

Ihr Lieben,

in euren Händen haltet ihr die Aufgabensammlung des 28thten Náboj Physik Wettbewerbs, der 2024 erstmals im deutschsprachigen Raum hier bei uns in Wien stattgefunden hat. In diesem Heft findet ihr alle heuer gestellten Aufgaben samt Lösungen und Lösungswegen. Falls etwas unklar ist, meldet euch bitte gerne bei uns.

Viele Personen und Organisationen haben zum Gelingen des Náboj Physiks beigetragen, denen ich herzlich danken möchte: FH Technikum Wien, Fakultät für Physik der Universität Wien, unseren Übersetzer*innen (Walter Hametner, Matthias Blatnik, Hermann Detz, Albert Huber, Damian Fabbian, Fabien Clivaz, Brigitte Waldmann, Felix Wilkens, Elias Eingang), sowie den internationalen Organisator*innen Katarína Nedelková (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Prag), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapest), Urszula Goławska (Danzig), Andrzej Karbowski (Toruń), Maciej Matyka (Breslau), José Francisco Romero García (Madrid), Dmytro Rzhemovskiy (Wien), Vasyl Rizak (Uschhorod) and João Rico (Lissabon).

Die Ergebnisse des internationalen Wettbewerbs finden sich auf der offiziellen Website des Náboj Physiks.

Im Namen des gesamten Organisationsteams hoffe ich, dass dir der diesjährige Náboj Physik Wettbewerb gefallen hat und wir dich auch nächstes Jahr wieder beim Náboj Physik begrüßen dürfen!

Herzliche Grüße

*Univ.-Prof. Michael Eichmair, PhD
Organisator NÁBOJ Physik in Österreich*

*Jaroslav Valovčan
Hauptorganisator NÁBOJ Physik*

Die Ergebnisse, das Archiv und weitere Informationen findet ihr unter <https://physics.naboj.org/>.

Aufgaben

1 Annie löst gerne Sudoku-Rätsel aus der Sonntagszeitung. Allerdings findet sie diese Rätsel nicht anspruchsvoll genug. Deshalb hat sie sich eine eigene Variante ausgedacht: Sie stellt sich vor, dass jede Seite eines Gitterquadrats 1 cm misst und jedes Quadrat genau so viele Gramm wiegt wie die Zahl, die darin steht. Wie groß ist der Abstand zwischen dem Schwerpunkt eines solchen Sudoku-Gitters und seinem geometrischen Mittelpunkt, nachdem Annie das Rätsel gelöst hat?

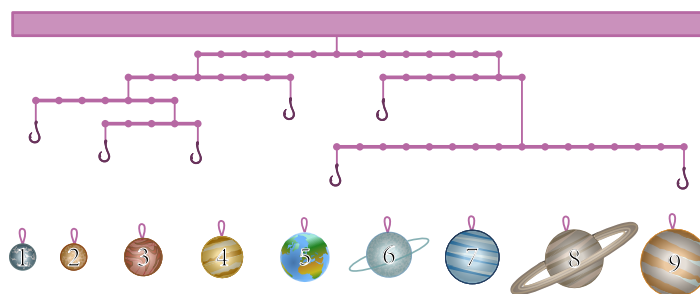
8	7	9		3		4		6
		6		7	9		1	
1			2	4	6	7		9
9		7	3			5	6	4
	2		6		4		9	7
	5			8		2		1
5	6	3	7		8	1	4	
7			4	1	2	6		
4	1		5	6			7	8

2 Jacob befindet sich in einem Zugabteil auf seiner Reise von Bratislava nach Wien und genießt die Reise. Er sitzt entgegen der Fahrtrichtung. An der Wand gegenüber ist ein Spiegel befestigt. Darin kann er die Spiegelung eines Signalmastes am Streckenrand erkennen.

Wie groß ist die scheinbare Geschwindigkeit, mit der sich das Spiegelbild des Signalmastes auf Jacob zubewegt, wenn der Zug sich mit der Geschwindigkeit v fortbewegt?

3 Zu ihrer Geburt schenkte der stolze Vater der schönen kleinen Helena ein Baby-Mobile für ihre Wiege. Und zwar nicht ein gewöhnliches, sondern eines mit astronomischem Thema: An leichten Stangen unterschiedlicher Länge können bis zu 7 Plüschplaneten aufgehängt werden. Helenas Vater erinnerte sich daran, dass es früher neun Planeten gab, und genau so viele bestellte er online. Die Massen dieser Planeten sind alle unterschiedlich und haben ganzzahlige Werte von 1 bis 9 g.

Helenas Vater möchte an jeden Haken einen Planeten hängen, sodass alle Arme des Mobiles im Gleichgewicht sind. Welche Planeten wird er dabei **nicht** verwenden?

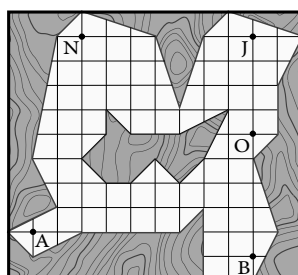


4 Joe machte Urlaub in einem nahegelegenen Ferienort namens Warm Hill. Zu seiner Überraschung war Warm Hill kein Hügel, sondern ein See – und obendrein war das Wasser kalt. Also beschloss er, lieber zu Hause zu baden. Im Badezimmer entdeckte er schnell zwei Wasserhähne mit warmem und kaltem Wasser.

Das Wasser aus dem warmen Hahn hat die Temperatur $68\text{ }^{\circ}\text{C}$. Joe möchte jedoch, dass das Wasser eine Temperatur von $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ und einen Volumenstrom von 600 ml/s hat. Wie groß muss der Volumenstrom des Kaltwasserhahns sein, wenn das kalte Wasser die Temperatur $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ hat?

5 Nina (N), Adam (A), Barbara (B), Oliver (O) und Julia (J) befinden sich in einer dunklen Höhle. Nina, die Leiterin der Abenteuergruppe, möchte herausfinden, wo die anderen sind. Also ruft sie den Anfangsbuchstaben ihres Namens „N“. Eine halbe Sekunde, nachdem Adam sie gehört hat, ruft er „A“, dann tut Barbara dasselbe, nachdem sie Adams Ruf gehört hat, und so weiter, bis Nina Julia ihren Anfangsbuchstaben rufen hört. Wie lange nach Ninas Ruf wird sie das ganze Wort „NABOJ“ hören und wissen, dass niemand verloren gegangen ist?

Die Seite eines Quadrats im Raster beträgt 10 Meter, und die Reaktionszeit zwischen Ohren und Mund aller Mitglieder der Gruppe ist gleich, und zwar $0,5\text{ s}$. Schallwellen breiten sich nicht durch festes Gestein aus.



6 Patrick geht auf einer Laufbahn joggen. Seit er eine Smartwatch hat, misst er stets sein durchschnittliches Lauftempo. Bei seinem letzten Training fiel ihm auf, dass sich seine durchschnittliche Rundenzeit zwischen der dritten und vierten Runde um ganze zwei Sekunden von $01:20$ auf $01:18$ verbessert hatte.

Wie lange hat er für die vierte Runde gebraucht?

7 Moderne Navigationssysteme bieten allerlei Funktionen. So können sie zum Beispiel sogar anzeigen, welche Geschwindigkeit man einhalten muss, um pünktlich anzukommen. Marcel eilt zum Flughafen und

hat seine Ankunftszeit auf 22:00 eingestellt. Um 21:00 sagt ihm das Navigationssystem, er solle mit 120 km/h fahren, um rechtzeitig da zu sein. Doch bis 21:30 stieg die geschätzte Geschwindigkeit auf 150 km/h an.

Wann wird Marcel tatsächlich am Flughafen ankommen, wenn er mit konstanter Geschwindigkeit fährt?

8 Sonja hatte eine neue Glaslampe in Form eines durchsichtigen Würfels gekauft. Der Würfel hat einen Brechungsindex von 1,5 und eine Glühbirne in seiner Mitte. Sonja wollte ihre Lampe sofort ausprobieren und hängte sie genau in die Mitte ihres würfelförmigen Zimmers. Welcher Teil von Sonjas Zimmer wurde von dieser Lampe beleuchtet?

9 Simon fährt auf seiner Traumreise durch Japan mit dem Shinkansen. Der Zug, in dem er sich befindet, verlässt den Bahnhof mit einer Beschleunigung von 2,6 km/h/s und hat eine maximale Geschwindigkeit von 320 km/h. Nach welcher Entfernung vom Bahnhof erreicht Simons Zug seine maximale Geschwindigkeit?

10 Veganerin Veronika nahm auf einen Bootsausflug eine Avocado mit einem „Spielzeug“ – dem Kern – darin mit. Doch sie war enttäuscht, als sich das „Spielzeug“ wieder nur als ganz gewöhnliche Holzkugel mit dem Radius 2 cm und der Dichte 750 kg/m³ herausstellte. Deshalb warf sie die Kugel einfach in den See. Wassermann Wassili entdeckte die Kugel jedoch sofort und zog sie auf den Grund des Sees. Wieviel Arbeit hat Wassili an der Kugel verrichtet, wenn der See 30 m tief ist?

Vernachlässige die Arbeit, die erforderlich ist, um den Ball erst einmal unter die Wasseroberfläche zu tauchen.

11 Der Straßenbahnfahrer Jakob nähert sich einer Kreuzung, wobei seine Straßenbahn eine Geschwindigkeit von v hat.

Plötzlich bemerkt er, dass ein Fahrzeug auf der Kreuzung steht. In einem verzweifelten Versuch, eine Kollision zu vermeiden, betätigt Jakob die Alarmglocke. Er verlässt sich auf die Tatsache, dass die Person im Auto die Kreuzung in der Zeit t verlassen kann, sobald sie die Alarmglocke hört.

Bei welcher minimalen Entfernung von der Kreuzung muss Jakob die Alarmglocke betätigen, um eine Kollision zu vermeiden, wenn die Schallgeschwindigkeit c beträgt?

12 Zur Vorbereitung auf die Matura schrieb Patrick seine Notizen auf ein riesiges Blatt Papier, damit er einen Überblick über alles hatte. Dieses Blatt Papier war so groß, dass es den gesamten Boden von Patricks Zimmer bedeckte. Nach bestandener Matura war Patrik sehr erleichtert, denn wenn er weiter und weiter geschrieben hätte, hätte er irgendwann sicherlich ein Blatt Papier gefüllt, mit dem er die ganze Erde hätte zudecken können. Welches kleinste Blatt Papier im A-Format hätte Patrick gereicht, um die ganze Erde zu bedecken?

Das Papierformat A0 hat eine Fläche von 1 m². A1 erhalten wir, indem wir A0 parallel zur kürzeren Kante in zwei gleiche Hälften schneiden, A2, indem wir A1 halbieren und so weiter. Patrick darf zum Bedecken der Erde das Papier auch zerschneiden.

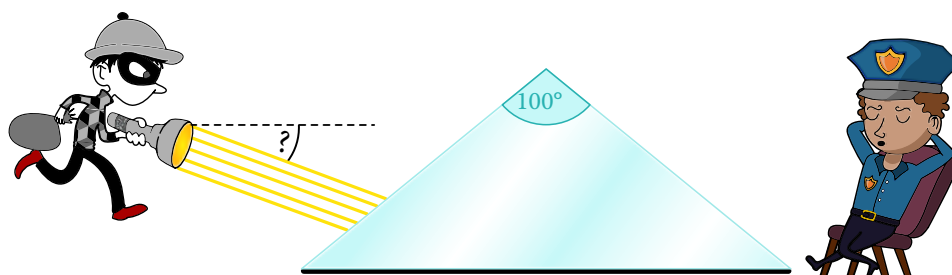
13 Sabine besuchte eine Flugschau. Ihr war kalt, da ihr die ganze Zeit über der Wind von links mit der Geschwindigkeit v ins Gesicht blies. Am meisten fasziniert war sie von den Jets: Am Ende der Show flog

einer vor der Tribüne von rechts nach links, mit einer Geschwindigkeit von u (relativ zum Boden). Während des Fluges vor der Tribüne setzte er farbigen Rauch frei, welcher, relativ zur Luft, schnell zum Stillstand kam.

Welche Länge hatte die Rauchspur, wenn die Tribüne s lang war?

14 Daniel der Dieb möchte ein dreieckiges Prisma mit Brechungsindex 2,4 aus einem Museum stehlen. Der Querschnitt des Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Öffnungswinkel 100° , wie in der Abbildung dargestellt. Der Dieb muss vermutlich einen Lichtstrahl mit parallelen Strahlen auf das Prisma richten, aber er möchte nicht, dass dies der Museumswärter auf der anderen Seite des Prismas bemerkt. Wie stark muss Daniel seine Taschenlampe mindestens nach unten richten, gemessen als Winkel zur Horizontalen, damit gar keine Strahlen auf der anderen Seite des Prismas austreten, unabhängig davon auf welchen Teil des Prismas er leuchtet?

Der Boden des Prismas ist perfekt schwarz und absorbiert alle Strahlen, die darauf fallen.



15 Kai ist dabei, sich zuhause einen Fitnessraum einzurichten. Gerade transportiert er eine neue Hantel mit Masse 20 kg in einem Aufzug mit Masse 250 kg. Da Kai bis jetzt noch nicht oft in einem Gym war, wiegt Kai selbst nur 60 kg und seine Arme sind so leicht, dass wir ihre Masse vernachlässigen können. Obwohl der Aufzug mit einer nicht allzu geringen, konstanten Geschwindigkeit von 4 m/s aufwärts fährt, möchte Kai die Zeit nutzen und er beginnt die Gewichte im Aufzug zu stemmen. Wie viel Kraft wird auf das tragende Seil des Aufzugs ausgeübt, wenn Kai die Hantel mit einer Beschleunigung von 5 m/s^2 nach unten bewegt?

16 Es ist halb vier in der Früh und Sam wirft Eier aus dem Fenster, auf einen Posaunenspieler zielend, der sich im Dunkeln versteckt hält. Wenn Sam ein Ei nach oben wirft, landet es nach vier Sekunden am Boden. Wenn er das Ei mit derselben Geschwindigkeit nach unten wirft, landet es bereits nach zwei Sekunden am Boden.

Wie lange würde das Ei fallen, wenn Sam es einfach loslässt?

17 Lucy musste ihren lauten Neffen zumindest für ein Weilchen beschäftigen. Als Spielzeug, Baukästen und sogar Drohungen mit einem Holzlöffel nichts halfen, holte sie ein masseloses Seil und eine masselose Rolle aus dem Schrank und band zwei Massestücke an die Enden des Seils – eines mit Masse m und das andere mit Masse $\frac{m}{2}$. Sie hängten das Seil gemeinsam über die Rolle und warteten ab, was passieren würde. Der Neffe beobachtete einen Moment lang gespannt, wie sich die Gewichte zu bewegen begannen, rannte aber bald schreiend davon, um woanders weiter Unfug zu treiben. Dennoch beschäftigte Lucy eine Frage:

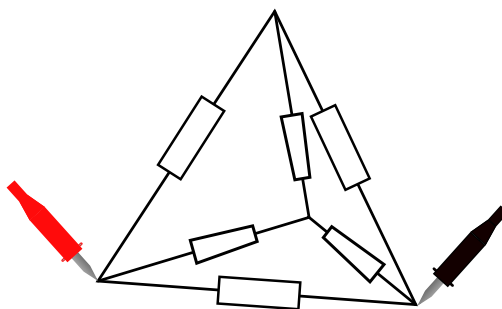
„Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Massestücke eigentlich?“

Hilf Lucy, einen Ausdruck für die Beschleunigung der Massestücke zu finden.

18 Bestimme die Summe der Zahlen, die neben den korrekten der unten angegebenen Aussagen stehen.

-
- 1 Ein Körper befindet sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn. Wenn sich seine Geschwindigkeit erhöht, wird seine Umlaufzeit kürzer.
 - 2 Wenn die Erde auf ihrer Umlaufbahn näher an die Sonne heranrückt, bewegt sie sich schneller.
 - 4 Winter entsteht, da die Umlaufbahn der Erde elliptisch ist und sich die Erde zu diesem Zeitpunkt am weitest von der Sonne entfernten Punkt befindet.
 - 8 Jeder Satellit, der sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde befindet, bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit.
 - 16 Geostationäre Satelliten können sich nur über dem Äquator befinden.
 - 32 In einem Zwei-Körper System hat der leichtere Körper immer eine elliptische Flugbahn um den gemeinsamen Massenschwerpunkt.
-

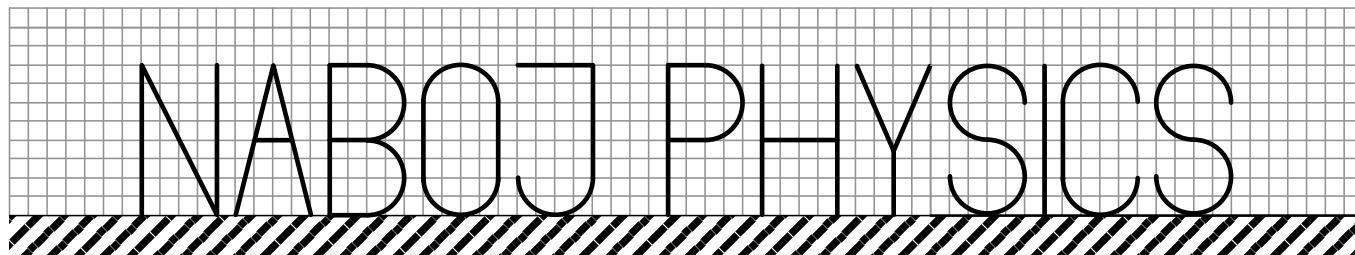
19 Wir konstruieren einen regelmäßigen Tetraeder mit sechs Seitenkanten aus sechs Widerständen mit jeweils dem Widerstand R . Nun verbinden wir ein Widerstandsmessgerät (Ohmmeter) mit zwei der Eckpunkte. Wenn wir eine Kante mit dem zugehörigen Widerstand komplett aus dem Tetraeder entfernen, wie groß könnte dann der gemessene Gesamtwiderstand sein?



