{v^2}{g} - \sqrt{\frac{v^4}{g^2} - D^2} \approx 10 \text{ m}. \quad (25.9)$$

26 Začnime tým, že si kvantifikujeme definujúce jednotky glg-grg-mrk systému. S objemom a časom nebudeme mať veľký problém. Zo zadania vieme, že

$$V = 1 \text{ glg} = \frac{1 \text{ pt}}{20} \approx \frac{473 \text{ ml}}{20} = 23,65 \text{ ml} \quad (26.1)$$

a $t = 1 \text{ mrk} = 0,5 \text{ s}$. Určiť intenzitu zvuku bude o epsilon ťažšie. Nech I je intenzita zvuku 1 grg. Vieme, že je definovaná ako intenzita zvuku zodpovedajúca hladine intenzity zvuku 100 dB, čiže 10 B. Na základe

⁶Vybrali sme menší koreň.

definície hladiny intenzity zvuku $L = \log \frac{I}{I_0}$, kde $I_0 = 1 \text{ pW/m}^2$, vieme písať $10 \text{ B} = \log \frac{I}{I_0}$, odkiaľ

$$I = 10^{10} I_0 = 10^{10} \cdot 1 \text{ pW/m}^2 = 10^{-2} \text{ W/m}^2. \quad (26.2)$$

Teraz potrebujeme nakombinovať veličiny V , t a I , aby sme dostali niečo rozmeru kg . Hľadáme teda výraz v tvare $m = V^\alpha \cdot t^\beta \cdot I^\gamma$. Má platiť, že $[V]^\alpha \cdot [t]^\beta \cdot [I]^\gamma$, kde $[A]$ značí rozmer (t. j. jednotku) veličiny A , dá rozmer hmotnosti. Dostávame

$$[m] = (\text{m}^3)^\alpha \cdot \text{s}^\beta \cdot (\text{kg/s}^3)^\gamma = \text{m}^{3\alpha} \cdot \text{kg}^\gamma \cdot \text{s}^{\beta-3\gamma} \stackrel{!}{=} \text{m}^0 \cdot \text{kg}^1 \cdot \text{s}^0. \quad (26.3)$$

Z toho okamžite vidíme, že $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ a $\beta = 3$, teda

$$m = t^3 I = (0,5 \text{ s})^3 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2 = \frac{1}{800} \text{ kg} = 1,25 \text{ g}. \quad (26.4)$$

Teraz už nám nič nebráni vyčíslieť Johnovu hmotnosť v jeho prirodzených jednotkách,

$$M = 200 \text{ lb} \approx 90\,718 \text{ g} = 72\,575 \text{ grg} \cdot \text{mrk}^3. \quad (26.5)$$

27 Najväčší tlak vo veľkej nádobe dosiahneme tak, že k nej postupne pripojíme všetkých päť menších nádob, pretože chceme maximalizovať rozdiel medzi tlakom vo veľkej nádobe a malej pripojenej nádobe. Vtedy totiž maximalizujeme množstvo plynu presunutú z menšej nádoby do väčšej. Pozrime sa na situáciu, ak by mal dusikár len dve malé nádoby, označené 1 a 2. Normálny postup je postupne pripojiť malé fľaše 1 a 2 k veľkej nádobe. V malých fľašiach takto zostanú tlaky p_1 a p_2 , pričom vo veľkej nádobe zostane tlak p_2 . Alternatívny postup je pripojiť malú nádobu 1, potom vyrovnať tlaky medzi nádobami 1 a 2, a potom postupne pripojiť nádoby 1 a 2. Týmto spôsobom síce pripojíme viackrát malé nádoby k veľkej, pričom v nádobe 1 zostane tlak p'_1 , ktorý je väčší ako p_1 , a teda výsledný tlak p'_2 vo veľkej nádobe (a tiež malej nádobe 2) bude menší ako p_2 . Preto sa neoplatí vyrovnávať tlaky medzi malými nádobami.

Zo stavovej rovnice ideálneho plynu vieme, že látkové množstvo plynu v malej aj veľkej nádobe pred tým, ako ich k sebe pripojíme, zistíme zo stavovej rovnice plynu ako $n = \frac{pV}{RT}$. Vieme, že celkové látkové množstvo n pred aj po tom, ako k sebe fľaše pripojíme, musí byť rovnaké, teda súčet n vo veľkej a malej fľaši pred pripojením sa musí rovnať celkovému n po pripojení. Ak si veličiny popisujúce malú fľašu označíme dolnými indexmi m , veľkú nádobu v a celkový stav po pripojení c , platí

$$\frac{p_v V_v}{RT} + \frac{p_m V_m}{RT} = \frac{p_c V_c}{RT}. \quad (27.1)$$

Keďže teplota aj univerzálna plynová konštanta R sú počas celého procesu rovnaké, vieme si celkový (vyrovnaný) tlak po pripojení fliaš vyjadriť ako

$$p_c = \frac{p_v V_v + p_m V_m}{V_c}. \quad (27.2)$$

Vidíme, že všetky tieto informácie s výnimkou tlaku vo veľkej fľaši p_v poznáme zo zadania. Pred pripojením prvej malej fľaše je tento tlak nulový, avšak po každom ďalšom pripojení tento tlak zvýšime – a nový výsledný tlak v spojených fľašiach samozrejme závisí od toho, aký tlak bol vo veľkej fľaši predtým.

Výpočet pre p_c teda spravíme päťkrát; prvýkrát za p_v dosadíme 0 a každý ďalší raz zaň dosadíme p_c , ktoré nám vyšlo naposledy. Ako posledné piate p_c dostaneme presne $\frac{23255}{7776}$ MPa, alebo približne 3 MPa.

28 Platňu treba roztočiť na uhlovú rýchlosť

$$\omega = \frac{100}{3} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{9}\pi \text{ rad/s}.$$

Rotačná energia, ktorú jej treba dodať teda bude $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$. Keďže moment zotrvačnosti plného disku je $J = \frac{1}{2}mr^2$, kde r je polomer disku, môžeme ho dosadiť za J a dostaneme energiu

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} mr^2 \omega^2. \quad (28.1)$$

Vieme, aké napätie a prúd gramofón vyžaduje, a že výkon, ktorým bude platňa roztáčaná, bude $P = UI$. Čas teraz jednoducho určíme ako potrebnú energiu predelenú výkonom,

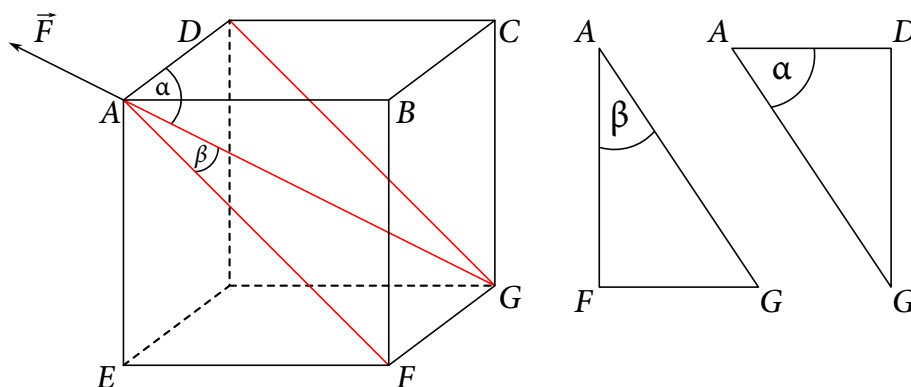
$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{P} = \frac{\frac{1}{4}m\left(\frac{d}{2}\right)^2\omega^2}{UI} = \frac{200 \text{ g} \cdot (15 \text{ cm})^2 \cdot \left(\frac{10}{9}\pi \text{ rad/s}\right)^2}{4 \cdot 5 \text{ V} \cdot 100 \text{ mA}} \approx 0,302 \text{ s}. \quad (28.2)$$

29 Skôr, ako sa pustíme do počítania, musíme zadanie preložiť do zrozumiteľného jazyka.

Na to, aby celá sústava bola v rovnováhe, musí byť výslednica síl na každý náboj nulová. Vďaka symetrii nám stačí pozerať sa na sily pôsobiace len na jeden náboj vo vrchole kocky. Príťažlivou silou naň pôsobí jedine náboj v strede, ktorého veľkosť hľadáme; zvyšné náboje pôsobia odpudivými silami – tri náboje vo vzdialenosti hrany kocky, tri náboje vo vzdialenosti stenovej uhlopriečky a nakoniec náboj vo vzdialenosti telesovej uhlopriečky. Označme si dĺžku hrany kocky a . Stenová uhlopriečka potom má dĺžku $\sqrt{2}a$ a telesová uhlopriečka $\sqrt{3}a$.

Každú zo síl pôsobiacu na vybraný vrcholový náboj vieme rozložiť na dve zložky – v smere výslednice, teda v smere telesovej uhlopriečky, a zvyšok, v niektorom smere kolmom na výslednicu. Zložky kolmé na telesovú uhlopriečku sa navzájom vďaka symetrii vyrušia a zložky v smere telesovej uhlopriečky sa sčítajú do výslednice. Preto nás zaujíma kosínus uhla medzi telesovou uhlopriečkou a hranou kocky a medzi telesovou uhlopriečkou a stenovou uhlopriečkou.

Na chvíľu prestaň čítať, toto je povinný vibe check.



Obrázek 29.1: Skibidikocka

Ok, vibe check passed. Ďalej vypočítajme ako prvú silu od náboja vzdialeného po hrane kocky. Kosínus potrebného uhla zistíme z pravouhlého trojuholníka ADG ako

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (29.1)$$

Sila teda bude

$$F_h = -k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2}. \quad (29.2)$$

Ďalej sa pozrime na silu od náboja vzdialeného po stenovej uhlopriečke. Kosínus potrebného uhla zistíme z pravouhlého trojuholníka AFG ako

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad (29.3)$$

Sila teda bude

$$F_s = -k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2}. \quad (29.4)$$

Pri sile od náboja vzdialeného po telesovej uhlopriečke nemusíme riešiť žiaden uhol, čiže sila bude

$$F_t = -k \frac{q^2}{3a^2}. \quad (29.5)$$

Ako poslednú musíme vyriešiť silu od náboja v strede. To je rovnaká situácia ako pri telesovej uhlopriečke, len vzdialenosť je polovičná. Preto sila bude

$$F_{\text{stred}} = 4k \frac{qQ}{3a^2}. \quad (29.6)$$

Výslednica síl teda bude

$$F = F_{\text{stred}} - 3F_h - 3F_s - F_t = 0. \quad (29.7)$$

Po dosadení

$$\begin{aligned} 4k \frac{qQ}{3a^2} &= -3k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2} - 3k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2} - k \frac{q^2}{3a^2}, \\ 4 \frac{Q}{3} &= -3 \frac{q}{\sqrt{3}} - 3 \frac{\sqrt{2}q}{2\sqrt{3}} + \frac{q}{3}, \\ Q &= -\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} q. \end{aligned} \quad (29.8)$$

V strede teda musí byť náboj $Q \doteq -2,47$ C. GG EZ.