20 Wir brauchen deine Hilfe, um die Buchstaben im Namen unseres Wettbewerbs nach ihrer Stabilität zu sortieren. Mit Stabilität meinen wir die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Buchstaben umzukippen.

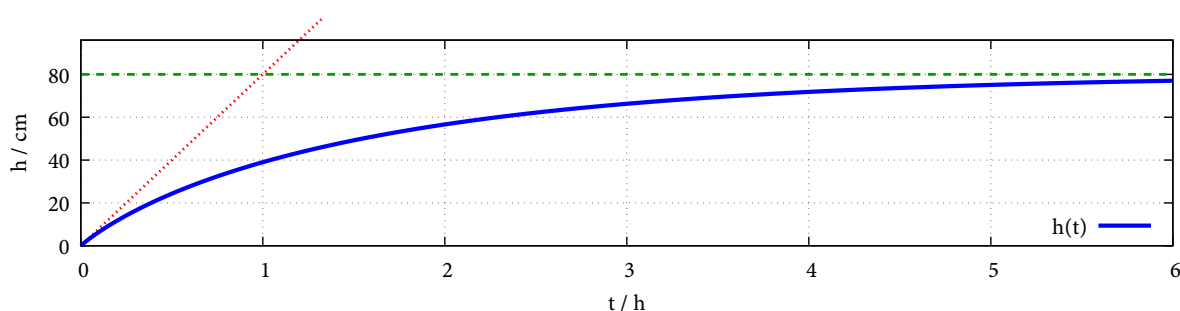
Die Buchstaben bestehen aus homogenen, festen Liniensegmenten in geradliniger Form oder in Form von Kreisbögen mit einer einheitlichen, aber geringen Dicke **ungleich Null** und mit scharfen Kanten. Die Buchstaben müssen beim Kippen in der Ebene des Papiers bleiben.

Gib eine Folge von Buchstaben sortiert nach ihrer Stabilität in **absteigender** Reihenfolge an. Buchstaben, die sich nicht in einer stabilen Lage befinden, werden **nicht berücksichtigt**.



21 Adam, der Gärtner, hat einen riesigen zylindrischen Wassertank zum Sammeln von Regenwasser. Die Grundfläche beträgt 1 m^2 . Nach langen Sommerdürren war der Tank leer. Nachdem es nun aber angefangen hat zu regnen, füllt sich der Tank langsam wieder.

Im Tank befindet sich ein Wasserstandssensor. Matt kann die Höhe des Wasserstands auf seinem Smartphone beobachten. Zunächst war er glücklich, da der Wasserstand schnell zu steigen schien (siehe die gepunktete Linie, die die blaue Linie bei $t = 0$ tangiert). Nach einigen Stunden wurde jedoch klar, dass der Wassertank sich niemals vollständig füllen würde, da die Geschwindigkeit des Wasseranstiegs bei $h_{\max} = 80 \text{ cm}$ gegen Null geht. Anscheinend gibt es ein Loch im Boden. Wie groß ist dessen Querschnittsfläche?



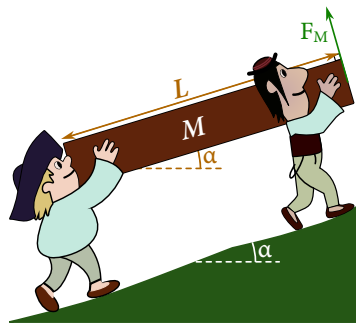
22 Tom kaufte einen Liter Erdbeer-Joghurtmilch, wobei 10 % des Volumens aus Joghurt bestand (und 90 % des Volumens aus Wasser) und stellte sie in den Kühlschrank. Am nächsten Morgen hatte sich die Milch jedoch abgesetzt: Oben befand sich reines Wasser, und die Konzentration des Joghurts nahm linear zum Boden hin zu.

Am Morgen wollte Tom die Milch aus einem Glas mit 400 ml Volumen trinken, vergaß jedoch, die Packung zu schütteln. Das bemerkte er erst, nachdem er bereits 200 ml eingegossen hatte. Dann verschloss er die Packung wieder, schüttelte sie kräftig und füllte das Glas bis zum Rand. Wie hoch ist nun die Konzentration des Joghurts in Toms Milchglas?



23 Matthias und Jakob tragen einen Baumstamm eine schiefe Ebene mit der Neigung α hoch. Der Baumstamm hat die Form eines langen, dünnen Zylinders mit der Länge L und der Masse M . Matthias trägt das vordere Ende, Jakob das hintere Ende. Matthias zieht jedoch nicht das Gewicht: Die Kraft, die er auf den Baumstamm ausübt, zeigt nicht nach oben sondern normal auf die Zylinderachse. Wie ist das Verhältnis der Kräfte, welche Matthias und Jakob auf den Stamm ausüben?

Matthias und Jakob sind gleich groß und tragen den Baumstamm auf der selben Höhe über dem Boden des Hügels.



24 Wie groß ist der Anteil der Erdoberfläche, von dem aus es möglich ist, die Sonne exakt im Norden zu sehen (bei beliebiger Höhe der Sonne über dem Horizont)?

Nimm an, dass die Erde eine perfekte Kugel ist und die Sonnenstrahlen parallel einfallen. Ignoriere atmosphärische Lichtbrechungen und ähnliche Effekte.

25 Daniel bereitet sich auf die Weltmeisterschaften im Bogenschießen vor. Die Mitte des Ziels befindet sich in einer Entfernung von 70 m und auf gleicher Höhe wie Daniel. Wie hoch über die Mitte des Ziels sollte Daniel zielen, um ins Schwarze zu treffen, wenn der Pfeil mit einer Geschwindigkeit von 50 m/s aus Daniels Bogen abgeschossen wird?

Theoretisch gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu erreichen. Im Wettkampfbogenschießen schießt man jedoch immer direkt, gib also die kleinere der beiden Lösungen an.

26 Beim Messen verwenden Amerikaner so ziemlich alles, nur keine SI-Einheiten. John Doe hat sein eigenes Maßsystem entwickelt, basierend auf den Einheiten *gulp*, *belch* und *wink* die wie folgt definiert sind:

- 1 gulp ist das Volumen, das er auf einmal schlucken kann, und er kann einen Pint in 20 gulps hinunterkippen;
- 1 belch ist die Lautstärke seines Rülpsers, die dem Schallpegel 100 dB entspricht;
- 1 wink ist die Zeit, die er für einmal Zwinkern benötigt, und er kann genau zweimal pro Sekunde zwinkern.

Wie groß ist seine eigene Masse in seinem Einheitensystem, wenn sie in den US-amerikanischen Maßeinheiten 200 Pfund beträgt?

0 dB entspricht einem Leistungsfluss von 1 pW/m^2 .

27 Justine muss in der Arbeit ihren 10 l-Stickstofftank auffüllen. Wie üblich kommt um halb fünf Uhr morgens der Stickstofflieferant. Er bringt mit seinem Lieferwagen fünf kleinere 2 l-Stickstofftanks, die unter einem Druck von 5 MPa stehen.

Der Arbeitsablauf ist wie folgt: Der Stickstofflieferant verbindet zwei Tanks mit einem Ventil. Er öffnet dann das Ventil um die Drücke der beiden verbundenen Tanks auszugleichen. Sobald die Stickstofftemperatur mit der Außentemperatur im Gleichgewicht ist, werden die Tanks wieder voneinander getrennt.

Wie hoch ist der maximale Druck, den der Stickstofflieferant im großen Tank erreichen kann?

28 Geschichte wiederholt sich. Heuer hat Patrick eine seltsame schwarze Scheibe im Schrank seines Großvaters wiederentdeckt. Bevor er sie aber als Teller für seinen Sojaburger oder als Frisbee verwenden konnte, zeigte ihm sein Großvater, dass, wenn man sie auf einen Plattenspieler legt, ein paar Knöpfe drückt und die Nadel in die spiralförmige Rille am äußeren Rand der Scheibe platziert, unheimliche Knack- und Zischgeräusche aus den Lautsprechern ertönen, begleitet von prähistorischer Musik.

Dieses Mal will Patrick aber wissen, wie lange es dauert bis die Schallplatte von ihrem Ruhezustand bis zu ihrer normalen Geschwindigkeit von $33\frac{1}{3}$ Umdrehungen pro Minute beschleunigt wird. Nehmen wir an, dass er die Nadel erst auf die Platte setzt, nachdem sie ihre Standardgeschwindigkeit erreicht hat.

Die Schallplatte sei dabei eine durchgehende Scheibe mit Durchmesser 30 cm und einer Masse 200 g. Sie liegt auf einem Plattenteller mit dem gleichen Durchmesser und der Masse 2 kg, der sich zusammen mit der Schallplatte dreht. Der Plattenteller wird von einem Wechselstrom-/Gleichstrom-Adapter mit einer Ausgangsspannung von 5 V und einem Gleichstrom von 100 mA angetrieben.

Vernachlässigen Sie alle Energieverluste.

29 Rizzimus Prime spielte mit einem geladenen Skibidi-Würfel. An jedem der acht Ecken des Würfels befand sich eine Ladung von $q = 1$ C. Rizzimus Prime erschuf eine neunte Ladung und ließ sie ins Zentrum des Würfels gleiten. Da Rizzimus Prime seinen Würfel ganz genau kennt, weiß er, wie groß diese zentrale Ladung sein muss, damit der Würfel im Gleichgewicht bleibt.

Wie groß muss diese Ladung sein?

30 Das Raumfahrtunternehmen FKS verkündete einen großen Erfolg – eine Mondlandung. In Wirklichkeit verfügten sie jedoch nicht über ausreichende Finanzmittel, sodass sie lediglich ein Video auf der Erde drehten. Und das taten sie mit nichts weiter als einem gewöhnlichen Smartphone, dessen Kamera mit einer Bildrate von 60 Hz aufzeichnet. Zunächst versuchten sie, mit einem Schraubenschlüssel eine Wurfbewegung zu filmen.

Mit welcher Bildfrequenz sollte das Video abgespielt werden, damit es überzeugend wirkt? Die Gravitationsbeschleunigung auf dem Mond beträgt 16 % der Gravitationsbeschleunigung auf der Erde.

31 Adam, der Gärtner, und Oma Justine, die berühmte Kräuterkundlerin, sind Nachbarn und ihre Häuser teilen sich eine gemeinsame Wand. Adam braucht einen kühlen Keller, damit sein Gemüse nicht verdirbt und verfault, während Oma Justine einen warmen Keller braucht, damit ihre Kräuter richtig trocknen können.

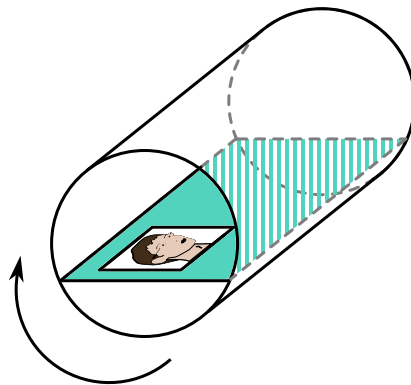
Deshalb haben sie beschlossen, in eine Wärmepumpe zu investieren. Die Wärmepumpe wird mit Strom betrieben und leitet Wärme aus Adams Keller in den Keller von Großmutter Justine. Die beiden sind sehr zufrieden damit, wie sich ihre Investition auszahlt. Großmutter Justine stellt fest, dass der durchschnittliche Wirkungsgrad der Wärmepumpe 1500 % beträgt.

Wie hoch ist der von Adam beobachtete durchschnittliche Wirkungsgrad?

32 Vor Kurzem hat Sebastian von der Internationalen Raumstation (ISS) gelesen. Daher weiß er, dass ihre Masse 400 t beträgt und sie auf einem kreisförmigen Orbit auf einer Höhe von 400 km über der Erdoberfläche um die Erde kreist. Obwohl sich die ISS in himmlischen Höhen befindet, wird sie trotzdem vom Luftwiderstand beeinflusst, was ein Absinken von etwa 100 m pro Tag in Richtung Erdoberfläche bewirkt.

Mit welcher Kraft bremst die Atmosphäre die Internationale Raumstation?

33 Adam verbrachte erneut lange Zeit auf der Toilette. Um die Zeit schneller vergehen zu lassen, begann er, mit einer Toilettenpapierrolle zu spielen. Er nahm seine ISIC-Karte (ein internationaler Studierendenausweis) aus dem Geldbeutel und legte sie in die horizontal gehaltene Rolle am Boden. Dann drehte er die Rolle. Welcher maximale Winkel ist möglich, um die Rolle zu drehen, ohne dass die ISIC-Karte herunterrutscht? Die Breite der ISIC-Karte ist $\sqrt{2}$ mal größer als der Radius der Rolle, und der Reibungskoeffizient zwischen der ISIC-Karte und der Rolle beträgt 0,3.



34 Georg erinnert sich oft an seine Kindheit, als Regenbögen noch in schwarz-weiß waren, es keine Mobiltelefone gab, und er Sammelkarten mit Bildern von Pferden sammelte. Unter anderem war auf diesen Karten vermerkt, wie viel Zeit das jeweilige Pferd braucht, um auf einer ebenen Fläche von 0 km/h auf 100 km/h zu beschleunigen.

Heute sind die Regenbögen in Farbe, Georg hat ein Smartphone und auch eine Kartensammlung von modernen Autos. Seine Lieblingskarte zeigt den Rimac Nevera, das schnellste massengefertigte Auto. Dessen elektrische Motoren verfügen über eine Leistung von bis zu 1888 PS und beschleunigen den Wagen auf 100 km/h in 1,8 s. Der limitierende Faktor, welcher eine noch höhere Beschleunigung verhindert, ist nicht eine unzureichende Motorenleistung, sondern die Reibung zwischen den Reifen und der Straße.

Was ist die kürzeste Zeit, in welcher der Rimac Nevera auf einer schiefen Ebene von 0 auf 100 km/h beschleunigen könnte, wenn die Motoren unendlich viel Leistung hätten und der Abhang beliebig steil gewählt werden kann?

35 An der Westküste eines bestimmten Landes in den Tropen gibt es eine senkrechte Felsklippe. Wenn die Sonne an der Küste untergeht, ist die Spitze der Klippe noch beleuchtet: Die Erde ist rund und der Horizont ist weiter entfernt, wenn wir von der Spitze der Klippe aus schauen als vom Strand aus, und die Sonne ist etwas länger zu sehen.

Nach Sonnenuntergang kriecht der Rand des Schattens mit gleichmäßig zunehmender Geschwindigkeit die Klippe hinauf. Wie groß ist diese Beschleunigung?

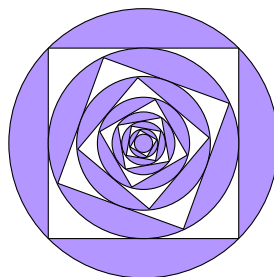
Die Klippe befindet sich genau auf dem Äquator. Nehmen wir an, es ist der Tag der Tagundnachtgleiche.

36 Jacob besuchte das örtliche Kernkraftwerk. Die Reiseleiterin erzählte den Besuchenden viele interessante Fakten über den Betrieb der Anlage. Jacob erfuhr beispielsweise, dass natürliches Uran 0,72 % ^{235}U enthält und der Rest hauptsächlich aus ^{238}U besteht, mit Halbwertszeiten von $7 \cdot 10^8$ bzw. $4,46 \cdot 10^9$ Jahren. Der Reaktor benötigt jedoch angereichertes Uran, das 3 % ^{235}U enthält.

Jacob ist nun neugierig: wie viel höher ist die Aktivität von angereichertem Uran im Vergleich zur gleichen Anzahl von Atomen natürlichen Urans?

37 Ihre Mutter hat Sonja einen energetisierenden Anhänger geschenkt – eine Halskette mit einem Amulett wie in der Abbildung zu sehen. Es handelt sich um einen Kreis mit dem Radius r , aus dem sie ein eingeschriebenes Quadrat ausgeschnitten hat. Dann hat sie einen Kreis in das Quadrat eingefügt. Aus diesem hat sie anschließend wiederum ein eingeschriebenes Quadrat herausgeschnitten und so weiter bis ins Unendliche. Um das Amulett noch wirkungsvoller zu machen, hat sie jedes eingeschriebene Quadrat um 20° gegenüber dem vorherigen gedreht.

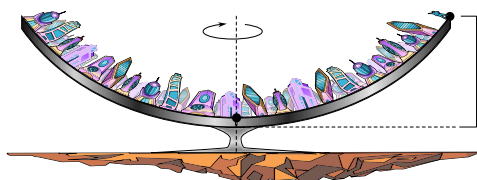
Sonja weiß, dass das energetisierende Amulett umso besser wirkt, je länger es sich dreht. Wie groß ist das Trägheitsmoment dieses Amuletts um die Achse senkrecht zur Amulettebene und durch seinen Mittelpunkt? Die Masse des Amuletts beträgt m .