30 Napíšme si rovnice, ktoré opisujú šikmý vrh

$$\begin{aligned} y &= v \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} a t^2, \\ x &= v \cos(\alpha) t. \end{aligned} \quad (30.1)$$

Na Mesiaci musia platiť rovnako, akurát tiažové zrýchlenie je iné: ak dosadíme $a = 0,16g$, má platiť

$$\begin{aligned} y_{\text{L}} &= v_{\text{L}} \sin(\alpha) t_{\text{L}} - \frac{1}{2} 0,16g t_{\text{L}}^2, \\ x_{\text{L}} &= v_{\text{L}} \cos(\alpha) t_{\text{L}}. \end{aligned} \quad (30.2)$$

Polohu na videu nemáme ako oklamať. Aby rovnice pre x a y ostali rovnaké, potrebujeme upraviť čas a rýchlosť. Vidíme, že

$$0,16t_{\text{L}}^2 = t_{\oplus}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{L}} = \frac{1}{\sqrt{0,16}} t_{\oplus} = \frac{1}{0,4} t_{\oplus} = 2,5t_{\oplus}. \quad (30.3)$$

Z rovnice pre x_{L} teraz vidíme, že

$$x_{\text{L}} = v_{\text{L}} \cos(\alpha) 2,5t_{\oplus}, \quad (30.4)$$

takže $v_{\text{L}} = 0,4v_0$, aby sa rovnica 30.4 rovnala predpisu pre x v rovnici 30.1. Na Mesiaci by teda celý tento šikmý vrh trval 2,5-krát dlhšie, čo znamená, že zemské video musíme prehrať s 2,5-krát menšou snímkovou frekvenciou, čiže 24 Hz. To znamená, že akurát prejdeme z televíznej frekvencie na filmovú.

Náhoda? My si myslíme, že nie.

31 Považujme tepelné čerpadlo za tepelný stroj, ktorý odoberá energiu z elektrickej siete a prečerpáva teplo z Adamovej pivnice do Justíninej pivnice. Kľúčom k vyriešeniu úlohy je uvedomiť si, ako je účinnosť definovaná.

Vo všeobecnosti možno povedať, že účinnosť je podiel toho, čo chceme dosiahnuť, k tomu, čo do toho musíme investovať. V prípade Justíny je to, čo chceme dosiahnuť, množstvo tepla, ktoré tepelné čerpadlo odovzdá do jej pivnice, Q_{out} , a to, čo musíme investovať, je množstvo dodanej elektrickej energie zo siete, ktoré je rovné práci vykonanej na pracovnom plyne v čerpadle, W . ňou pozorovaná účinnosť je teda $\eta_J = \frac{Q_{\text{out}}}{W} = 1500 \%$.

V prípade Adama je to, čo chceme dosiahnuť, množstvo tepla odčerpaného strojom z jeho pivnice, Q_{in} , a to, čo musíme investovať, opäť množstvo dodanej elektrickej energie W , teda ním pozorovaná účinnosť je $\eta_G = \frac{Q_{\text{in}}}{W}$.

Tepelné čerpadlo odčerpáva teplo Q_{in} z Adamovej pivnice a dodáva mu energiu W zo siete a odovzdáva teplo Q_{out} do Justíninej pivnice. Energetická bilancia písaná pre tepelné čerpadlo je teda $Q_{\text{in}} + W = Q_{\text{out}}$.

Využívajúc tento vzťah možno účinnosť pozorovanú Adamom vyjadriť ako $\eta_G = \frac{Q_{\text{out}} - W}{W} = \eta_J - 1 = 1400 \%$.

32 Pozrime sa na situáciu v zadaní z pohľadu energií. Na začiatku dňa má ISS nejakú energiu, ktorá je daná súčtom jej potenciálnej a kinetickej energie. Po jednom dni pôsobenia odporovej sily atmosféry má ISS o niečo menšiu energiu, pretože pôsobí proti smeru jej pohybu.

Označme indexom 1 energie na začiatku a indexom 2 energie na konci dňa. Zákon zachovania energie je

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} + W, \quad (32.1)$$

kde E_p sú potenciálne energie, E_k sú kinetické energie a W je práca, ktorú vykoná odporová sila na ISS.

ISS obieha po kruhovej dráhe, čiže jej rýchlosť ľahko vyjadríme z rovnosti gravitačnej a dostredivej sily. Pre naše účely je výhodnejšie rovno si napísať jej druhú mocninu⁷

$$v^2 = \frac{GM_{\oplus}}{r}, \quad (32.2)$$

kde $M_{\oplus}$ je hmotnosť Zeme a $r = R_{\oplus} + 400 \text{ km}$ je vzdialenosť ISS od stredu Zeme, pričom $R_{\oplus}$ je samopochopteľne polomer Zeme. Ešte označme hmotnosť ISS m a denný pokles Δr . S týmito informáciami vieme rovnicu 32.1 napísať ako

$$-\frac{GM_{\oplus}m}{r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r} = -\frac{GM_{\oplus}m}{r - \Delta r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r} + W. \quad (32.3)$$

Odtiaľ vyjadríme prácu odporovej sily

$$W = \frac{GM_{\oplus}m}{2} \left(\frac{1}{r - \Delta r} - \frac{1}{r} \right). \quad (32.4)$$

Odporová sila F pôsobí proti smeru pohybu, preto po prejdení dráhy s vykoná táto sila prácu $W = Fs$. Akú dráhu prejde ISS za deň? Keďže Δr je oveľa menšie ako polomer kružnice, nemusíme rátať dĺžku špirály, po ktorej ISS v skutočnosti pôjde. Dosť dobrý výsledok dostaneme, ak budeme predpokladať, že ISS krúži celý

⁷Lebo ju budeme dosádzať do predpisu pre kinetickú energiu.

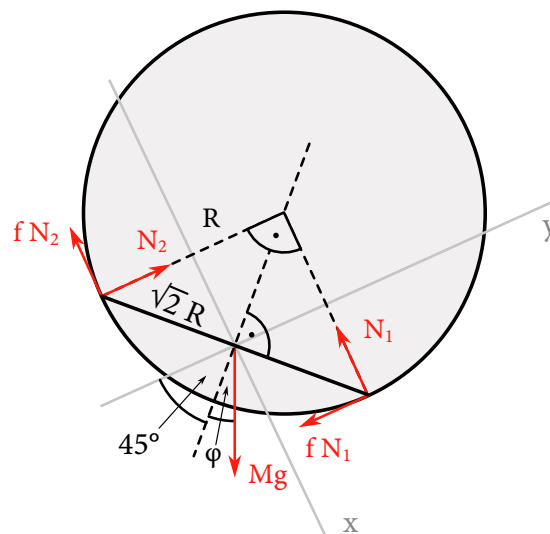
deň vo výške $r - \Delta r/2$ rýchlosťou, ktorá danej výške prislúcha podľa rovnice 32.2, teda

$$s = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r/2}} T, \quad (32.5)$$

kde T je jeden deň. Nakoniec už len z rovníc 32.4 a 32.5 dosadíme do

$$F = \frac{W}{s} \doteq 0,26 \text{ N}. \quad (32.6)$$

33 Uvažujme, že rolku narotujeme o maximálny možný uhol. Vtedy normála na ISIC zvierá so zvislým smerom uhol φ .



Obrázek 33.1: Rolka so zakreslenými pôsobiacimi silami

Na hrany ISICu pôsobia normálové sily N_1 a N_2 kolmo na povrch rolky, a teda do stredu rolky. V smere dotýčnice zase pôsobia trecie sily, ktorých veľkosti v hraničnom prípade sú $f N_1$ a $f N_2$. Na stred ISICu pôsobí zvislo nadol tiažová sila Mg .

Veľkosť ISICu je práve taká, že spolu s vektorovými priamkami normálových síl tvorí pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky R a preponou $\sqrt{2}R$. To okrem iného znamená, že sily N_1 a $f N_2$ majú rovnaký smer, ktorý je kolmý na smer síl N_2 a $f N_1$. To nás nabáda zvoliť si súradnicovú sústavu tak, aby súradnicové osi boli orientované v týchto dvoch smeroch, čiže natočené o 45° oproti ISICu. Potom sa tiažová sila rozkladá do zložiek $Mg \cos(\frac{\pi}{4} - \varphi)$ a $Mg \cos(\frac{\pi}{4} + \varphi)$.

Teraz už môžeme písať podmienky stability:

- rovnováha síl v x -ovom smere,

$$N_1 + f N_2 = Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right); \quad (33.1)$$

- rovnováha síl v y -ovom smere,

$$N_2 = f N_1 + M g \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right); \quad (33.2)$$

- a rovnováha momentov síl vzhľadom na stred ISICu,

$$N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = f N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (33.3)$$

odkiaľ

$$N_1 = f N_1 + N_2 + f N_2. \quad (33.4)$$

Vylúčením normálových síl dostaneme

$$\underbrace{\frac{1 + 2f - f^2}{1 - 2f - f^2}}_K = \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} \quad (33.5)$$

a odtiaľ

$$\tan \varphi = \frac{K - 1}{K + 1} = \frac{2f}{1 - f^2}. \quad (33.6)$$

Pre $f = 0,3$ dostávame $\varphi \approx 33,4^\circ$.

34 Začneme napísaním si pohybovej rovnice auta na rovine,

$$ma_- = fmg \Rightarrow f = \frac{a_-}{g}. \quad (34.1)$$

Na rovine naklonenej o uhol α sa rovnica mierne zmení na

$$ma = mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha. \quad (34.2)$$

Oproti rovnici 34.1 tu je na pravej strane jeden člen naviac – zrýchlenie auta je stále spôsobované trením kolies o cestu, aj keď s rastúcim sklonom klesá; ale zato naň teraz ešte pôsobí aj zložka tiažovej sily rovnobežná s naklonenou rovinou. Zrýchlenie je teda

$$a = g \sin \alpha + fg \cos \alpha. \quad (34.3)$$

Analytické řešení

Najkratší čas zrýchlenia získame maximalizovaním a . Potrebujeme teda zderivovať a podľa uhla α a zistiť, kedy sa derivácia rovná nule. Dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\alpha} &= g \cos \alpha - f g \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0, \\ \cos \alpha &= f \sin \alpha, \\ \tan \alpha &= \frac{1}{f} = \frac{g}{a_-}.\end{aligned}\tag{34.4}$$

Využijeme goniometrické identity 25.6 a dosadíme za $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ do 34.3. Po úpravách s využitím 34.1 dostaneme

$$a = \sqrt{a_-^2 + g^2}.\tag{34.5}$$

Teraz už nám stačí len zistiť zrýchlenie auta na rovine a dopočítať čas zrýchľovania dolu kopcom. Využijeme, že pre rovnomerne zrýchlený pohyb platí $v = at$, preto

$$t = \frac{v}{\sqrt{a_-^2 + g^2}} = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{v}{t_-}\right)^2 + g^2}},\tag{34.6}$$

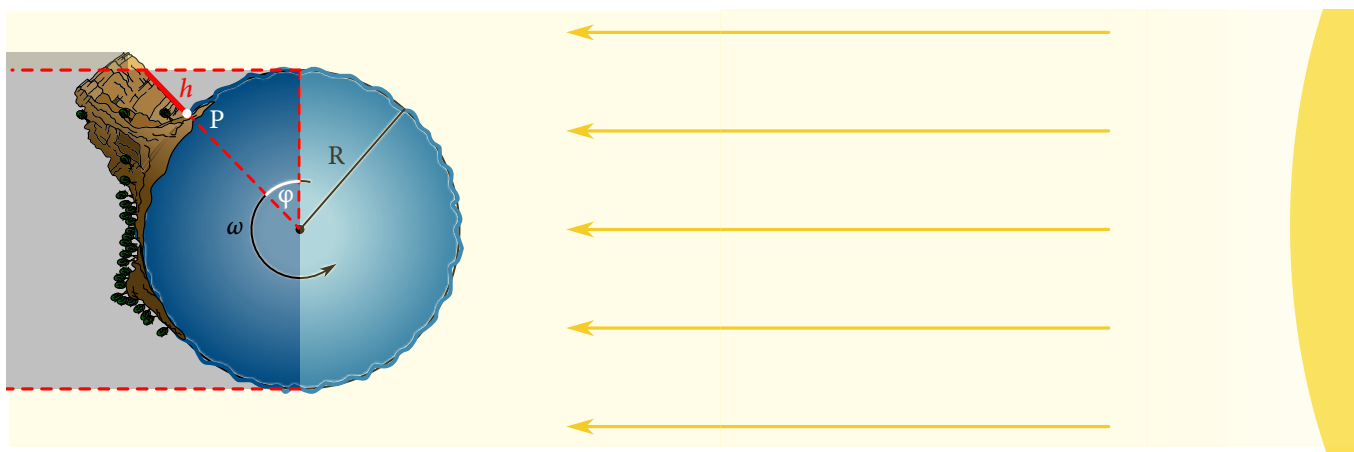
kde v je maximálna rýchlosť, na ktorú auto zrýchľuje, a t_- je čas zrýchľovania na rovine. Dosadíme hodnoty a dostaneme $t \doteq 1,51$ s.