38 In Zukunft planen wir, den Mars zu kolonisieren und zu terraformen. Die Oberflächengravitation auf dem Mars beträgt jedoch nur 36 % derjenigen auf der Erde, und viele Menschen kommen unter diesen Bedingungen nicht zurecht.

Deshalb haben wir Gyropolis gebaut, eine riesige Stadt in Form eines Rotationsparaboloids mit dem Radius 1000 m, die durch langsame Drehung um ihre vertikale Achse künstliche Schwerkraft erzeugt. Wenn ein Einwanderer auf dem Mars ankommt, bekommt er ein Zimmer am äußersten Rand, wo die scheinbare Schwerkraft der auf der Erde entspricht, und zieht dann langsam in die unteren Teile der Stadt, bis er sich an die geringere Schwerkraft gewöhnt hat. Natürlich ist an jedem Punkt der Stadt die Richtung der wahrgenommenen Schwerkraft senkrecht zur Oberfläche.

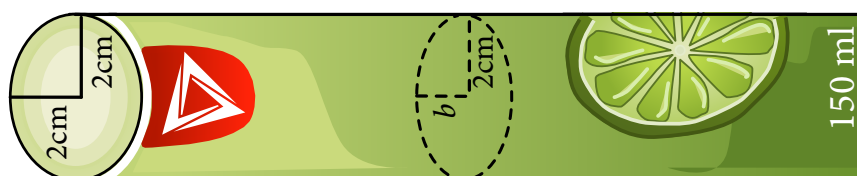
Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen dem Zentrum und dem Rand der Stadt?



39 George braucht eine Erfrischung nach einem langen, heißen Sommertag auf dem Fahrrad. Im nächstgelegenen Lebensmittelgeschäft kauft er sich ein Eis zum Schlecken. Das Eis befindet sich in einer Verpackung, die die Form eines „verformten Kegels“ hat. Das Volumen der Verpackung beträgt 150 ml, und ihr horizontaler Querschnitt ist in jeder Höhe elliptisch. Die große Halbachse bleibt konstant $a = 2$ cm, während sich die kleine Halbachse mit der Höhe linear verändert – an der Spitze gilt $b = a$, und am Boden gilt $b = 0$.

George isst das Eis von oben und schiebt es dabei langsam von unten aus der Verpackung heraus. Welche Arbeit hat er verrichtet, wenn er das Eis so weit herausgeschoben hat, dass er die Hälfte des Eisvolumens gegessen hat? Die Dichte des Eises beträgt 1000 kg/m^3 .

Das Bild wurde gedreht, damit es auf dieses Blatt passt, aber selbst George hält das Eis wie jeder Mensch mit der Öffnung nach oben.



40 Tom liebt schnelle Autos und Dragster-Rennen. Bei seinem letzten Versuch, den Weltrekord zu brechen, standen seine Fans in gleichmäßigen Abständen entlang der Dragster-Strecke mit der Länge s . Tom trat das Gaspedal durch und raste mit konstanter Beschleunigung a die Strecke hinunter. Jeder seiner Fans notierte die Momentangeschwindigkeit von Toms Auto, als es an ihm vorbeifuhr. Nach dem Rennen trafen sich die Fans in einer Kneipe, verglichen ihre Notizen und ermittelten den Durchschnitt der gemessenen Werte.

Wie groß ist das Verhältnis dieses Durchschnitts zu Toms tatsächlicher Durchschnittsgeschwindigkeit während des Rennens?

Lösungen

1 Um dieses Problem zu lösen, muss Annie es gar nicht vollständig ausrechnen. Da gemäß den Regeln jede Zahl zwischen 1 und 9 genau einmal in jeder Spalte vorkommen muss, haben alle Spalten das gleiche Gewicht (45 g) und die horizontale Koordinate des Schwerpunkts muss daher genau in der Mitte liegen. Das gleiche Argument gilt für die Zeilen und die vertikale Koordinate des Schwerpunkts, sodass der Schwerpunkt genau in der Mitte liegt und die gesuchte Antwort 0 cm lautet.

2 Um dieses Problem zu lösen, können wir uns vorstellen, dass der Zug (und dadurch auch Jacob und der Spiegel) still stehen und der Signalmast sich mit der Geschwindigkeit v auf alle drei zubewegt. Der Spiegel stellt dabei die sich-verändernde Landschaft hinter Jacob dar, da Objekte in einer Entfernung d vom Spiegel von Jacob in einer Entfernung d hinter dem Spiegel wahrgenommen werden. Das bedeutet, wenn sich der Signalmast mit einer Geschwindigkeit v auf ihn zubewegt, so bewegt sich auch dessen Spiegelbild im Spiegel auf Jacob mit der Geschwindigkeit v zu.

3 Wir bezeichnen die Haken von links nach rechts mit den Buchstaben A bis G . Beachte, dass das Verhältnis der Abstände der Haken E und G vom Drehpunkt $\frac{8}{7}$ beträgt. Die einzigen beiden Plüschplaneten, deren Massen im Verhältnis $7 : 8$ stehen, sind genau die 7- und 8-Gramm-Planeten. Wir müssen diese Planeten daher an die Haken E und G hängen.

Die Massen auf diesem Stab summieren sich zu $7 \text{ g} + 8 \text{ g} = 15 \text{ g}$. Das auf den Arm darüber ausgeübte Drehmoment beträgt daher $15 \text{ g} \cdot g \cdot 1 \text{ cm} = 15 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g^1$. Um dieses Drehmoment mit dem Haken F im Abstand 5 cm vom Drehpunkt auszugleichen, muss dort ein Planet mit der Masse 3 g platziert werden.

Auf der linken Seite des Mobiles beträgt das Verhältnis der Abstände der Haken B und C vom gemeinsamen Drehpunkt $3 : 1$. Die einzigen verbleibenden Planeten, deren Massen in diesem Verhältnis stehen, sind jene mit 2 g und 6 g. Gemeinsam üben sie ein Drehmoment auf den Arm über ihnen aus: $8 \text{ g} \cdot g \cdot 1 \text{ cm} = 8 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g$. Daher muss Haken A den Planeten mit der Masse 4 g aufnehmen. Die Planeten an den Haken A , B und C haben zusammen eine Masse von 12 g und üben daher ein Gesamtdrehmoment von $12 \text{ g} \cdot g \cdot 3 \text{ cm} = 36 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g$ aus. Der Planet am Haken D muss dies ausgleichen, wofür nur der Planet mit der Masse 9 g in Frage kommt.

Von links nach rechts betragen die Massen der Plüschplaneten 4, 2, 6, 9, 7, 3 und 8 g, und Helenas Vater wird die Planeten mit den Massen 1 g und 5 g nicht verwenden. Das macht natürlich Sinn: Pluto ist kein Planet mehr, und die Erde haben sie ohnehin schon zu Hause.

¹Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Abstand zwischen jedem Punktepaar 1 cm beträgt, wir könnten aber auch jede andere Konstante ungleich Null wählen.

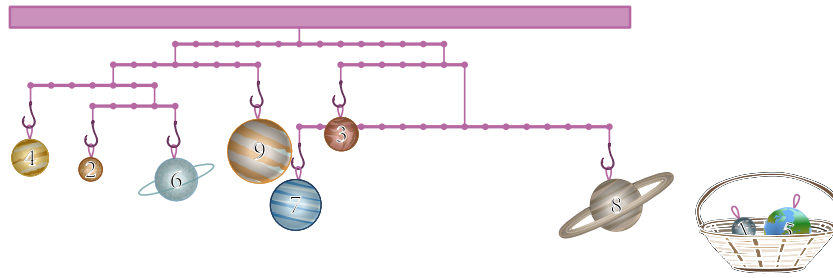


Abbildung 3.1: Mobile im Gleichgewicht

4 Das warme Wasser gibt Wärme an das kalte ab, bis ein thermisches Gleichgewicht erreicht ist. Gemäß der Problemstellung sollte dieses Gleichgewicht bei 34 °C liegen. Wir beginnen mit dem Aufstellen der kalorimetrischen Gleichung

$$Q_{\text{aufgenommen}} = Q_{\text{abgegeben}},$$

$$m_{\text{kalt}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t - t_{\text{kalt}}) = m_{\text{warm}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t_{\text{warm}} - t).$$
(4.1)

Die gesamte Gleichung lässt sich nun durch die spezifische Wärmekapazität von Wasser $c_{\text{H}_2\text{O}}$ dividieren. Mit x bezeichnen wir das Volumen des kalten Wassers, das pro Sekunde in die Badewanne fließt. Da der gesamte Volumenstrom 600 ml/s sein muss, beträgt der Volumenstrom des Warmwassers $600\text{ ml/s} - x$. Einsetzen der Werte und Vereinfachen ergibt:

$$x \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (34\text{ °C} - 17\text{ °C}) = (600\text{ ml/s} - x) \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (68\text{ °C} - 34\text{ °C}),$$

$$x \cdot 17\text{ °C} = (600\text{ ml/s} - x) \cdot 34\text{ °C}.$$
(4.2)

Aus diesem Ausdruck können wir x berechnen,

$$x = \frac{600\text{ ml/s} \cdot 34\text{ °C}}{17\text{ °C} + 34\text{ °C}} = 400\text{ ml/s}.$$
(4.3)

5 Abbildung 5.1 zeigt den kürzesten Weg, auf dem sich der Schall zwischen jedem Paar aufeinanderfolgender Freunde ausbreitet. An einigen Stellen befindet sich eine Steinmauer im direkten Weg, um die der Schall herumgehen muss.

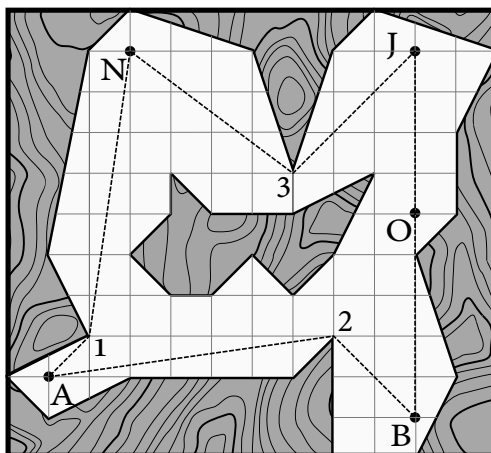


Abbildung 5.1: Weg einer Schallwelle in der Höhle

Wir müssen daher den ersten Teil des Weges zwischen den Punkten N und A in zwei kürzere Abschnitte mit dem Hilfspunkt 1 unterteilen. Glücklicherweise liegen auf einem quadratischen Gitter alle Längen entweder direkt auf den Achsen oder sind Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken, sodass wir nur den Satz des Pythagoras kennen müssen.

Beispielsweise beträgt die Länge des ersten Teils

$$\begin{aligned} d_{NA} &= d_{N1} + d_{1A} = \sqrt{(70 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} + \sqrt{(10 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} = \\ &= \sqrt{5000} \text{ m} + \sqrt{200} \text{ m} = 50\sqrt{2} \text{ m} + 10\sqrt{2} \text{ m} = 60\sqrt{2} \text{ m}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Analog gehen wir alle Abschnitte nacheinander durch und ermitteln ihre Längen.

$$d_{A2} = 50\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{2B} = 20\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{BO} = 50 \text{ m}, \quad d_{OJ} = 40 \text{ m}, \quad d_{J3} = 30\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{3N} = 50 \text{ m}. \quad (5.2)$$

Wenn wir alle Längen addieren, erhalten wir für den Weg des Schalls $(140 + 160\sqrt{2}) \text{ m}$. Schall breitet sich mit einer Geschwindigkeit von ungefähr $c_s = 343 \text{ m/s}$ aus. Um den gesamten Weg zurückzulegen, benötigt er also

$$t_s = \frac{(140 + 160\sqrt{2}) \text{ m}}{343 \text{ m/s}} \doteq 1,07 \text{ s}. \quad (5.3)$$

Wir wissen jedoch, dass die Reaktionszeit jeweils eine halbe Sekunde beträgt. Da der Ruf auf diese Weise vier Höhlenforscher:innen durchläuft, beträgt ihre Gesamtreaktionszeit $t_r = 4 \cdot 0,5 \text{ s} = 2 \text{ s}$, und Nina wird daher das gesamte Wort NABOJ nach $t_s + t_r \approx 3,07 \text{ s}$ hören.

6 Wenn Patricks durchschnittliche Rundenzeit für die ersten drei Runden 80 s betrug, dann beträgt die Gesamtzeit für diese drei Runden $3 \cdot 80 \text{ s} = 240 \text{ s}$. Nach der vierten Runde beträgt seine durchschnittliche Rundenzeit 78 s , somit beträgt die Gesamtzeit für alle vier Runden $4 \cdot 78 \text{ s} = 312 \text{ s}$.

Daher lief er die vierte Runde in $312 \text{ s} - 240 \text{ s} = 72 \text{ s}$, oder $01:12$.

7 Beim ersten Mal sagt das Navigationssystem Marcel, er solle mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h fahren, woraus wir direkt Marcells Entfernung vom Flughafen um $21:00$ berechnen können,

$$s = v \cdot t = 120 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 120 \text{ km}. \quad (7.1)$$

Auf dieselbe Weise können wir auch Marcells Entfernung vom Flughafen um $21:30$ berechnen,

$$s = 150 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 75 \text{ km}. \quad (7.2)$$

Daraus wissen wir, dass er in der ersten halben Stunde der Fahrt $120 \text{ km} - 75 \text{ km} = 45 \text{ km}$, zurückgelegt hat, daraus ergibt sich die Geschwindigkeit, mit der Marcel fährt, zu $\frac{45 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 90 \text{ km/h}$. Daher wird die Fahrt

$$\frac{120 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 80 \text{ min} \quad (7.3)$$

dauern, und er wird am Flughafen um $22:20$ ankommen.

8 Wenn die Glühbirne nicht vom Glaswürfel umgeben wäre, würde sie den gesamten Raum erhellen. Wenn wir einen Würfel mit einem Brechungsindex größer als 1 (nicht notwendigerweise genau 1,5) um die Glühbirne herum platzieren, wird das Licht gemäß dem Gesetz von Snellius beim Übergang von Glas zu Luft vom Lot gebrochen. Wenn wir also eine bestimmte Seitenfläche des Würfels betrachten, werden die Strahlen beim Auftreffen stärker gestreut als ohne das Glas, was bedeutet, dass sie mehr und sicherlich nicht weniger Raum beleuchten. Somit werden weiterhin 100 % des Raumes beleuchtet.

9 Der wichtigste Teil dieser Aufgabe ist die Beachtung der Einheiten beider Größen. Die Geschwindigkeit $v_{\max} = 320 \text{ km/h}$ ist nicht kompatibel mit den gegebenen Einheiten der Beschleunigung $2,6 \text{ km/h/s}$. Es ist jedoch möglich, die Beschleunigung auf entsprechende Einheiten umzurechnen $\text{km}/(\text{h} \cdot \text{h}) \equiv \text{km}/\text{h}^2$. Da wir wissen, dass der Zug jede Sekunde um $2,6 \text{ km/h/s}$ beschleunigt, würde der Zug in einer Stunde (welche aus 3600 Sekunden besteht) um $2,6 \text{ km/h/s} \cdot 1 \text{ h} = 9360 \text{ km/h}$ beschleunigen. Durch die Beziehung $v = a \cdot t$ können wir die Zeit ausdrücken, welche der Zug benötigt, um auf die maximale Geschwindigkeit zu beschleunigen.

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, ausgehend vom Ruhezustand, gilt:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} v_{\max} t. \quad (9.1)$$

Wenn wir t durch $\frac{v_{\max}}{a}$ ersetzen, können wir die vom Zug zurückgelegte Wegstrecke berechnen, nach welcher er auf die maximale Geschwindigkeit beschleunigt hat:

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_{\max} \cdot \frac{v_{\max}}{a} = \frac{v_{\max}^2}{2a}. \quad (9.2)$$

Durch Einsetzen der Werte in den korrekten Einheiten für beide Variablen erhalten wir die Strecke $5,47 \text{ km}$.

10 Die Kraft F_t , die auf eine vollständig eingetauchte Kugel wirkt, ist die Resultierende aus dem Auftrieb und dem Gewicht, d.h.

$$F_t = F_b - F_g = V \rho_v g - V \rho_d g = (\rho_v - \rho_d) \frac{4}{3} \pi r^3 g. \quad (10.1)$$

Die vom Wassermann verrichtete Arbeit wird durch $W = F_t \cdot h$ berechnet, mit dem Ergebnis

$$W = (\rho_v - \rho_d) \frac{4}{3} \pi r^3 g \cdot h \doteq 2,5 \text{ J}. \quad (10.2)$$

11 Zum Zeitpunkt, als die Straßenbahn die Kreuzung erreicht, muss der Schall der Alarmglocke bereits die Person im Auto erreicht haben und das Auto musste genug Zeit haben, um die Kreuzung zu verlassen. Um die minimal notwendige Entfernung zu finden, muss die Zeit, welche die Straßenbahn bis zur Kreuzung benötigt (t_{Tram}) gleich der Summe der Zeiten sein, welche der Schall benötigt, um das Auto zu erreichen (t_{Schall}) und welche das Auto benötigt, um die Kreuzung zu verlassen (t).