Numerické riešenie

Ak nechceme derivovať, vieme hľadať maximum a priamo z rovnice 34.3 numericky, napríklad lineárnym prehľadaním intervalu pomocou kalkulačky. Keď si nakreslíme funkciu z rovnice 34.3, zjavne má iba jedno maximum, takže ju vyhodnotíme v niekoľkých bodoch a hľadáme, kedy začne prvýkrát klesať. Prípadne sa môžeme trochu vrátiť a zjemniť krok prehľadávania, až kým maximum nenájdeme s rozumnou presnosťou. Rýchlo získame medzivýsledok $\alpha \approx 0,595$ rad $\approx 34,1^\circ$ a z neho dopočítame zrýchlenie a čas.

35 Keď sa pozrieme na Zem a jej tieň z dialky, jej tieňom je nekonečný valec s podstavou v tvare kruhu.⁸ Pre každý pevný bod na jej povrchu platí, že v ňom Slnko zapadne vtedy, keď rotácia Zeme tento bod prenesie cez hranicu tieňa.

⁸Ak uvážime konečné rozmery a vzdialenosť od Slnka, je to skôr kužeľ, ale pre našu úvahu to nebude podstatné.



Obrázek 35.1: Zem vrhajúca tieň

A nielen na povrchu – to isté platí aj pre body na útese. Ak je výška útesu zanedbateľne malá voči polomeru Zeme – čo by veru byť mala – pre ľubovoľný bod na útese vo výške h platí, že Slnko preň zapadne vtedy, keď sa bod P dostane do hĺbky h vnútri tieňa, čiže do vzdialenosti h od plášťa valca. Výška tieňa je teda rovnaká (v prípade zanedbateľne malého útesu), ako kolmá vzdialenosť bodu P od plášťa valca.

A to je všetko. Bod P sa pohybuje po kružnici s polomerom $R_{\oplus}$ s uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ d}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}}$. Priemet takéhoto pohybu do roviny kolmej na slnečné lúče je harmonický pohyb s rovnakou uhlovou rýchlosťou a pre jeho zrýchlenie blízko maximálnej výchylky platí

$$a = \omega^2 R_{\oplus} \approx \left(\frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \right)^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \doteq 0,034 \text{ m/s}^2. \quad (35.1)$$

Drevorubačské riešenie

Ak počas súťaže na chytré riešenie neprídeme, môžeme výsledok vybušiť hrubou silou. Označme si stredový uhol medzi zvislicou útesu a terminátorom φ . Potom z pravouhlého trojuholníka obsahujúceho tento uhol a uzatvoreného plášťom tieňa môžeme písať

$$R_{\oplus} + h(\varphi) = \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.2)$$

Keď sa Zem pootočí o uhol $d\varphi$, výška, do ktorej sa posunie tieň, sa zvýši o

$$dh = \frac{R_{\oplus}}{\cos(\varphi + d\varphi)} - \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.3)$$

Pre nízky útes je uhol φ veľmi malý, teda možno použiť priblíženia $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ a $(1+x)^{-1} \approx 1-x$. Postupnými úpravami dostávame

$$dh \approx R_{\oplus} \left[\frac{1}{1 - \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} \right] \approx R_{\oplus} \left[1 + \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2} - \left(1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \approx R_{\oplus} \varphi d\varphi. \quad (35.4)$$

Keďže Zem vykonáva rovnomerný rotačný pohyb, $\varphi = \omega t$, a teda

$$dh \approx R_{\oplus} \omega t \omega dt. \quad (35.5)$$

Odtiaľ už môžeme okamžite písať rýchlosť stúpania tieňa po útese

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \approx R_{\oplus} \omega^2 t. \quad (35.6)$$

a v tom už spoznávame rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu so zrýchlením $a = \omega^2 R_{\oplus}$.

36 Kubko sa najprv zamyslel, čo sa myslí pod aktivitou či už obohateného alebo prírodného uránu. Pamätal si prirodzený vzťah úmernosti medzi počtom rozpadnutých atómov ΔN za čas Δt k počtu častíc N v danom čase

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t, \quad (36.1)$$

kde konštanta úmernosti λ , nazývaná aj *rozpadová konštanta*, hovorí o rýchlosti rozpadu. Uvedená rovnica vedie na časový vývoj

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (36.2)$$

nazývaný aj zákon rádioaktívneho rozpadu, kde N_0 je počet častíc v čase $t = 0$.