Die benötigte Entfernung zwischen Straßenbahn und Kreuzung ist gegeben durch s . Damit kann man die Zeiten wie folgt ausrechnen:

$$t_{\text{Tram}} = \frac{s}{v} \quad \text{und} \quad t_{\text{Schall}} = \frac{s}{c}. \quad (11.1)$$

Ersetzen dieser Ausdrücke in die Gleichung für die Zeit ergibt

$$t_{\text{Tram}} = t_{\text{Schall}} + t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{v} = \frac{s}{c} + t, \quad (11.2)$$

woraus wir die Entfernung ausdrücken können

$$s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v}. \quad (11.3)$$

12 Als erstes ermitteln wir, wieviel Fläche wir tatsächlich abdecken möchten. Dazu approximieren wir die Erde als Kugel mit dem Radius $R_\oplus = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$. Ihre Oberfläche kann ausgedrückt werden durch

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2. \quad (12.1)$$

Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass der Flächeninhalt von A0 1 m^2 beträgt und dass der Flächeninhalt auf die Hälfte abnimmt, wenn wir die Zahl nach A um 1 erhöhen. Beispielsweise hat Papier mit dem gängigen Format A4 einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2^4} \text{ m}^2 = \frac{1}{16} \text{ m}^2$.

Wir könnten die Reihe jedoch auch in entgegengesetzter Richtung zu den negativen Zahlen fortsetzen. Ein Blatt Papier der Größe A-1 hätte dann einen Flächeninhalt von 2 m^2 , und jedes weitere Blatt wäre doppelt so groß... bis wir endlich den Wert aus Gleichung 12.1 überschreiten. Für solche Fälle können wir eine praktische Funktion namens Logarithmus zur Basis 2 verwenden. Bei der Berechnung hilft ein Taschenrechner².

²Wenn unser Taschenrechner den Logarithmus zur Basis 2 nicht direkt berechnen kann, können wir die Beziehung $\log_y x = \frac{\log x}{\log y}$ verwenden.

Wir sollten nicht vergessen, den Betrag aufzurunden, da wir das *kleinste ausreichend große* Papier benötigen. Das Ergebnis lautet dann

$$-[N] = -\lceil \log_2 (5,1 \cdot 10^{14}) \rceil = -49, \quad (12.2)$$

was für das Papierformat A-49 steht.

13 Der Rauch bewegt sich nicht relativ zur Luft – soll heißen, er bewegt sich mit der Luft mit der Windgeschwindigkeit v relativ zum Boden. Bis zu dem Zeitpunkt, an dem der Jet das Ende der Tribüne erreicht, wird der Anfang der Rauchspur in die entgegengesetzte Richtung getragen und legt einen gewissen Weg zurück. Diese Dauer beträgt

$$t = \frac{s}{u} \quad (13.1)$$

und während dieser Zeit legt der zuallererst freigesetzte Rauch die Distanz

$$s_d = vt = v \frac{s}{u}, \quad (13.2)$$

zurück. Daher ist die Länge der Rauchspur

$$s + s_d = s + v \frac{s}{u} = s \left(1 + \frac{v}{u} \right). \quad (13.3)$$

14 Da das Prisma einen größeren Brechungsindex als Luft hat, werden Lichtstrahlen im Prisma zum Lot hin gebrochen. Damit keine Lichtstrahlen auf der anderen Seite des Prismas austreten, müssen die gebrochenen Lichtstrahlen zumindest parallel zur Wand des Prismas verlaufen, hinter der der Museumswärter sitzt, oder die gebrochenen Strahlen müssen noch steiler in Richtung der unteren Basis des Prismas gerichtet sein. Aus der Abbildung können wir erkennen, dass das Licht dafür maximal unter einem Winkel von 10° zum Lot gebrochen werden darf.

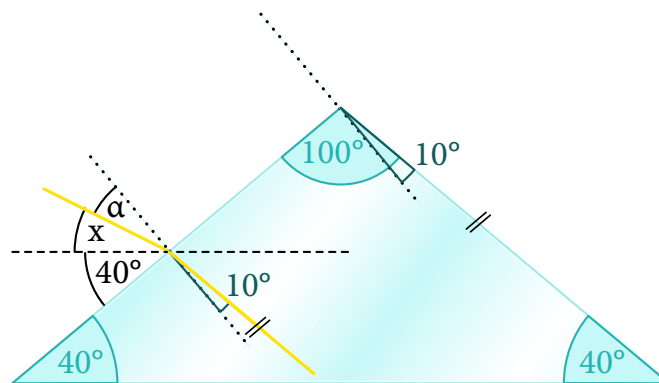


Abbildung 14.1: Überblick über die relevanten Winkel im Prisma

Von dieser Überlegung ausgehend, verwenden wir das Snellius'sche Brechungsgesetz, um den Einfallswinkel der Lichtstrahlen zu berechnen.

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ). \quad (14.1)$$

Da das Prisma gleichschenkelig ist, stehen die Seitenflächen in einem Winkel von 40° zur Horizontalen. Wenn wir also den Winkel zwischen dem Lot und der Oberfläche betrachten, sehen wir, dass $40^\circ + \gamma + \alpha = 90^\circ$, wobei γ jener Winkel ist, mit dem der Dieb die Taschenlampe neigen muss. Dieser Winkel ist daher

$$\gamma = 50^\circ - \alpha = 50^\circ - \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ) \doteq 25,4^\circ. \quad (14.2)$$

15 Zunächst stellen wir fest, dass die Geschwindigkeit des Aufzugs hier irrelevant ist. Wenn Kai die Hantel unbewegt festhalten würde, würde die Hantel eine Kraft von $m_c g$ auf ihn ausüben. Da er die Hantel aber mit einer Beschleunigung von a fallen lässt, ist es für Kai ausreichend eine Kraft von $m_c(g - a)$ aufzubringen. Zusätzlich dazu muss das tragende Seil des Aufzugs die Last des Aufzugs selbst und Kai ausgleichen, also die Kräfte $m_v g$ und $m_k g$, daher muss das Seil insgesamt die folgende Kraft aufbringen:

$$\begin{aligned} F &= m_k g + m_v g + m_c(g - a) \\ &= 60 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 250 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 20 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s}^2 - 5 \text{ m/s}^2) = 3200 \text{ N} \doteq 3,2 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

16 In allen drei Fällen, handelt es sich um einen vertikalen Wurf im selben Gravitationsfeld, nur die Anfangsbedingungen sind unterschiedlich. Daher ist es ausreichend, Formeln für die Bahnkurve und die Dauer einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu betrachten,

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \quad (16.1)$$

Beachte, dass die zweite Hälfte des Hochwerfens exakt mit dem gesamten nach unten Werfen übereinstimmt: Auf der Höhe des Fensters wird das hochgeworfene Ei dasselbe Tempo v_0 erreicht haben, mit dem Sam das Ei weggeworfen hat. Die erste Hälfte des Hochwerfens dauert demnach 2 s. Innerhalb dieser Zeitspanne ändert sich die Geschwindigkeit des Eies um $2v_0 = g \cdot 2 \text{ s}$. Sam wirft daher sicher mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 10 \text{ m/s}$, Daher erreicht das Ei eine maximale Höhe von

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \approx 5 \text{ m} \quad (16.2)$$

über dem Fenster. Außerdem wissen wir, dass das Ei am höchsten Punkt seiner Bewegung abstoppt, also Geschwindigkeit Null hat. Ab diesem Zeitpunkt handelt es sich um eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit Null. Der Fall vom höchsten Punkt dauert

$$\tau = t_{\uparrow} - \frac{t_{\uparrow} - t_{\downarrow}}{2} = \frac{t_{\uparrow} + t_{\downarrow}}{2} = 3 \text{ s}, \quad (16.3)$$

woraus wir die Anfangshöhe $H = \frac{g\tau^2}{2} = 45 \text{ m}$ berechnen können. Sams Fenster befindet sich daher auf einer Höhe von $H - h = 40 \text{ m}$ über dem Boden. Ein freier Fall aus dieser Höhe dauert

$$\sqrt{\frac{2(H - h)}{g}} = \sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s}. \quad (16.4)$$

17 Zunächst zeichnen wir das Freikörperbild. Alles, was wir brauchen, ist das zweite Newton'sche Gesetz, $F = ma$.

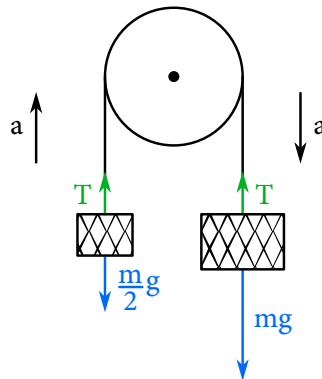


Abbildung 17.1: Zwei Massestücke an einer Rolle

Die Schwerkraft wirkt auf beide Massen: $F_1 = mg$ und $F_2 = \frac{m}{2}g$. Da auch F_1 und F_2 auf das Seil wirken, wird es gedehnt und übt daher an beiden Enden eine Zugkraft aus, die der Schwerkraft entgegengesetzt gerichtet ist. Diese beiden Kräfte werden im Freikörperbild mit T_1 und T_2 bezeichnet. Da das Seil und die Rolle masselos sind, muss T_1 gleich T_2 sein; andernfalls würde es zu einer unendlichen Beschleunigung des Seils selbst kommen. Wir bezeichnen daher T_1 und T_2 einfach als T .

Zusätzlich können wir annehmen, dass beide Massen eine gleich große Beschleunigung a haben, wobei die größere nach unten beschleunigt. Jetzt müssen wir nur noch die Bewegungsgleichungen für beide Massestücke aufstellen und nach a auflösen.

$$\frac{m}{2}a = -\frac{m}{2}g + T \quad a \quad ma = mg - T. \quad (17.1)$$

Durch Addition der Gleichungen können wir T eliminieren und a berechnen,

$$a = \frac{m - \frac{m}{2}}{m + \frac{m}{2}}g = \frac{1}{3}g. \quad (17.2)$$

18 Die Zahlen sind Zahlen zur Potenz zwei. Wir müssen jedoch die Richtigkeit jeder Aussage einzeln prüfen.

Die Steigerung der Bahngeschwindigkeit (1)

Ein erstes Gefühl würde vermuten lassen, dass wenn sich die Bahngeschwindigkeit erhöht, die Umlaufzeit abnimmt. Aber man darf nicht vergessen, dass eine Veränderung der Bahngeschwindigkeit auch eine Veränderung der Form der Bahnkurve mit sich zieht. Um nun herauszufinden, ob die angegebene Aussage wahr oder falsch ist, kann man die Situation betrachten in der die Geschwindigkeit so weit erhöht wird, dass der umlaufende Himmelskörper die Fluchtgeschwindigkeit erreicht. In diesem konkreten Fall würde die Umlaufzeit gewissermaßen unendlich werden. Das heißt sie würde sich definitiv erhöhen. Folglich ist diese Aussage also **falsch**.

Die Bahngeschwindigkeit im Perihel / in Sonnennähe (2)

Aus dem zweiten Kepler'schen Gesetz über die Planetenbahnen folgt, dass je näher die Erde der Sonne ist, desto schneller bewegt sie sich um die Sonne. Das bedeutet, diese Aussage ist **wahr**.

Der Winter (4)

Vergegenwärtigen wir uns, dass wenn Winter auf der Nordhalbkugel herrscht, auf der Südhalbkugel der Erde Sommer ist. Wenn die gegebene Aussage also wahr wäre, müsste der Winter in beiden Hemisphären (Nord- und Süd-) zur selben Zeit eintreten. Daraus folgt also, dass die gegebene Aussage **falsch** sein muss. In der Tat ist die Erde am Beginn des Jänners an ihrem nächsten Punkt zur Sonne und in der nördlichen Hemisphäre herrscht eisiger Winter. Ok, in jüngster Zeit vielleicht nicht gar so eisig.

Die kreisförmige Umlaufbahn und die erste kosmische Geschwindigkeit (8)

Die Zentripetalkraft, die einen Körper auf einer kreisförmigen Bahn hält, ist die Gravitationskraft. Diese hängt vom Radius r wie $\frac{1}{r^2}$ ab. Die Zentripetalkraft jedoch ist proportional zu $\frac{v^2}{r}$, mit v der Bahn-geschwindigkeit. Das bedeutet, dass die Kreisbahngeschwindigkeit sich mit der Höhe über der Erde h wie folgt ändert: $v \propto \frac{1}{R+h}$. Daraus folgt aber, dass diese Aussage **falsch** sein muss.

Geostationäre Satelliten (16)

Geostationäre Satelliten sind Satelliten, die die Erde umkreisen, aber sich dabei immer über dem selben Punkt der Erdoberfläche befinden. Das kann dadurch bewerkstelligt werden, dass der Satellit in eine Höhe gebracht wird, sodass seine Winkelgeschwindigkeit, mit welcher er die Erde umkreist, gleich groß ist wie die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde. So der Satellit über dem selben Punkt der Erdoberfläche verbleibt, bewegt er sich entlang der Richtung der Breitengrade. Umkreist der Satellit jedoch die Erde über einem anderen Breitenkreis als dem Äquator, so zieht die Gravitation, die zum Erdmittelpunkt hin wirkt, ihn auf den Äquator zu, was es für den Satelliten unmöglich macht über seinem Breitengrad zu bleiben. Das bedeutet, geostationäre Satelliten können wirklich nur über dem Äquator existieren. Diese Aussage ist also **wahr**.

Elliptische Bahnkurven (32)

Der leichtere Körper ist auf einer elliptischen Kreisbahn, wenn er durch die Gravitation an einen sehr viel schwereren Körper gebunden ist (und sich durch Zufall nicht auf einer kreisförmigen Bahn mit zugehöriger Geschwindigkeit bewegt). Allerdings kann der leichte Körper, wenn seine Geschwindigkeit zu groß ist, in die Unendlichkeit entfliehen. In diesem Fall bewegt sich der Körper dann auf einer hyperbolischen oder parabolischen Bahnkurve. Das bedeutet also, dass die angegebene Aussage **falsch** ist.

Addieren wir also die Zahlen der richtigen Aussagen, so ergibt sich die Antwort 18.

19 Ein guter erster Schritt ist zu erkennen, dass alle Kanten und alle Eckpunktpaare in einem regelmäßigen Tetraeder gleichwärtig sind. Es macht daher keinen Unterschied, wie wir den Tetraeder drehen oder an welche zwei Eckpunkte wir das Ohmmeter am Anfang anschließen, das Resultat wird sich dadurch nicht ändern. Man misst unterschiedliche Widerstände nur, nachdem man den einen Widerstand entfernt hat.

Somit können wir das Problem in eine äquivalente aber etwas leichtere Aufgabe überführen und diese lösen: Als erstes entfernen wir irgendeinen der Widerstände und verbinden erst dann die Ohmmeter-Anschlussklemmen mit zwei beliebigen Eckpunkten.

Man sollte direkt erkennen können, dass wir nur folgende³ drei verschiedenen Fälle der Grafik 19.1 lösen müssen:

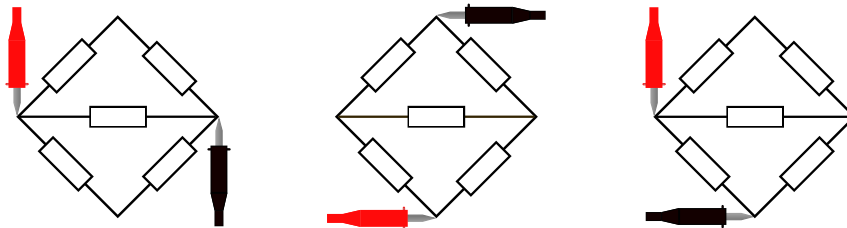


Abbildung 19.1: Die drei möglichen Messanordnungen von Widerständen in einem Tetraeder mit einem entfernten Widerstand

- So wir das Gerät an zwei Eckpunkten anbringen, mit denen der entfernte Widerstand nicht verbunden war, so bleiben drei parallele Stromkreis-Äste mit einem, zwei und zwei Widerständen, und daher können wir den Gesamtwiderstand direkt wie folgt berechnen

$$R_1 = R \parallel (R + R) \parallel (R + R) = R \parallel 2R \parallel 2R = \frac{1}{2}R. \quad (19.1)$$

- Werden die Anschlussklemmen des Geräts mit zwei Eckpunkten verbunden, zwischen denen der Widerstand entfernt wurde, so ergibt sich die angenehm einfache Anordnung von zwei parallelen Stromkreis-Ästen mit jeweils zwei Widerständen. Nachdem es sich hierbei um eine komplett symmetrische Schaltung handelt, kann keine Spannung an den Enden des letzten Widerstands anliegen, und wo keine Spannung anliegt, kann auch kein Strom fließen. Das bedeutet der Gesamtwiderstand beläuft sich auf

$$R_2 = (R + R) \parallel (R + R) = 2R \parallel 2R = R. \quad (19.2)$$

- Als letztes, wenn die Anschlussklemmen mit einem vollständigen Eckpunkt und einem mit fehlendem Widerstand verbunden werden, kommt es zu einer seriellen-parallelen Anordnung von Widerständen mit einem Gesamtwiderstand von

$$R_3 = R \parallel (R + (R \parallel 2R)) = R \parallel \left(R + \frac{2}{3}R\right) = R \parallel \frac{5}{3}R = \frac{5}{8}R. \quad (19.3)$$

Diese drei Werte sind eindeutig und daher ist die Antwort die Lösungsmenge $\left\{\frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R\right\}$.

20 Um das Sortieren zu vereinfachen, teilen wir die Buchstaben in mehrere Gruppen ein. Die Vermutung liegt nahe, dass einige Buchstaben nicht von alleine stehen bleiben.

³Wir verwenden dabei die abgekürzte Bezeichnung für den Widerstand zweier paralleler Stromkreis-Äste, $a \parallel b \equiv \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Beispielsweise stehen J und C auf einem einzigen Punkt, aber ihr Schwerpunkt liegt nicht senkrecht über diesem Punkt, sodass sie sofort umkippen. Ebenso kippt auch P sofort um. Obwohl es auf einer Basis mit endlicher Länge steht, liegt sein Schwerpunkt deutlich weiter rechts, sodass es über die Kante kippt.

Zur zweiten Gruppe gehören die Buchstaben O und S. Diese fallen nicht von selbst um, da ihr Schwerpunkt jeweils senkrecht über dem Standpunkt des Buchstaben liegt. Es reicht jedoch aus, sie mit einem kleinen Impuls anzustoßen, und sie kippen um.

Die Buchstaben I und Y bilden eine weitere Kategorie. Da die Dicke der Liniensegmente ungleich null ist, stehen sie stabil; sie ist jedoch viel kleiner als die anderen Abmessungen der Liniensegmente, und ein kleiner (aber im Gegensatz zu O und S endlich kleiner) Impuls reicht aus, um sie umzustößen. Von den beiden hat Y deutlich mehr Masse, aber sein Schwerpunkt liegt auch etwas höher. Berechnen wir daher, welcher dieser beiden Buchstaben stabiler ist.

Betrachten wir einen Buchstaben mit der Masse m , dessen Schwerpunkt sich in der Höhe H befindet und dessen Kante, über die er fallen möchte, in horizontaler Richtung einen Abstand von ε zum Schwerpunkt hat. Wenn der Buchstabe über die Kante gekippt wird, erhöht sich seine potenzielle Energie um

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg(\sqrt{H^2 + \varepsilon^2} - H). \quad (20.1)$$

Dies ist die Arbeit, mit der wir die Stabilität des Buchstabens quantifizieren. Für $\varepsilon \ll H$ gilt Folgendes

$$\sqrt{H^2 + \varepsilon^2} \approx H \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2H^2} \right) \Rightarrow W \approx \frac{mg\varepsilon^2}{2H}. \quad (20.2)$$

Das Verhältnis $\frac{m\varepsilon^2}{H}$ ist daher für die Stabilität entscheidend. Ein Buchstabe mit einem höheren Verhältnis ist stabiler, und das Gewicht des Buchstabens ist proportional zu seiner Größe.

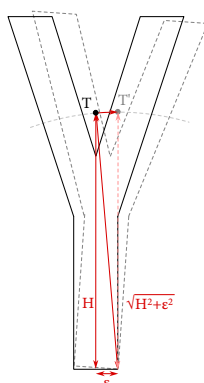


Abbildung 20.1: Kippen des Buchstaben Ypsilon. Um das Ypsilon zu kippen, muss es auf die gepunktete Position angehoben werden. Wir sehen, dass sein Schwerpunkt T' in dieser Position höher liegt als T in der ursprünglichen Position.

Die Buchstaben I und Y haben denselben Wert für ε . Entscheidend ist daher das Verhältnis $\frac{m}{H}$. Nehmen wir an, ein Quadrat des quadratischen Gitters hat eine Seitenlänge von einer Einheit und ein Liniensegment eines Buchstabens mit dieser Länge hat eine Masse von einer Einheit. Dann beträgt für I die Höhe des Schwerpunkts 4 und seine Masse 8, sodass das Verhältnis $\frac{m}{H}$ 2 ist. Für Y beträgt H ungefähr 4,76 und die Masse ungefähr 12,9, sodass das Verhältnis, das die Stabilität bestimmt, ungefähr 2,7 ist. Y ist daher stabiler als I.

Fahren wir fort. Die Buchstaben N, A und H haben alle ihren Schwerpunkt genau in der Mitte des Rechtecks, das sie beschreiben, und drehen sich um einen Punkt am Rand, der in allen Fällen zwei Quadrate horizontal und vier Quadrate vertikal vom Mittelpunkt entfernt liegt. Die Stabilität wird daher ausschließlich durch ihr Gewicht bestimmt. Durch einfaches Addieren der Längen der Liniensegmente stellen wir fest, dass N das größte Gewicht hat, gefolgt von H und schließlich A.

Es bleibt noch ein letzter problematischer Einzelfall – B. B steht auf einem geraden Stab der Länge 2, an den ein Halbkreis mit Radius 2 anschließt. Wenn der Schwerpunkt dieses Buchstabens mehr als zwei Felder von seinem vertikalen Segment entfernt wäre, wären wir fertig. Eine ungefähre Berechnung zeigt jedoch, dass sein Schwerpunkt etwas weiter entfernt ist als⁴

$$x = \frac{8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4\pi \cdot 3}{14 + 4\pi} \doteq 1,645. \quad (20.3)$$

Das bedeutet, dass der Schwerpunkt von B weniger als 0,355 horizontal von der Kante entfernt ist, über die wir kippen wollen, was definitiv weniger ist als bei den Buchstaben aus der vorherigen Gruppe, aber mehr als bei I und Y, sodass es in der Stabilitätsreihe zwischen ihnen liegt.⁵

Die Antwort lautet daher N, H, A, B, Y, I. Die übrigen Buchstaben fallen entweder von selbst um oder es ist nur sehr wenig Kraft erforderlich, um sie umzustößen.

21 Wir wissen, dass der Zufluss in den Tank Q konstant ist. Die Geschwindigkeit des Abflusses durch ein kleines Loch am Boden des Tanks hängt jedoch auch vom hydrostatischen Druck ab, der wiederum von der Höhe des Füllstands im Tank h abhängt. Die Höhe der Wassersäule als Funktion der Zeit zu bestimmen, ist für uns wahrscheinlich zu schwierig.⁶ Glücklicherweise müssen wir das auch nicht, da sich die Frage in der Aufgabenstellung auf einen einzigen Parameter bezieht.

Die Asymptote bei $t \rightarrow \infty$ bestimmt den maximalen Wasserstand im Tank $h_{\max} = 80$ cm – das heißt, die Höhe, bei der der hydrostatische Druck am Boden ausreicht, damit das Wasser genauso schnell abfließt, wie es einfließt.

Nun können wir die gepunktete Tangente bei $t = 0$ betrachten. An diesem Punkt ist der Wasserstand noch null, so dass auch der hydrostatische Druck null ist und das Wasser überhaupt nicht abfließt; als ob es kein Loch im Boden gäbe. In besagtem Fall würde sich der Tank offensichtlich in der Zeit $\tau = 1$ h füllen. Wir

⁴Dies ist nur eine untere Schranke, da der Schwerpunkt des Halbkreises etwas näher an seinem Rand liegt, sodass seine Koordinate etwas größer als 3 ist.

⁵Für B ist ε ausreichend kleiner als die Höhe des Schwerpunkts, sodass dieselbe Strategie wie bei I und Y angewendet werden kann, um die Stabilität zu untersuchen. Wir müssen dies jedoch nicht genau berechnen, da B einen viel größeren ε -Wert hat, der zudem im Stabilitätsverhältnis quadriert erscheint, sodass B definitiv stabiler ist.

⁶Es ergibt sich eine Chini-Janssen Differentialgleichung $\frac{dh}{dt} = \alpha + \beta\sqrt{h}$, die in Form der Lambert-W-Funktion formuliert ist und die wir sicherlich nicht lösen wollen.

können daher den Zufluss wie folgt ausdrücken:

$$Q = \frac{h_{\max} \cdot S}{\tau}. \quad (21.1)$$

Aus der Bernoulli-Gleichung können wir schnell die Ausflussgeschwindigkeit als Funktion der Höhe der Wasseroberfläche im Tank bestimmen

$$\rho \frac{v(h)^2}{2} = \rho gh \Rightarrow v(h) = \sqrt{2gh}. \quad (21.2)$$

Wir wissen, dass bei einem Niveaustand $h_{\max} = 80$ cm der Zufluss gleich dem Abfluss ist, wobei sich dieser aus dem Produkt der Abflussgeschwindigkeit und der unbekannten Fläche des Lochs A ergibt. Somit gilt

$$Av = A\sqrt{2gh_{\max}} = Q, \quad (21.3)$$

und wir erhalten – nach Substitution für Q mittels 21.1 – das Resultat

$$A = \frac{Q}{\sqrt{2gh_{\max}}} = \frac{S}{\tau} \sqrt{\frac{h_{\max}}{2g}} = 56 \text{ mm}^2. \quad (21.4)$$

22 Wir können sofort berechnen, dass sich genau 100 ml Joghurt in der Milch befinden, da dies 10 % von 1 l entspricht.

Nach dem Absetzen der Milch befindet sich ganz oben nur noch Wasser, die Joghurtkonzentration ist dort daher 0 %. Damit die durchschnittliche Konzentration 10 % beträgt, muss die Konzentration am Boden 20 % betragen und steigt somit um 2 % pro 100 ml. Die oberen 200 ml haben daher eine durchschnittliche Konzentration von 2 %, was insgesamt 4 ml Joghurt entspricht.

Das verbleibende Volumen in der Flasche beträgt 800 ml und das Volumen an Joghurt darin macht 96 ml aus. Beim Schütteln homogenisiert sich die Konzentration, sodass sie $\frac{96 \text{ ml}}{800 \text{ ml}} = 12$ % beträgt. Davon hat Tom 200 ml ausgegossen, also 24 ml an Joghurt.

Schließlich addieren wir einfach das Volumen des Joghurts im Glas,

$$4 \text{ ml} + 24 \text{ ml} = 28 \text{ ml}, \quad (22.1)$$

und berechnen die Gesamtkonzentration als Verhältnis des Volumens des Joghurtanteils zum Gesamtvolumen, d. h.

$$\frac{28 \text{ ml}}{400 \text{ ml}} = 7 \%. \quad (22.2)$$

23 Die Formulierung der Aufgabenstellung impliziert, dass der Baumstamm um den Winkel α zur horizontalen Richtung geneigt ist. Das Gewicht Mg wirkt im Mittelpunkt senkrecht nach unten, Matthias wirkt normal zur Oberfläche mit einer Kraft F_M am oberen Ende, und Jakob wirkt mit einer Kraft F_K am unteren Ende. Diese Kraft kann in eine horizontale Komponente F_{Kx} und eine vertikale Komponente F_{Ky} zerlegt werden.

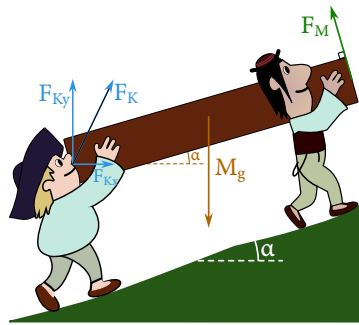


Abbildung 23.1: Zerlegung der auf den Baustam wirkenden Kräfte von Matthias und Jakob.

Im Gleichgewicht ergibt sich

- für die Kräfte in vertikaler Richtung $Mg = F_M \cos \alpha + F_{Ky}$;
- für die Kräfte in horizontaler Richtung $F_M \sin \alpha = F_{Kx}$;
- für die Drehimpulse in bezug auf das untere Ende der Last $Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = F_M L$.

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man

$$\begin{aligned} F_M &= \frac{1}{2} Mg \cos \alpha, \\ F_{Kx} &= \frac{1}{2} Mg \sin \alpha \cos \alpha, \\ F_{Ky} &= \frac{1}{2} Mg + \frac{1}{2} Mg \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (23.1)$$

Die von Jakob ausgeübte Kraft ist

$$F_K = \sqrt{F_{Kx}^2 + F_{Ky}^2} = \frac{1}{2} Mg \sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}, \quad (23.2)$$

und das gewünschte Verhältnis der Kräfte ist

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}}. \quad (23.3)$$

24 Wir können den Längengrad außer Acht lassen: Ein Tag ist viel kürzer als ein Jahr und die Position der Sonne ändert sich viel schneller in Ost-West-Richtung als in Nord-Süd-Richtung. Während eines Tages können wir also annehmen, dass der Längengrad der Sonne konstant ist und es ausreicht, den Breitengrad zu betrachten.

Die Neigung der Erdachse bestimmt, wie weit nördlich oder südlich die Sonne unter dem Jahr wandert. Als Nördlicher Wendekreis und Südlicher Wendekreis werden jene Breitenkreise bezeichnet, die bei der

(Juni-)Sommersonnenwende bzw. (Dezember-)Wintersonnenwende passiert werden. Zu zweitem Zeitpunkt, wenn die Sonne am weitesten südlich steht, kann die nördliche Polarregion, am Polarkreis, die Sonne gar nicht sehen. Umgekehrt ist es sechs Monate später am südlichen Polarkreis. Die Breitengrade der Wendekreise lauten $\varepsilon_{\oplus} = \pm 23,44^\circ$ und jene der Polarkreise $\pm(90^\circ - \varepsilon_{\oplus}) \approx \pm 66,56^\circ$.

Diese Situation ist in Abbildung 24.1 skizziert.

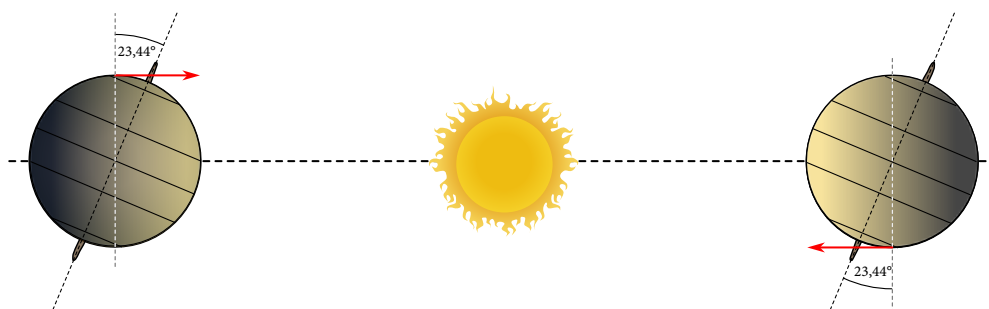


Abbildung 24.1: Relativposition von Erde und Sonne während der Sommer- bzw. Wintersonnenwende.

Diese Kreise teilen die Erdoberfläche in fünf Regionen, wo sich die Position der Sonne während des Jahres unterschiedlich verhält:

- In der südlichen Polarregion gibt es einen Tag im Jahr, an dem die Sonne gar nicht untergeht. Während sie sich über den Horizont bewegt, überquert sie zwangsläufig die nördliche Richtung.
- Zwischen dem südlichen Polarkreis und dem südlichen Wendekreis kann man die Sonne jeden Mittag im Norden sehen, unabhängig von der Jahreszeit.
- In den Tropen, also zwischen den Wendekreisen, kann die Sonne je nach Jahreszeit Mittags im Norden oder Süden zu sehen sein. Wir interessieren uns für die (Juni-)Sommersonnenwende, wo die Sonne ihre nördlichste Position erreicht und dadurch auch in den Tropen im Norden erscheint.
- Zwischen dem nördlichen Polarkreis und dem nördlichen Wendekreis sehen wir die Sonne mittags im Süden. Um Mitternacht wäre sie im Norden, allerdings unterhalb des Horizonts, weshalb wir sie nicht sehen können.
- Letztlich gibt es auch in der nördlichen Polarregion einen Tag im Jahr, an dem die Sonne nicht untergeht und daher Zwangsläufig den Norden passiert, jedoch um Mitternacht. Einzige Ausnahme ist der Nordpol selbst, wo sozusagen alle Richtungen Süden sind, aber da es sich um einen Punkt handelt, trägt er nichts zur Oberfläche bei.



Abbildung 24.2: Erde markiert mit allen Bereichen, von denen aus die Sonne im Norden gesehen werden kann

Es verbleibt herauszufinden, was die Fläche der Regionen südlich des nördlichen Wendekreises $S_{\downarrow}$ und die Fläche nördlich des nördlichen Polarkreises $S_{\uparrow}$ ist, so wie in Abbildung 24.2 markiert. Dies lässt sich mit der Formel für die Fläche eines Kugelsegments berechnen. Dafür brauchen wir die Höhe der beiden Bereiche: Für die Polarkappe ist das $h_{\uparrow} = R(1 - \cos \varepsilon)$, und für die Region südlich des nördlichen Wendekreises $h_{\downarrow} = R(1 + \sin \varepsilon)$. Zusammen ergibt das

$$S = S_{\downarrow} + S_{\uparrow} = 2\pi R h_{\downarrow} + 2\pi R h_{\uparrow} = 2\pi R(h_{\downarrow} + h_{\uparrow}) = 2\pi R^2(1 - \cos \varepsilon + 1 + \sin \varepsilon) = 2\pi R^2(2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon), \quad (24.1)$$

und da wir an dem Bruchteil der gesamten Erdoberfläche $S_{\oplus}$ interessiert sind, ist die Antwort

$$\frac{S}{S_{\oplus}} = \frac{2\pi R^2(2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon)}{4\pi R^2} = \frac{2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon}{2} \doteq 0,74 = 74 \%. \quad (24.2)$$

25 Daniel denkt, wie jeder gute Bogenschütze, darüber nach, wohin er zielen soll. Er kennt die Entfernung zum Ziel $d = 70$ m und die Geschwindigkeit $v_0 = 50$ m/s. Um zu erfahren, wohin er zielen muss, zeichnet er direkt vor dem Schießen eine Skizze.