Posledná vec, čo si Kubko potrebuje vyjadriť, je doba polpremeny, čiže čas, za ktorý sa počet častíc tohto rádioaktívneho materiálu zníži na polovicu. To bude $N = \frac{N_0}{2}$, čo mu po dosadení do zákona rádioaktívneho rozpadu dá pre rozpadovú konštantu

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (36.3)$$

Následne z predchádzajúcich poznatkov vie nájsť výraz pre aktivitu, čiže rýchlosť rádioaktívnej premeny

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N. \quad (36.4)$$

Aby zrátal, o koľko je aktivita obohateného uránu A_o väčšia než aktivita prírodného uránu A_p , hľadá pomer $\frac{A_o - A_p}{A_p}$, kde využije, že pozná pomer častíc ^{235}U a ^{238}U v oboch prípadoch a ich dobu rozpadu $T_{1/2}^{235} = 7 \cdot 10^8$ a $T_{1/2}^{238} = 4,46 \cdot 10^9$ a. Z dôb rozpadu a vzťahu pre aktivitu vie, že rozpadová konštanta λ pre ^{235}U musí byť k -krát väčšia ako pre ^{238}U , a to konkrétne

$$k = \frac{T_{1/2}^{238}}{T_{1/2}^{235}} \doteq 6,371. \quad (36.5)$$

Následne, ak si označí podiel ^{235}U v obohatenom uráne a , a v prírodnom uráne b , pre relatívnu zmenu aktivity dostáva výraz

$$\frac{A_o - A_p}{A_p} = \frac{k\lambda a N + \lambda(1-a)N}{k\lambda b N + \lambda(1-b)N} - 1 = \frac{(a-b)(k-1)}{1+b(k-1)} \doteq \frac{(0,03 - 0,0072) \cdot (6,371 - 1)}{1 + 0,0072 \cdot (6,371 - 1)} \doteq 11,8 \%. \quad (36.6)$$

37 Na úvod si uvedomme, že ak je os rotácie kolmá na rovinu amuletu, to, ako sú jednotlivé vyrezané štvorce zrotované, nijako neovplyvní moment zotrvačnosti amuletu. Pomenujme si prvý kruh, z ktorého vyrežeme štvorec, ako prvú iteráciu. Keď teraz znovu vpíšeme kruh a zneho vyrežeme vpísaný štvorec, budeme to volať druhá iterácia, a tak ďalej. Moment zotrvačnosti kruhu s polomerom r je $I_{\bigcirc} = \frac{1}{2}mr^2$ a štvorca $I_{\square} = \frac{1}{6}ma^2$, kde a je strana štvorca.

Pozrime sa na prvú iteráciu nášho problému. Máme polomer kruhu prvej iterácie $r_1 = r$ a vpísaný štvorec so stranou dĺžky $a = \sqrt{2}r$, čo môžeme ľahko nahliadnuť. Vieme, že uhlopriečka štvorca je $2r$. Z pravouhlého trojuholníka vymedzeného dvomi susednými vrcholmi štvorca a stredom kruhu vidíme, že

$$\cos 45^\circ = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \sqrt{2}r. \quad (37.1)$$

Moment zotrvačnosti a obsah prvej iterácie je jednoducho

$$I^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma S_{\bigcirc}^{(1)}r_1^2 - \frac{1}{6}\sigma S_{\square}^{(1)}a_1^2 = \frac{1}{2}\pi\sigma r_1^4 - \frac{4}{6}\sigma r_1^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r_1^4 \quad (37.2)$$

$$S^{(1)} = S_{\bigcirc}^{(1)} - S_{\square}^{(1)} = \pi r_1^2 - a_1^2 = (\pi - 2)r_1^2.$$

Moment zotrvačnosti $I^{(n)}$ a obsah $S^{(n)}$ nasledujúcich iterácií sa zráta obdobne, iba pre iné hodnoty r_n . Už nám len zostáva zistiť, aký je vzťah $r_n = r_n(r, n)$. Pre prvú iteráciu platí, že $r_1 = r$. Druhá iterácia je kruh vpísaný v štvorci, a teda

$$2r_2 = a_1 \Rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}r. \quad (37.3)$$

Obdobne bude platiť

$$r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_2 = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad (37.4)$$

a teda všeobecne pre r_n

$$r_n = \frac{\sqrt{2}}{2}r_{n-1} = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}. \quad (37.5)$$

Ostáva nám už len zrátať nekonečné rady, ktoré sa objavujú,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)} = (\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = r^2(\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} \quad (37.6)$$

$$= r^2(\pi - 2) \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2r^2(\pi - 2),$$

a pre moment zotrvačnosti

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r_n^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{4n-4} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r^4 \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r^4 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3} \right) \frac{m}{S} r^4,
 \end{aligned} \tag{37.7}$$

kde sme využili, že súčet geometrického radu $a_n = a_0 q^n$ je $\sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$. Po dosadení S do I dostaneme

$$I = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}}{\pi - 2} m r^2 = \frac{3\pi - 4}{9\pi - 18} m r^2. \tag{37.8}$$

38 Začnime napísaním si predpisu funkcie parabolického mesta ako

$$h(r) = k r^2, \tag{38.1}$$

kde r je vzdialenosť bodu na povrchu paraboloidu od osi otáčania, t. j. od stredu mesta. Pripočítavať konštantu nepotrebujeme, keďže nás zaujíma len výškový rozdiel. Pre najvyšší bod v meste teda platí

$$H = k R^2, \tag{38.2}$$

kde H je výškový rozdiel, ktorý hľadáme a R je polomer zo zadania.