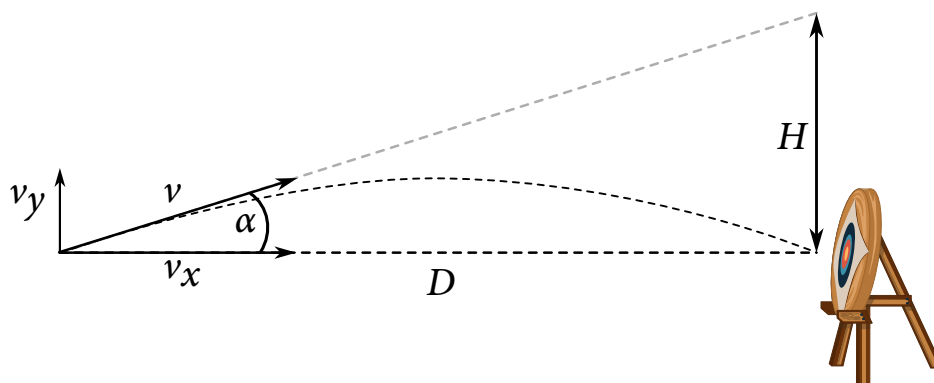


Abbildung 25.1: Schuss auf ein Ziel

Zunächst stellt er fest, dass der Punkt, auf den er zielt, sich in einer Höhe H über der Mitte des Ziels befindet und er H ausdrücken kann über die Beziehung

$$\tan \alpha = \frac{H}{D}. \quad (25.1)$$

Nun muss nur noch $\tan \alpha$ ermittelt werden. Diese Ausdruck ergibt sich durch die Zerlegung der Anfangsgeschwindigkeit in die x - und y -Komponente

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \quad (25.2)$$

In y -Richtung wirkt die Schwerkraft auf den Pfeil, daher erhalten wir in dieser Richtung

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (25.3)$$

wobei wir uns für das Auftreffen des Pfeils auf die Ebene, in der das Ziel liegt, interessieren, d. h. $y = 0$. Dies geschieht zum Zeitpunkt

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.4)$$

In x -Richtung wirkt auf den Pfeil keine Kraft. Daher gilt zwischen dem Zeitpunkt t und der Entfernung D die Beziehung

$$D = v_x t = v \cos \alpha \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.5)$$

Da H und D über den Tangens des Abschusswinkels miteinander in Beziehung stehen, verwenden wir die trigonometrischen Formeln

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}. \quad (25.6)$$

Nach Einsetzen in die Gleichung für die Entfernung erhalten wir

$$D = \frac{2v^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}. \quad (25.7)$$

Wir setzen H/D für $\tan \alpha$ ein entsprechend Gleichung 25.1, und nach einigen Umformungen erhalten wir die quadratische Gleichung

$$H^2 - \frac{2v^2}{g}H + D^2 = 0, \quad (25.8)$$

deren Lösung sich ergibt zu⁷

$$H = \frac{v^2}{g} - \sqrt{\frac{v^4}{g^2} - D^2} \approx 10 \text{ m}. \quad (25.9)$$

26 Beginnen wir damit, die definierenden Einheiten des gulp-belch-wink-Systems zu quantifizieren. Mit Volumen und Zeit werden wir keine großen Schwierigkeiten haben. Wir wissen, dass

$$V = 1 \text{ gulp} = \frac{1 \text{ pt}}{20} \approx \frac{473 \text{ ml}}{20} = 23,65 \text{ ml}, \quad (26.1)$$

und $t = 1 \text{ wink} = 0,5 \text{ s}$. Die Bestimmung der Schallintensität wird etwas schwieriger sein. Sei I die Schallintensität 1 belch. Wir wissen, dass sie als die Schallintensität definiert ist, die dem Schallpegel 100 dB entspricht, d.h. 10 B. Auf Basis der Definition des Schallpegels $L = \log \frac{I}{I_0}$, wobei $I_0 = 1 \text{ pW/m}^2$, können wir schreiben $10 \text{ B} = \log \frac{I}{I_0}$, woraus

$$I = 10^{10} I_0 = 10^{10} \cdot 1 \text{ pW/m}^2 = 10^{-2} \text{ W/m}^2. \quad (26.2)$$

Nun müssen wir die Größen V , t und I kombinieren, um etwas mit der Dimension einer Masse zu erhalten. Wir suchen also einen Ausdruck der Form $m = V^\alpha \cdot t^\beta \cdot I^\gamma$. Es sollte gelten, dass $[A] = [V]^\alpha \cdot [t]^\beta \cdot [I]^\gamma$, wobei $[A]$ die Dimension (d. h. Einheit) der Größe A bezeichnet, die Dimension der Masse ergibt. Wir erhalten

$$[m] = (\text{m}^3)^\alpha \cdot \text{s}^\beta \cdot (\text{kg/s}^2)^\gamma = \text{m}^{3\alpha} \cdot \text{kg}^\gamma \cdot \text{s}^{\beta-2\gamma} \stackrel{!}{=} \text{m}^0 \cdot \text{kg}^1 \cdot \text{s}^0. \quad (26.3)$$

Daraus können wir sofort erkennen, dass $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ and $\beta = 3$, somit

$$m = t^3 I = (0,5 \text{ s})^3 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2 = \frac{1}{800} \text{ kg} = 1,25 \text{ g}. \quad (26.4)$$

Nun steht nichts mehr im Wege, Johns Gewicht in seinen natürlichen Einheiten zu berechnen,

$$M = 200 \text{ lb} \approx 90\,718 \text{ g} = 72\,575 \text{ belch} \cdot \text{wink}^3. \quad (26.5)$$

27 Der größte erreichbare Druck im großen Tank wird dann erreicht, wenn die kleinen Tanks nacheinander mit ihm verbunden werden, da wir die Druckdifferenz zwischen dem großen und den kleinen Behältern maximieren wollen, denn genau dann wird auch die in den großen Tank übertragene Gasmenge maximiert. Betrachten wir die Situation, wenn der Stickstofflieferant nur zwei kleine Tanks hätte, genannt 1 und 2. Das

⁷Wir wählen die kleinere Lösung.

normale Verfahren besteht darin, die Tanks 1 und 2 nacheinander mit dem großen Tank zu verbinden. Dies hinterlässt in den kleinen Tanks die Drücke p_1 und p_2 , während im großen Tank der Druck p_2 verbleibt. Alternativ könnte man den kleinen Tank 1 mit dem großen Tank verbinden, danach die Drücke zwischen den Tanks 1 und 2 ausgleichen, und dann die kleinen Tanks wieder nacheinander mit dem großen verbinden. Dadurch verbliebe der Druck p'_1 in Tank 1, welcher größer ist als p_1 , woraus folgt, dass der resultierende Druck p'_2 im großen Tank (und dem kleinen Tank 2) kleiner als p_2 ist. Es zahlt sich also nicht aus, die Drücke in den kleinen Tanks auszugleichen.

Aus der Zustandsgleichung eines idealen Gases wissen wir, dass die Gasmenge in den Tanks vor dem Verbinden mit $n = \frac{pV}{RT}$ bestimmt werden kann. Wir wissen, dass die Gesamtstoffmenge n vor und nach dem Verbinden der Tanks gleich sein muss, soll heißen, die Summe der n im großen und kleinen Tank vor dem Verbinden muss gleich dem gesamten n nach dem Verbinden sein. Wenn wir die Größen des kleinen Tanks mit dem Index s kennzeichnen, jene des großen Tanks mit l , und den Gesamtzustand nach dem Verbinden mit t , dann erhalten wir

$$\frac{p_l V_l}{RT} + \frac{p_s V_s}{RT} = \frac{p_t V_t}{RT}. \quad (27.1)$$

Da sich die Temperatur und die universelle Gaskonstante R während des Prozesses nicht verändern, können wir den (ausgeglichenen) Gesamtdruck nach Verbinden der Tanks anschreiben als

$$p_t = \frac{p_l V_l + p_s V_s}{V_t}. \quad (27.2)$$

Vor dem Verbinden des ersten kleinen Tanks ist dieser Druck gleich null, aber nach jeder folgenden Verbindung steigt dieser Druck – und der resultierende Druck in den verbundenen Tanks hängt davon ab, wie groß der Druck davor im großen Tank war.

Wir führen die Berechnung von p_t also fünf mal durch: Beim ersten mal setzen wir 0 für p_l ein, und jedes darauffolgende mal verwenden wir das letzte zuvor berechnete p_t . Als letzten, fünften Druck p_t erhalten wir $\frac{23255}{7776}$ MPa, oder gerundet 3 MPa.

28 Die Schallplatte mit dem Plattenteller dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega = \frac{100}{3} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{9} \pi \text{ rad/s}. \quad (28.1)$$

Die der Schallplatte zugeführte Rotationsenergie muss also $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$ betragen. Das Trägheitsmoment einer durchgehenden Scheibe ist dabei gegeben durch $J = \frac{1}{2} (m + M) r^2$, mit r dem Radius der Scheibe. Man kann daher den oberen Ausdruck für J einsetzen und erhält die Energie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} (m + M) r^2 \omega^2. \quad (28.2)$$

Aus der Angabe sind die Spannung und die Stromstärke des Plattenspielers bekannt. Die Leistung, die zum Antrieb der Schallplatte benötigt wird, ist durch $P = UI$ gegeben. Man kann nun die Zeit einfach als die

benötigte Energie dividiert durch die Antriebsleistung berechnen,

$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{P} = \frac{\frac{1}{4}(m + M)\left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2}{UI} = \frac{(200 \text{ g} + 2 \text{ kg}) \cdot (15 \text{ cm})^2 \cdot \left(\frac{10}{9} \pi \text{ rad/s}\right)^2}{4 \cdot 5 \text{ V} \cdot 100 \text{ mA}} \approx 0,302 \text{ s.} \quad (28.3)$$

29 Bevor wir zu rechnen beginnen, müssen wir die Aufgabe zunächst in verständliche Sprache übersetzen. Sobald wir verstehen, worum es physikalisch geht, können wir loslegen.

Damit das gesamte System im Gleichgewicht ist, muss die resultierende Kraft auf jede einzelne Ladung null sein. Dank der Symmetrie genügt es, nur die Kräfte zu betrachten, die auf eine einzelne Eckladung des Würfels wirken. Die einzige anziehende Kraft auf diese Eckladung stammt von der Ladung im Zentrum, deren Betrag wir bestimmen wollen. Alle anderen Ladungen üben abstoßende Kräfte aus – drei Ladungen im Abstand der Würfelkante, drei im Abstand der Flächendiagonale und schließlich eine Ladung im Abstand der Raumdiagonale. Wir bezeichnen die Kantenlänge des Würfels mit a . Dann beträgt die Flächendiagonale $\sqrt{2}a$ und die Raumdiagonale $\sqrt{3}a$.

Jede Kraft, die auf die gewählte Eckladung wirkt, kann in zwei Komponenten zerlegt werden – eine in Richtung der resultierenden Kraft (also entlang der Raumdiagonalen) und eine senkrecht dazu. Die senkrechten Komponenten heben sich aufgrund der Symmetrie gegenseitig auf, und die Komponenten entlang der Raumdiagonalen addieren sich zur Gesamtkraft. Daher interessieren uns die Cosinuswerte der Winkel zwischen der Raumdiagonalen und der Würfelkante sowie der Raumdiagonalen und der Flächendiagonalen.

Bitte kurz aufhören zu lesen – obligatorischer Vibe-Check.

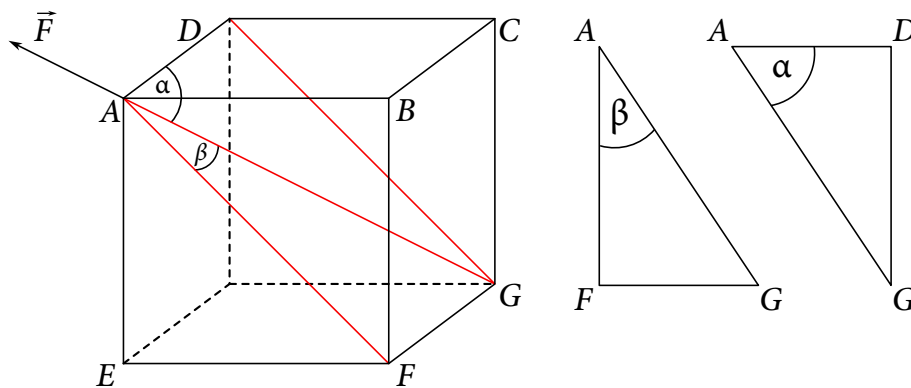


Abbildung 29.1: Skibidi-Würfel

Ok, Vibe-Check bestanden. Als Nächstes berechnen wir die Kraft, die von der Ladung ausgeht, die sich in einem Abstand gleich der Kantenlänge des Würfels befindet. Der Cosinus des erforderlichen Winkels ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADG:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (29.1)$$

Damit ist die Kraft

$$F_h = -k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2}. \quad (29.2)$$

Nun die Kraft der Ladung, die sich im Abstand gleich der Flächendiagonale befindet. Der Cosinus des erforderlichen Winkels ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AFG :

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad (29.3)$$

Damit ist die Kraft

$$F_s = -k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2}. \quad (29.4)$$

Für die Kraft der Ladung, die sich in einem Abstand gleich der Raumdiagonale befindet, müssen wir uns nicht mit Winkeln herumschlagen, daher ist die Kraft einfach

$$F_t = -k \frac{q^2}{3a^2}. \quad (29.5)$$

Zuletzt müssen wir die Kraft der Ladung in der Mitte berechnen. Dies ist die gleiche Situation wie bei der Raumdiagonale, außer dass der Abstand halbiert ist. Daher beträgt die Kraft

$$F_{\text{Zentrum}} = 4k \frac{qQ}{3a^2}. \quad (29.6)$$

Die resultierende Kraft beträgt daher

$$F = F_{\text{Zentrum}} - 3F_h - 3F_s - F_t = 0. \quad (29.7)$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} 4k \frac{qQ}{3a^2} &= -3k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2} - 3k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2} - k \frac{q^2}{3a^2}, \\ 4 \frac{Q}{3} &= -3 \frac{q}{\sqrt{3}} - 3 \frac{\sqrt{2}q}{2\sqrt{3}} + \frac{q}{3}, \\ Q &= -\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} q. \end{aligned} \quad (29.8)$$

Die Ladung im Zentrum beträgt daher $Q \doteq -2,47 \text{ C}$. GG EZ.

30 Schreiben wir zunächst die Bewegungsgleichungen auf, die die Bewegung des Projektils beschreiben:

$$\begin{aligned} y &= v \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}at^2, \\ x &= v \cos(\alpha)t. \end{aligned} \quad (30.1)$$

Am Mond sind die Gleichungen im Wesentlichen dieselben; nur die Gravitationsbeschleunigung unterscheidet sich. Ersetzen wir daher $a = 0,16g$, so folgt

$$\begin{aligned} y_{\text{L}} &= v_{\text{L}} \sin(\alpha)t_{\text{L}} - \frac{1}{2}0,16gt_{\text{L}}^2, \\ x_{\text{L}} &= v_{\text{L}} \cos(\alpha)t_{\text{L}}. \end{aligned} \quad (30.2)$$

Wir können die Position im Video nicht fingieren. Um sicherzustellen, dass die Gleichungen für x und y unverändert bleiben, müssen wir demnach die Zeiten und die Geschwindigkeiten geeignet abändern. Wir wissen, dass

$$0,16t_{\text{L}}^2 = t_{\oplus}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{L}} = \frac{1}{\sqrt{0,16}}t_{\oplus} = \frac{1}{0,4}t_{\oplus} = 2,5t_{\oplus}. \quad (30.3)$$

gilt. Anhand der Gleichung x_{L} , finden wir, dass

$$x_{\text{L}} = v_{\text{L}} \cos(\alpha)2,5t_{\oplus}, \quad (30.4)$$

und somit $v_{\text{L}} = 0,4v_0$ gelten muss, um sicherzustellen, dass 30.4 dem Ausdruck für x in Gleichung 30.1 entspricht. Am Mond würde demnach die Projekttilbewegung 2,5 länger anhalten, was bedeutet, dass das Erde-Video mit einer Bildrate 2,5 langsamer abgespielt werden muss, d.h. 24 Hz. Das bedeutet, dass wir einfach von der Fernsehbildrate zur Filmbildrate übergehen.

Zufall? Wohl kaum.

31 Betrachten wir eine Wärmepumpe als eine Wärmekraftmaschine, die Energie aus dem Stromnetz bezieht und Wärme aus Adams Keller in Justines Keller überträgt. Der Schlüssel zur Lösung des Problems liegt darin, zu verstehen, wie Effizienz definiert ist.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass Effizienz das Verhältnis zwischen dem, was wir erreichen wollen, und dem, was wir dafür investieren müssen, ist. In Justines Fall ist das, was wir erreichen wollen, die Wärmemenge, die die Wärmepumpe in ihren Keller überträgt, Q_{out} , und das, was wir investieren müssen, ist die Menge an elektrischer Energie, die aus dem Netz geliefert wird und die der Arbeit entspricht, die auf das Arbeitsgas in der Pumpe ausgeübt wird, W . Der von ihr beobachtete Wirkungsgrad ist daher $\eta_{\text{J}} = \frac{Q_{\text{out}}}{W} = 1500 \%$.