Stále ale nepoznáme koeficient k . Ten zistíme z derivácie predpisu paraboly v bode $[R; H]$. Vieme totiž, že výsledná tiaž má byť kolmá na povrch paraboloidu. Derivácia predpisu paraboly v bode $[R; H]$, $2kR$, je smernicou dotýčnice k parabole v tomto bode. Môžeme si spomenúť, že sklon priamky vieme nájsť aj ako $\tan \frac{\Delta y}{\Delta x}$, kde v tomto prípade $\Delta y = a_c$ a $\Delta x = g_{\sigma}$, teda

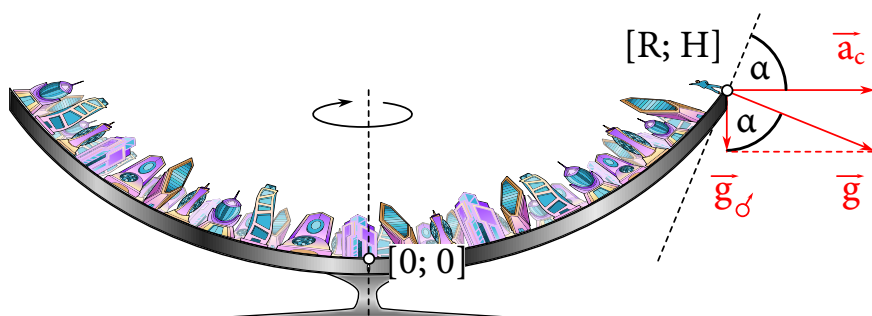
$$2kR = \frac{a_c}{g_{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{a_c}{2g_{\sigma}R}. \tag{38.3}$$

Po dosadení za k do 38.2 dostávame

$$H = \frac{a_c R}{2g_{\sigma}}. \tag{38.4}$$

Ešte potrebujeme vyjadriť a_c . To nájdeme cez Pytagorovu vetu ako

$$a_c = \sqrt{g^2 - g_{\sigma}^2}. \tag{38.5}$$

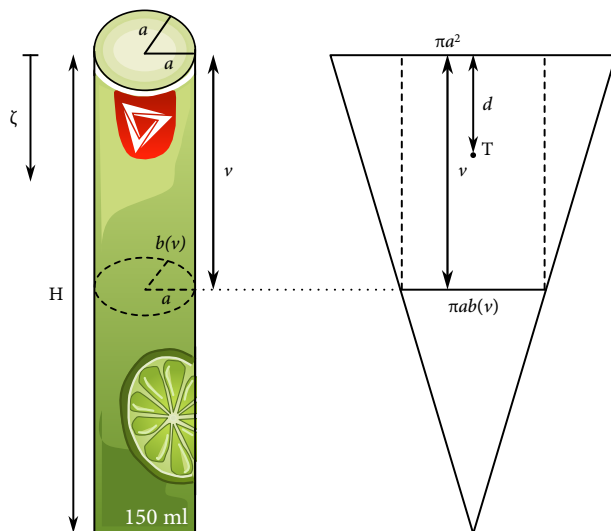


Obrázek 38.1: Zvislý rez parabolickým mestom

Dosadíme a dostaneme

$$H = \frac{R\sqrt{g^2 - g_{\sigma}^2}}{2g_{\sigma}} \doteq 1296 \text{ m.} \quad (38.6)$$

39 Označme si objem mrazenej drene V . Zadanie nám hovorí, že dreň má taký tvar, že v každej výške má horizontálny rez dreňou tvar elipsy s hlavnou polosou a a vedľajšou polosou úmernou zvislej súradnici, ako na obrázku 39.1.



Obrázek 39.1: Geometria Jarovej drene

Ak si zavedieme súradnicu ζ s počiatkom na povrchu drene a rastúcou s hĺbkou, platí

$$b(\zeta) = \frac{H - \zeta}{H} a \quad (39.1)$$

a prierez v hĺbke ζ je

$$S(\zeta) = \pi ab(\zeta) = \pi a^2 \frac{H - \zeta}{H}. \quad (39.2)$$

Všimnime si, že prierez klesá lineárne so ζ . Rovinnou analógiou k nášmu zdeformovanému kužeľu je preto trojuholník, ktorý má rovnakú vlastnosť. Môžeme ho preto nahradiť práve rovnoramenným trojuholníkom so základňou dĺžky, ktorá sa rovná ploche hornej podstavy zdeformovaného kužeľa $\ell = S(0) = \pi a^2$, a s rovnakou výškou H . V tejto analógii obsah trojuholníka A zodpovedá objemu drene V , preto

$$V = A = \frac{1}{2} \ell H = \frac{1}{2} \pi a^2 H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2V}{\pi a^2}. \quad (39.3)$$

Pýtame sa na situáciu, kedy Jaro zje polovicu drene. Potrebujeme teda nájsť, aká vysoká časť drene zodpovedá polovici objemu. Označme si $\Theta(\zeta)$ objem drene, ktorá sa nachádza v intervale $[0; \zeta]$. Potom $\Theta(\zeta)$ zjavne zodpovedá ploche lichobežníka vzniknutejšieho z ekvivalentného trojuholníka urezaním vo vzdialenosti ζ od základne, preto

$$\Theta(\zeta) = \frac{\pi a^2 + \pi ab(\zeta)}{2} \zeta = \pi a^2 \frac{1 + \frac{H-\zeta}{H}}{2} \zeta = \pi a^2 \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{2H}\right). \quad (39.4)$$

Nech polovičnému objemu zodpovedá $\zeta = v$, teda $\Theta(v) \stackrel{!}{=} \frac{V}{2}$. Odtiaľ dostávame

$$\frac{1}{2} \pi a^2 H = \pi a^2 v \left(1 - \frac{v}{2H}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} H. \quad (39.5)$$

Jaro teda na odjedenie polovice objemu drene ju potrebuje vysunúť o túto vzdialenosť.

Akú prácu pri tom vykoná? Je zjavné, že ťažisko nezjedenej časti zvýšil práve o výšku v . Každý zjedený kúsok zase najskôr vyzdvihol na horný okraj a až potom ho zjedol. To znamená, že ťažisko zjedenej časti efektívne vyzdvihol na horný okraj. Potrebujeme teda ešte nájsť, kde sa pôvodne nachádzalo ťažisko zjedenej časti.

Nech toto ťažisko bolo v hĺbke d pod horným okrajom. V ekvivalentnom 2D prípade to zodpovedá polohe ťažiska lichobežníka, ktoré nájdeme ako vážený priemer ťažiska obdĺžnika a trojuholníka

$$d = \frac{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v \cdot \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v \cdot \frac{v}{3}}{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} H. \quad (39.6)$$

Vykonaná práca sa rovná zmene potenciálnej energie, teda

$$W = \frac{V}{2} \rho g d + \frac{V}{2} \rho g v = \frac{4 - \sqrt{2}}{6\pi} \frac{V^2}{a^2} \rho g \approx 76 \text{ mJ}. \quad (39.7)$$

40 Máme objekt, ktorý sa pohybuje po dráhe s s konštantným zrýchlením a . Prejdená dráha s časom rastie ako $s = \frac{1}{2} a t^2$ a rýchlosť ako $v = at$. Skombinovaním týchto dvoch vzťahov dostávame

$$v(s) = \sqrt{2as}. \quad (40.1)$$

Chceme určiť priemernú rýchlosť, ktorá bola nameraná rovnomerne pozdĺž celej dráhy. Ide teda o priemer okamžitej rýchlosti, ale cez dráhu, nie cez čas. Funkcia $v(s) = \sqrt{2as}$ rastie od $v(0) = 0$ po $v(s) = \sqrt{2as} = v_{\max}$. Graficky ide o polovicu paraboly $y = \sqrt{x}$. Potrebujeme nájsť priemernú výšku tejto paraboly.

Na to potrebujeme poznať plochu pod ňou. Ak vieme integrovať, poctivo zrátame priemernú hodnotu rýchlosti ako integrál

$$\langle v \rangle_x = \frac{1}{s} \int_0^s \sqrt{2ax} \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as}. \quad (40.2)$$

Ak integrovať nevieme, nechceme alebo nestíhame, dá sa to vyriešiť aj pekným starogréckym trikom, tzv. *kvadrátúrou paraboly*⁹. Odseknime spod časti paraboly všetko, čo sa nachádza pod priamkou spájajúcou jej konce. Plochu trojuholníka spočítať vieme. Oстане nám plocha ohraničená priamkou a parabolou. Dá sa ukázať, že plocha takéhoto útvaru je rovná $\frac{4}{3}$ plochy vpísaného trojuholníka s vrcholom v strede intervalu: po odseknutí tohto trojuholníka nám opäť ostanú dva útvary ohraničené priamkou a parabolou, a vedie to na geometrický rad s kvocientom $\frac{1}{4}$. Výsledok je samozrejme rovnaký ako v rovnici 40.2.

Ešte nám zostáva tá jednoduchšia časť tejto úlohy. Skutočnú priemernú rýchlosť Tömašovho vozidla nájdeme triviálne ako celkovú prejdenu dráhu za celkový čas,¹⁰ teda

$$\langle v \rangle_t = \frac{s}{\sqrt{\frac{2s}{a}}} = \sqrt{\frac{as}{2}}. \quad (40.3)$$

Hľadaný pomer priemernej rýchlosti cez polohu k priemernej rýchlosti cez čas je konečne

$$\frac{\langle v \rangle_x}{\langle v \rangle_t} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as}}{\sqrt{\frac{as}{2}}} = \frac{4}{3}. \quad (40.4)$$

⁹Τετραγωνισμός παραβολῆς, Archimedes, 3. storočie pred naším letopočtom. Moderná verzia napríklad na [Wikipedii](https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_exhaustion).

¹⁰Táto definícia je konzistentná s predchádzajúcou definíciou priemeru. Priemernú rýchlosť cez čas možno totiž vypočítať ako

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T at \, dt = \frac{\frac{1}{2}aT^2}{T} = \frac{s}{T}.$$

Výsledky

1 0 cm

2 v

3 1 g a 5 g, Zem a Pluto

4 400 ml/s

5 $\frac{826 + 160\sqrt{2}}{343} \text{ s} \doteq 3,07 \text{ s}$

6 72 s, *uznejte také* 01:12.

7 22:20

8 100 %, čiže celá izba.

9 5,47 km

10 2,5 J, *uznejte řešení v intervalu* 2,4 J – 2,5 J.

11 $s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v} = \frac{v^2 t}{c - v} + vt$

12 A-49

13 $s \left(1 + \frac{v}{u} \right)$

14 $25,4^\circ$

15 3,20 kN, *uznejte také* 3,14 kN.

16 $\sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s}$

17 $\frac{1}{3}g$

18 18

19 $\left\{ \frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R \right\}$

20 N, H, A, B, Y, I, *na poradí záleží.*

21 56 mm²

22 7 %

23 $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{4 + \cot^2 \alpha}}$

24 74 %

25 10 m, *uznejte také 9,8 m.*

26 72 575 grg · mrk³

27 $\frac{23255}{7776} \text{ MPa} \doteq 3,0 \text{ MPa}$

28 0,302 s

29 $-\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} \text{ C} \doteq -2,47 \text{ C}$, *pozor na znamienko.*

30 24 Hz

31 1400 %

32 0,26 N

33 33,4°

34 1,51 s, *uznejte řešení v intervalu 1,51 s – 1,52 s.*

35 34 mm/s²

36 11,8 %

37 $\frac{3\pi - 4}{9\pi - 18}mr^2 \doteq 0,528mr^2$

38 1296 m

39 76 mJ, *uznejte řešení v intervalu 76 mJ – 77 mJ.*

40 $\frac{4}{3}$

Autoři příkladů

Martin „Kvík“ Baláž
Šimon Borovský
Jakub Hluško
Lucia Kleščová

Katarína Magdolenová
Miroslav Pajger
Patrik „pa3k“ Rusnák
Anamária „Anomália“ Šutková

Michal „Piškót“ Tomaga
Jaroslav Valovčan
Soňa Vasiľová
Tomáš „Mözög“ Vörös

Obrázky

Katarína Nedelková

Anamária „Anomália“ Šutková

Michal „Piškót“ Tomaga

Technická úprava

Martin „Kvík“ Baláž