In Adams Fall ist das, was wir erreichen wollen, die von der Wärmepumpe aus seinem Keller entzogene Wärmemenge, Q_{in} , und was wir investieren müssen, ist wiederum die zugeführte elektrische Energie, W , sodass der von ihm beobachtete Wirkungsgrad $\eta_{\text{G}} = \frac{Q_{\text{in}}}{W}$ beträgt.

Die Wärmepumpe entzieht Adams Keller die Wärme Q_{in} , wir versorgen sie mit Energie W aus dem Stromnetz, und sie überträgt die Wärme Q_{out} in Justines Keller. Die für die Wärmepumpe aufgestellte Energiebilanz lautet daher $Q_{\text{in}} + W = Q_{\text{out}}$.

Mit dieser Beziehung lässt sich der von Adam beobachtete Wirkungsgrad wie folgt ausdrücken: $\eta_G = \frac{Q_{\text{out}} - W}{W} = \eta_I - 1 = 1400 \%$.

32 Lasst uns die Energiebilanz der beschriebenen Situation betrachten. Am Beginn eines Tages besitzt die ISS eine Gesamtenergie, die sich aus der potentiellen und der kinetischen Energie zusammensetzt. Nachdem die ISS einen Tag lang dem Luftwiderstand ausgesetzt ist, ist ihre Gesamtenergie geringer, da der Widerstand entgegen der Bewegungsrichtung wirkt.

Bezeichnen wir die Energie der ISS am Anfang des Tages mit 1 und am Ende des Tages mit 2. Aus der Energieerhaltung folgt, dass

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} + W, \quad (32.1)$$

wobei E_p für die potentiellen Energien, E_k für die kinetischen Energien steht und W bezeichne die vom Luftwiderstand an der ISS geleistete Arbeit.

Da die ISS die Erde auf einer Kreisbahn umläuft, können wir ihre Umlaufgeschwindigkeit berechnen, indem wir die Gravitations- und die Zentripetalkraft gleichsetzen. Dafür ist es hilfreich, das Quadrat der Geschwindigkeit auszudrücken⁸

$$v^2 = \frac{GM_{\oplus}}{r}, \quad (32.2)$$

wobei $M_{\oplus}$ die Erdmasse bezeichnet, $r = R_{\oplus} + 400 \text{ km}$ die Distanz von der ISS zum Zentrum der Erde, und $R_{\oplus}$ den Erdradius. Bezeichnen wir nun die Masse der ISS mit m und ihre tägliche Höhenabnahme mit Δr . Damit können wir die Gleichung 32.1 umschreiben zu

$$-\frac{GM_{\oplus}m}{r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r} = -\frac{GM_{\oplus}m}{r - \Delta r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r} + W, \quad (32.3)$$

woraus sich die Arbeit, die vom Luftwiderstand verrichtet wird, ergibt

$$W = \frac{GM_{\oplus}m}{2} \left(\frac{1}{r - \Delta r} - \frac{1}{r} \right). \quad (32.4)$$

Die Kraft F , verursacht durch den Luftwiderstand, arbeitet gegen die Bewegung der ISS. Daher ist die durch den Luftwiderstand verrichtete Arbeit $W = Fs$, wenn die Raumstation sich die Distanz s weiterbewegt. Wie groß ist der von der ISS an einem Tag zurückgelegte Weg? Da Δr sehr viel kleiner ist als der Radius des kreisförmigen Orbits, müssen wir nicht die Länge der Spiralbahn berechnen, die die tatsächliche Bahnkurve der ISS darstellt. Wir erhalten ein brauchbar genaues Ergebnis, wenn wir annehmen, dass die ISS den ganzen Tag auf einer Höhe von $r - \Delta r/2$ zirkuliert, mit einer Geschwindigkeit, die dieser Höhe entspricht gemäß Formel 32.2. Dies ergibt

$$s = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r/2}} T, \quad (32.5)$$

wobei T als ein Tag gewählt wird.

⁸Da wir dies im Ausdruck für die kinetische Energie substituieren.

Nun setzen wir die Gleichungen 32.4 und 32.5 in

$$F = \frac{W}{s}, \quad (32.6)$$

ein und erhalten für die angegebenen Zahlenwerte $F \doteq 0,26 \text{ N}$.

33 Betrachten wir den Fall, dass die Rolle bis zum maximal möglichen Winkel gerollt wird. In dieser Position beträgt der Winkel zwischen der Normale auf der ISIC-Karte und der Vertikalen φ .

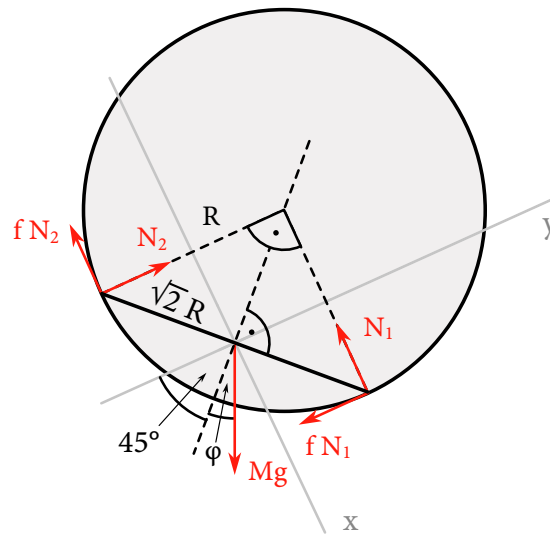


Abbildung 33.1: Rolle mit den auf sie einwirkenden Kräften

Normalkräfte N_1 und N_2 wirken an den Kanten der ISIC-Karte senkrecht zur Oberfläche der Rolle, also auf das Zentrum der Rolle gerichtet. In tangentialer Richtung wirken Reibungskräfte, deren Beträge im Grenzfall $f N_1$ bzw. $f N_2$ betragen. Die Gravitationskraft Mg wirkt vertikal nach unten am Schwerpunkt der ISIC-Karte.

Die Größe der ISIC-Karte ist so gewählt, dass zusammen mit den Wirkungslinien der Normalkräfte ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge R und Hypotenuse $\sqrt{2}R$ entsteht. Unter anderem bedeutet dies, dass die Kräfte N_1 und $f N_2$ dieselbe Richtung haben, also senkrecht zur Richtung der Kräfte N_2 und $f N_1$. Dies legt nahe, ein Koordinatensystem zu wählen, dessen Achsen in diesen beiden Richtungen orientiert sind, d. h. um 45° gegenüber der ISIC-Karte gedreht. Dann lässt sich die Gravitationskraft in die Komponenten $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ und $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$ zerlegen.

Nun können wir die Stabilitätsbedingungen aufstellen:

- Kräftegleichgewicht in x -Richtung,

$$N_1 + f N_2 = Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right); \quad (33.1)$$

- Kräftegleichgewicht in y -Richtung,

$$N_2 = f N_1 + M g \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right); \quad (33.2)$$

- und Momentengleichgewicht bezüglich des Schwerpunkts der ISIC-Karte,

$$N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = f N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (33.3)$$

daher können wir schreiben

$$N_1 = f N_1 + N_2 + f N_2. \quad (33.4)$$

Durch Eliminieren der Normalkräfte erhalten wir

$$\underbrace{\frac{1 + 2f - f^2}{1 - 2f - f^2}}_K = \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}, \quad (33.5)$$

und daraus

$$\tan \varphi = \frac{K - 1}{K + 1} = \frac{2f}{1 - f^2}. \quad (33.6)$$

Für $f = 0,3$ erhalten wir $\varphi \approx 33,4^\circ$.

34 Wir beginnen damit, die Bewegungsgleichung eines Autos auf einer ebenen Fläche zu formulieren,

$$ma_- = fmg \Rightarrow f = \frac{a_-}{g}. \quad (34.1)$$

Auf einer schiefen Ebene, geneigt um den Winkel α , ändert sich die Gleichung zu

$$ma = mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha. \quad (34.2)$$

Verglichen zu Gleichung 34.1 gibt es einen zusätzlichen Term auf der rechten Seite – die Beschleunigung wird immer noch durch die Reibung der Reifen auf der Straße verursacht, aber nimmt mit steigendem Neigungswinkel der Ebene ab; und die Bewegung wird außerdem von der Komponente der Gravitationskraft beeinflusst, die parallel zur schiefen Ebene liegt. Die Beschleunigung ist somit

$$a = g \sin \alpha + f g \cos \alpha. \quad (34.3)$$

Analytische Lösung

Die kürzeste Beschleunigungszeit erhält man durch Maximierung von a . Wir müssen also a nach dem Winkel α differenzieren und die Ableitung gleich null setzen. Wir erhalten

$$\frac{da}{d\alpha} = g \cos \alpha - f g \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0, \quad \cos \alpha = f \sin \alpha, \quad \tan \alpha = \frac{1}{f} = \frac{g}{a_-}. \quad (34.4)$$

Wir verwenden die trigonometrischen Beziehungen 25.6, um $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ in 34.3 zu substituieren. Durch Umformen von 34.1 erhalten wir

$$a = \sqrt{a_-^2 + g^2}. \quad (34.5)$$

Nun müssen wir die Beschleunigung des Wagens auf der geneigten Oberfläche finden und die Beschleunigungszeit beim Herunterfahren berechnen. Wir gehen von einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit $v = at$ aus und erhalten

$$t = \frac{v}{\sqrt{a_-^2 + g^2}} = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{v}{t_-}\right)^2 + g^2}}, \quad (34.6)$$

wobei v die Maximalgeschwindigkeit ist, auf die das Auto beschleunigt, und t_- ist die Beschleunigungszeit auf der flachen Oberfläche. Wir setzen die Werte ein und erhalten $t \doteq 1,51$ s.

Numerische Lösung

Wenn wir nicht differenzieren wollen, können wir direkt nach dem Maximum von a in Gleichung 34.3 suchen. Zeichnet man die Funktion von Gleichung 34.3, so hat sie offensichtlich nur ein Maximum, also reicht es zu suchen, wo der Wert beginnt abzunehmen und dann gegebenenfalls unser Suchintervall zu verfeinern. Dies gibt uns ein vorläufiges Ergebnis $\alpha \approx 0,595$ rad $\approx 34,1^\circ$, aus dem wir dann die Beschleunigung und Beschleunigungszeit berechnen können.

35 Wenn wir die Erde und ihren Schatten aus der Ferne betrachten, ist ihr Schatten ein unendlicher Zylinder mit einer kreisförmigen Grundfläche.⁹ Für jeden festen Punkt auf der Erdoberfläche geht die Sonne unter, wenn die Erdrotation diesen Punkt über die Schattengrenze trägt.

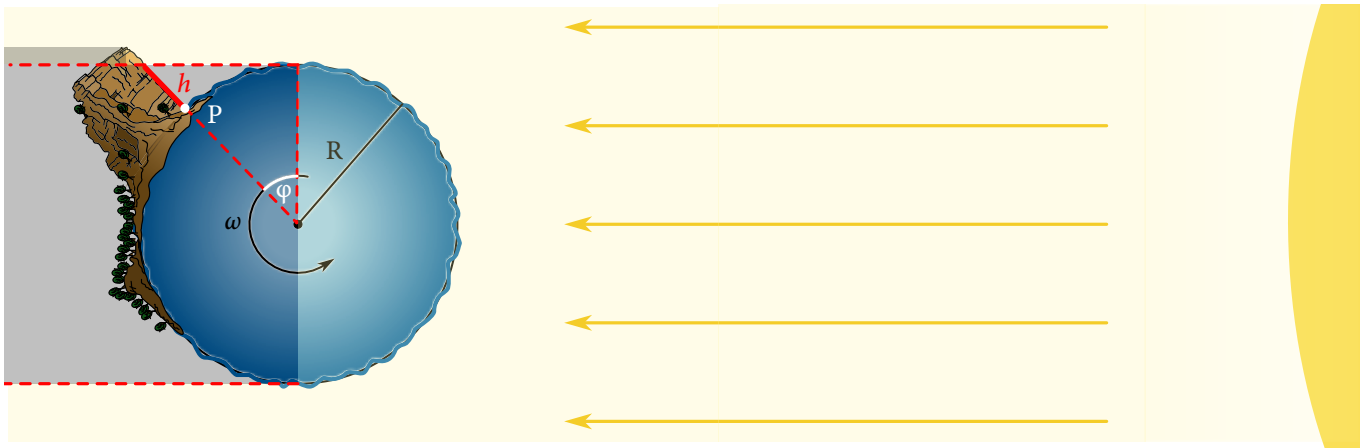


Abbildung 35.1: Schattenwurf der Erde

Das gilt nicht nur für die Oberfläche, sondern auch für Punkte auf der Klippe. Wenn die Höhe der Klippe im Vergleich zum Radius der Erde vernachlässigbar ist - was der Fall sein sollte, dann geht die Sonne für

⁹Angesichts ihrer endlichen Abmessungen und ihrer Entfernung von der Sonne handelt es sich eigentlich um einen Kegel, aber das ist für unsere Zwecke nicht wichtig.

jeden Punkt auf der Klippe in Höhe h unter, wenn der Punkt P eine Tiefe von h innerhalb des Schattens erreicht, d. h. einen Abstand von h von der Oberfläche des Zylinders. Die Höhe des Schattens entspricht daher (im Falle einer nicht sehr hohen Klippe) dem senkrechten Abstand des Punktes P von der Oberfläche des Zylinders.

Das ist alles. Der Punkt P bewegt sich entlang eines Kreises mit Radius $R_{\oplus}$ mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ d}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}}$. Die Projektion einer solchen Bewegung auf eine Fläche orthogonal zu den einfallenden Sonnenstrahlen ist eine harmonische Bewegung mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und seine Beschleunigung nahe der maximalen Auslenkung ist gegeben durch

$$a = \omega^2 R_{\oplus} \approx \left(\frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \right)^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \doteq 0,034 \text{ m/s}^2. \quad (35.1)$$

Lumberjack's solution (Holzfäller-Lösung)

Das gleiche Ergebnis lässt sich auch mit Brute-Force erzielen. Markieren wir den zentralen Winkel φ zwischen der senkrechten Klippe und dem Schattenendpunkt. Dann können wir ausgehend von dem rechtwinkligen Dreieck, das diesen Winkel enthält und von der Schattenhülle umschlossen wird, schreiben

$$R_{\oplus} + h(\varphi) = \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.2)$$

Wenn die Erde um einen Winkel $d\varphi$ rotiert, vergrößert sich die Höhe, der der Schatten entgegenstrebt, um

$$dh = \frac{R_{\oplus}}{\cos(\varphi + d\varphi)} - \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.3)$$

Für ein niedriges Kliff ist der Winkel φ sehr klein, sodass wir die Näherungen $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ und $(1+x)^{-1} \approx 1 - x$ verwenden können. Damit erhalten wir

$$dh \approx R_{\oplus} \left[\frac{1}{1 - \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} \right] \approx R_{\oplus} \left[1 + \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2} - \left(1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \approx R_{\oplus} d\varphi. \quad (35.4)$$

Da sich die Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht, wobei $\varphi = \omega t$ gilt, folgt somit

$$dh \approx R_{\oplus} \omega t \omega dt. \quad (35.5)$$

Daraus lässt sich sofort die Geschwindigkeit des Schattenverlaufs entlang der Klippe ableiten

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \approx R_{\oplus} \omega^2 t \quad (35.6)$$

und wir erkennen darin die Geschwindigkeit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Beschleunigung $a = \omega^2 R_{\oplus}$.

36 Zunächst dachte Jacob darüber nach, was mit der Aktivität von natürlichem und angereichertem Uran gemeint ist. Er erinnerte sich an die Formel, die die Anzahl der zerfallenen Atome ΔN nach der Zeit Δt und die Gesamtzahl der Atome N zu einem bestimmten Zeitpunkt in Verbindung bringt,

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t, \quad (36.1)$$

wobei λ die Zerfallskonstante ist. Diese Gleichung führt zu

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (36.2)$$

bekannt als exponentieller Zerfall, wobei N_0 die Anzahl der Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

Als letztes müssen wir noch die Halbwertszeit angeben, nach der die Hälfte der Atome zerfallen ist. Das bedeutet, dass die Anzahl der Atome auf die Hälfte der ursprünglichen Menge abnimmt, $N = \frac{N_0}{2}$, was nach Einsetzen in die exponentielle Zerfallsformel die Zerfallskonstante ergibt

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (36.3)$$

Als Nächstes kann er anhand der oben genannten Erkenntnisse die Aktivität finden

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N. \quad (36.4)$$

Um zu berechnen, um wie viel höher die Aktivität von angereichertem Uran im Vergleich zu natürlichem Uran ist, muss er das Verhältnis $\frac{A_{\text{angereichert}} - A_{\text{natürlich}}}{A_{\text{natürlich}}}$ ermitteln, wobei er sein Wissen über das Verhältnis der Anzahl der Atome von ^{235}U und ^{238}U in beiden Uranarten nutzen kann und auch deren Halbwertszeiten $T_{1/2}^{235} = 7 \cdot 10^8 \text{ a}$ und $T_{1/2}^{238} = 4,46 \cdot 10^9 \text{ a}$ kennt. Aus den Halbwertszeiten und der Formel für die Aktivität weiß er, dass die Zerfallskonstante λ von ^{235}U k -mal höher ist als die von ^{238}U . Genauer gesagt ist sie

$$k = \frac{T_{1/2}^{238}}{T_{1/2}^{235}} \doteq 6,371. \quad (36.5)$$

Wenn er dann das Verhältnis von ^{235}U in angereichertem Uran a und b in natürlichem Uran bezeichnet, erhält er den Ausdruck für die relative Aktivitätsänderung:

$$\frac{A_{\text{angereichert}} - A_{\text{natürlich}}}{A_{\text{natürlich}}} = \frac{k\lambda a N + \lambda(1-a)N}{k\lambda b N + \lambda(1-b)N} - 1 = \frac{(a-b)(k-1)}{1+b(k-1)} \doteq \frac{(0,03 - 0,0072) \cdot (6,371 - 1)}{1 + 0,0072 \cdot (6,371 - 1)} \doteq 11,8 \%. \quad (36.6)$$

37 Zunächst sei erwähnt, dass die Art und Weise, wie die einzelnen ausgeschnittenen Quadrate gedreht werden, keinen Einfluss auf das Trägheitsmoment des Amuletts hat, wenn die Drehachse senkrecht zur Ebene des Amuletts steht. Bezeichnen wir den ersten Kreis, aus dem wir ein Quadrat ausschneiden, als erste Iteration. Wenn wir nun einen weiteren Kreis einzeichnen und das eingeschriebene Quadrat ausschneiden, bezeichnen wir dies als zweite Iteration und so weiter. Das Trägheitsmoment eines Kreises mit dem Radius r beträgt $I_{\bigcirc} = \frac{1}{2}mr^2$ und das eines Quadrats beträgt $I_{\square} = \frac{1}{6}ma^2$, wobei a die Seitenlänge des Quadrats ist.

Betrachten wir die erste Iteration unseres Problems. Wir haben den Radius des Kreises der ersten Iteration $r_1 = r$ und ein eingeschriebenes Quadrat mit einer Seitenlänge von $a = \sqrt{2}r$, was wir leicht erkennen können. Wir wissen, dass die Diagonale des Quadrats $2r$ beträgt. In dem rechtwinkligen Dreieck, das durch zwei benachbarte Eckpunkte des Quadrats und den Mittelpunkt des Kreises definiert ist, erhalten wir

$$\cos 45^\circ = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \sqrt{2}r. \quad (37.1)$$

Das Trägheitsmoment und der Flächeninhalt der ersten Iteration sind einfach

$$I^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma S_{\bigcirc}^{(1)} r_1^2 - \frac{1}{6}\sigma S_{\square}^{(1)} a_1^2 = \frac{1}{2}\pi\sigma r_1^4 - \frac{4}{6}\sigma r_1^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r_1^4 \quad (37.2)$$

$$S^{(1)} = S_{\bigcirc}^{(1)} - S_{\square}^{(1)} = \pi r_1^2 - a_1^2 = (\pi - 2)r_1^2.$$

Das Trägheitsmoment $I^{(n)}$ und die Fläche $S^{(n)}$ der folgenden Iterationen werden auf ähnliche Weise berechnet, nur für unterschiedliche Werte von r_n . Es bleibt nur noch die Beziehung $r_n = r_n(r, n)$ zu bestimmen. Für die erste Iteration ist $r_1 = r$. Die zweite Iteration ist ein in ein Quadrat eingeschriebener Kreis, also

$$2r_2 = a_1 \Rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}r. \quad (37.3)$$

Analog ergibt sich

$$r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_2 = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad (37.4)$$

und daher allgemein für r_n

$$r_n = \frac{\sqrt{2}}{2}r_{n-1} = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}. \quad (37.5)$$

Nun müssen wir nur noch die Summen der unendlichen Reihen berechnen, die sich aus diesen Iterationen ergeben, und zwar

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)} = (\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = r^2(\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} \quad (37.6)$$

$$= r^2(\pi - 2) \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2r^2(\pi - 2),$$

und für das Trägheitsmoment

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r_n^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4n-4} \quad (37.7)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r^4 \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r^4 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\frac{m}{S}r^4,$$

wobei wir die Summenformel $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für die unendliche geometrische Reihe $a_n = a_0 q^n$ mit dem Faktor $0 < q < 1$ verwendet haben. Wenn wir S in I einsetzen, erhalten wir

$$I = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}}{\pi - 2} m r^2 = \frac{3\pi - 4}{9\pi - 18} m r^2. \quad (37.8)$$

38 Beginnen wir mit der Formel für die parabolische Stadt:

$$h(r) = k r^2, \quad (38.1)$$

wobei r der Abstand eines Punktes auf der Paraboloidfläche von der Rotationsachse ist, also vom Stadtzentrum. Wir müssen keine Konstante hinzufügen, da wir nur am Höhenunterschied interessiert sind. Für den höchsten Punkt der Stadt gilt

$$H = k R^2, \quad (38.2)$$

wobei H die gesuchte Höhe und R in der Aufgabenstellung gegeben ist.

Wir kennen den Koeffizienten k noch nicht. Er lässt sich aus der Ableitung der Parabel im Punkt $[R; H]$ ermitteln. Wir wissen, dass die resultierende scheinbare Gravitationskraft senkrecht zur Paraboloidfläche stehen muss. Die Ableitung der Parabelformel im Punkt $[R; H]$, $2kR$, ist die Steigung der Tangente an die Parabeloberfläche. Die Steigung einer Geraden wird berechnet mittels $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei $\Delta y = a_c$ und $\Delta x = g_{\sigma}$, also

$$2kR = \frac{a_c}{g_{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{a_c}{2g_{\sigma}R}. \quad (38.3)$$

Nach Einsetzen von k in die Gleichung 38.2, erhalten wir

$$H = \frac{a_c R}{2g_{\sigma}}. \quad (38.4)$$

Wir benötigen noch a_c . Wir finden es mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$a_c = \sqrt{g^2 - g_{\sigma}^2}. \quad (38.5)$$

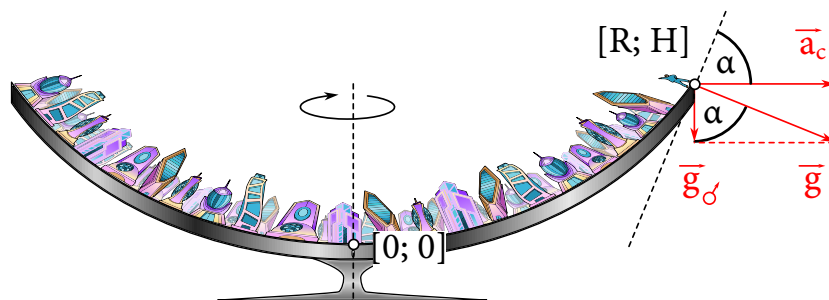


Abbildung 38.1: Vertikalschnitt der parabolischen Stadt

Das Ergebnis lautet daher

$$H = \frac{R\sqrt{g^2 - g_{\sigma}^2}}{2g_{\sigma}} \doteq 1296 \text{ m.} \quad (38.6)$$

39 Bezeichnen wir das Volumen des Eises mit V . Seine Form ist so beschaffen, dass der Querschnitt in jeder Höhe eine Ellipse ist mit einer konstanten großen Halbachse a und einer kleinen Halbachse, die sich, wie in Abbildung 39.1 gezeigt, linear mit der Tiefe verändert.

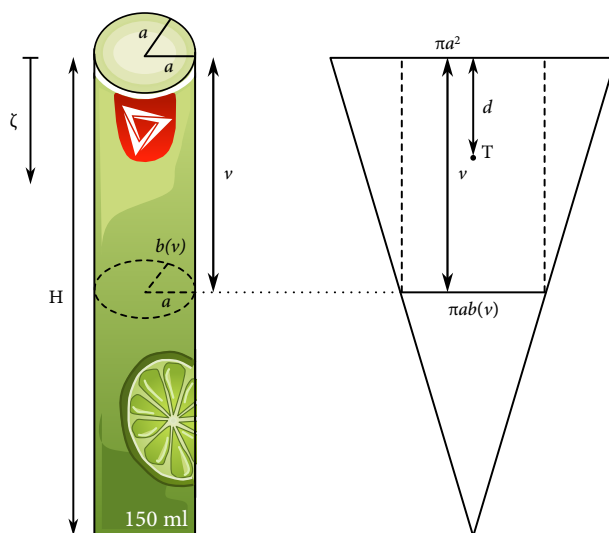


Abbildung 39.1: Geometrie der Eisverpackung

Wenn wir eine Koordinate ζ wählen, deren Ursprung sich an der Spitze befindet und die nach unten zunimmt, dann skaliert b wie folgt

$$b(\zeta) = \frac{H - \zeta}{H} a, \quad (39.1)$$

und die Fläche des Querschnitts in der Tiefe ζ beträgt

$$S(\zeta) = \pi a b(\zeta) = \pi a^2 \frac{H - \zeta}{H}. \quad (39.2)$$

Beachte, dass die Querschnittsfläche linear mit ζ abnimmt. Ein ebenes Analogon zu diesem „verformten Kegel“ ist daher ein Dreieck, das dieselbe Eigenschaft besitzt. Für die Berechnung des Schwerpunkts ist es somit äquivalent zu einem Dreieck mit einer Basislänge $\ell = S(0) = \pi a^2$ und derselben Höhe H . Die Fläche dieses Dreiecks entspricht dem Volumen des Eises V , also gilt

$$V = A = \frac{1}{2} \ell H = \frac{1}{2} \pi a^2 H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2V}{\pi a^2}. \quad (39.3)$$

Nun interessiert uns der Fall, nachdem George die Hälfte des Eises gegessen hat. Wir müssen also die Höhe des Teils finden, dessen Volumen der Hälfte des ursprünglichen Volumens V entspricht. Bezeichnen wir das

Volumen des Eises im Bereich $[0; \zeta]$ mit $\Theta(\zeta)$. Dies entspricht der Fläche eines Trapezes, das entsteht, wenn man das Dreieck in einem Abstand ζ von der Basis abschneidet,

$$\Theta(\zeta) = \frac{\pi a^2 + \pi ab(\zeta)}{2} \zeta = \pi a^2 \frac{1 + \frac{H-\zeta}{H}}{2} \zeta = \pi a^2 \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{2H}\right). \quad (39.4)$$

Wenn das Volumen auf die Hälfte seines ursprünglichen Werts abnimmt, können wir schreiben $\zeta = v$, und somit $\Theta(v) \stackrel{!}{=} \frac{V}{2}$. Daher

$$\frac{1}{2} \pi a^2 H = \pi a^2 v \left(1 - \frac{v}{2H}\right) \Rightarrow v = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} H, \quad (39.5)$$

und George muss das Eis genau so weit aus der Verpackung herausdrücken.

Welche Arbeit ist dafür erforderlich? Der Schwerpunkt hat sich dabei um v nach oben bewegt – das entspricht dem Fall, dass George jedes Stück, das er isst, nach oben bringt und dann entfernt. Das bedeutet im Effekt, dass er den Schwerpunkt des fehlenden Teils bis zur Spitze heben muss. Daher müssen wir zunächst bestimmen, wo sich der Schwerpunkt ursprünglich befand.

Nehmen wir an, er befand sich in einer Tiefe d . Im zweidimensionalen Fall entspricht dies der Lage des Schwerpunkts des Trapezes, was einem einfachen gewichteten Mittelwert der Schwerpunkte eines Rechtecks und eines Dreiecks entspricht,

$$d = \frac{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v \cdot \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v \cdot \frac{v}{3}}{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} H. \quad (39.6)$$

Die verrichtete Arbeit entspricht der Änderung der potenziellen Energie, also

$$W = \frac{V}{2} \rho g d + \frac{V}{2} \rho g v = \frac{4 - \sqrt{2}}{6\pi} \frac{V^2}{a^2} \rho g \approx 76 \text{ mJ}. \quad (39.7)$$

40 Wir betrachten ein Objekt, das sich mit konstanter Beschleunigung a über eine geradlinige Strecke bewegt. Der zurückgelegte Weg s wächst mit der Zeit gemäß $s = \frac{1}{2} a t^2$ und die Geschwindigkeit gemäß $v = at$. Durch Kombination dieser beiden Funktionen erhalten wir

$$v(s) = \sqrt{2as}. \quad (40.1)$$

Nun wollen wir die durchschnittliche gemessene Geschwindigkeit entlang der Dragster-Strecke ermitteln, also die mittlere Geschwindigkeit, die nicht über die Zeit, sondern über den Weg gemittelt wird. Die Funktion $v(s) = \sqrt{2as}$ ist zwischen $v(0) = 0$ und $v(s) = \sqrt{2as} = v_{\max}$ steigend und hat die Form einer halben Parabel, $y = \sqrt{x}$. Wir müssen nun die mittlere Höhe dieser Kurve ermitteln.

Dazu benötigen wir die Fläche unter dieser Kurve. Wenn Integrieren bereits bekannt ist, ist es einfach. Wir berechnen

$$\langle v \rangle_x = \frac{1}{s} \int_0^s \sqrt{2ax} \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as}. \quad (40.2)$$

Wenn wir nicht integrieren können oder wollen, können wir einen alten griechischen Trick anwenden, die *Quadratur der Parabel*¹⁰. Als erstes teilen wir den Bereich entlang der Verbindungsstrecke der beiden Kurvenenden. Die Fläche des Dreiecks ist einfach. Der andere Teil wird von der Parabel und einer geraden Linie begrenzt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Fläche dieser Form gleich $\frac{4}{3}$ der Fläche eines eingeschriebenen Dreiecks mit dem dritten Eckpunkt in der Mitte des Intervalls ist. Nach dem Entfernen dieses Dreiecks bleiben zwei kleinere Flächen übrig, die wiederum von einer Geraden und der Parabel begrenzt werden, was zu einer geometrischen Reihe mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ führt. Die Fläche ist natürlich dieselbe wie in Gleichung 40.2.

Nun berechnen wir die tatsächliche Durchschnittsgeschwindigkeit von Toms Auto, also den Mittelwert über die Zeit. Diese ist einfach das Verhältnis der Gesamtstrecke zur Gesamtzeit¹¹

$$\langle v \rangle_t = \frac{s}{\sqrt{\frac{2s}{a}}} = \sqrt{\frac{as}{2}}. \quad (40.3)$$

Das Verhältnis der über den Weg gemittelten Geschwindigkeit zur über die Zeit gemittelten Geschwindigkeit ist daher

$$\frac{\langle v \rangle_x}{\langle v \rangle_t} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{as}}{\sqrt{\frac{as}{2}}} = \frac{4}{3}. \quad (40.4)$$

¹⁰Τετραγωνισμός παραβολῆς, Archimedes, 3. Jh. v. Chr. Moderne Version verfügbar unter [Wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_exhaustion).

¹¹Beachte, dass diese Definition mit der vorherigen Definition des Mittelwerts übereinstimmt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T at \, dt = \frac{\frac{1}{2}aT^2}{T} = \frac{s}{T}.$$

Antworten

- 1 0 cm
- 2 v
- 3 1 g und 5 g, *oder* Erde und Pluto
- 4 400 ml/s
- 5 $\frac{826 + 160\sqrt{2}}{343} \text{ s} \doteq 3,07 \text{ s}$
- 6 72 s, *akzeptiere auch* 01:12.
- 7 22:20
- 8 100 %, also das ganze Zimmer.
- 9 5,47 km
- 10 2,5 J, *akzeptiere Ergebnisse im Intervall* 2,4 J – 2,5 J.
- 11 $s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v} = \frac{v^2 t}{c - v} + vt$
- 12 A-49
- 13 $s \left(1 + \frac{v}{u} \right)$
- 14 25,4°
- 15 3,20 kN, *akzeptiere auch* 3,14 kN.
- 16 $\sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s}$
- 17 $\frac{1}{3}g$

18 18

19 $\left\{ \frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R \right\}$

20 N, H, A, B, Y, I, in **dieser** Reihenfolge.

21 56 mm²

22 7 %

23 $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{4 + \cot^2 \alpha}}$

24 74 %

25 10 m, akzeptiere auch 9,8 m.

26 72 575 belch · wink³

27 $\frac{23255}{7776} \text{ MPa} \doteq 3,0 \text{ MPa}$

28 0,302 s

29 $-\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} \text{ C} \doteq -2,47 \text{ C}$, achtet auf das **Vorzeichen**.

30 24 Hz

31 1400 %

32 0,26 N

33 33,4°

34 1,51 s, akzeptiere Ergebnisse im Intervall 1,51 s – 1,52 s.

35 34 mm/s²

- 36 11,8 %
- 37 $\frac{3\pi - 4}{9\pi - 18}mr^2 \doteq 0,528mr^2$
- 38 1296 m
- 39 76 mJ, *akceptiere Ergebnisse im Intervall 76 mJ – 77 mJ.*
- 40 $\frac{4}{3}$

Aufgaben

Martin ,Kvík‘ Baláž
 Šimon Borovský
 Jakub Hluško
 Lucia Kleščová

Katarína Magdolenová
 Miroslav Pajger
 Patrik ,pa3k‘ Rusnák
 Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga
 Jaroslav Valovčan
 Soňa Vasiľová
 Tomáš ,Mözög‘ Vörös

Grafiken

Katarína Nedelková

Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga

Lektor:innen

Martin ,Kvík‘ Baláž

Übersetzer:innen

Walter Hametner
 Matthias Blatnik
 Hermann Detz

Albert Huber
 Damian Fabbian
 Fabien Clivaz

Brigitte Waldmann
 Felix Wilkens
 Elias Eingang