

Kedves olvasók!

A kezeitekben a Náboj Fizika 28. évfolyamának könyvecskéjét tartjátok. A könyvecskében szerepel az összes feladat, amelyikkel idén találkozhattatok a versenyen, valamint a hozzájuk tartozó megoldások, amelyekből sokat tanulhattok. Ha nehezetekre esik bármelyiket megérteni, ne habozzatok kapcsolatba lépni velünk; szívesen tisztázunk bármit.

Ez a könyvecske nem létezhetne annak a rengeteg embernek a hatalmas erőfeszítése nélkül, akik részt vettek a Náboj Fizika megszervezésében. A legtöbbünk a pozsonyi Comenius Egyetem Matematika, Fizika és Informatika Karának hallgatója, és néhányunk ezen kívül aktívan részt vesz a felvidéki Fizikai Levelező Verseny (FKS) szervezésében.

A Náboj Fizika a nemzetközi hagyományait folytatja a 2025. évben is. A nemzetközi együttműködés megszervezéséért szeretnénk köszönetet mondani a helyi szervezőknek: Katarína Nedeljková (Pozsony), Marián Kireš (Kassa), Jakub Kliment (Prága), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapest), Urszula Goławska (Gdańsk), Andrzej Karbowski (Toruń), Maciej Matyka (Wrocław), José Francisco Romero García (Madrid), Dmytro Rzhemovskyi (Bécs), Vasyl Rizak (Ungvár) és João Rico (Lisszabon). A nemzetközi megmérettetések eredményei megtalálhatóak a honlapunkon.

A teljes szervezői csapat bízik benne, hogy élveztétek a Náboj Fizikát a 2025. évben, és reméljük, hogy találkozunk a Nábojon jövőre is. Akár a versenyzők vagy a szervezők oldalán.

Jaroslav Valovčan

Főszervező

Az eredmények, az archívum és egyéb információk megtalálhatóak a <https://physics.naboj.org/> weboldalon.

Feladatok

1 Anna nagyon szeret sudokut fejteni a vasárnapi újságból, de ezeket nem találja elég nehéznek. Ezért kitalált egy érdekes csavart, amellyel izgalmasabbá teheti a játékot: elképzei, hogy a négyzetrács minden négyzete 1 cm oldalhosszúságú, és hogy minden négyzet tömege (grammban) megegyezik azzal a számmal, ami bele van írva. Mi lesz a távolság a sudoku rács tömegközéppontja és geometriai középpontja között, miután Anna megoldotta a feladványt?

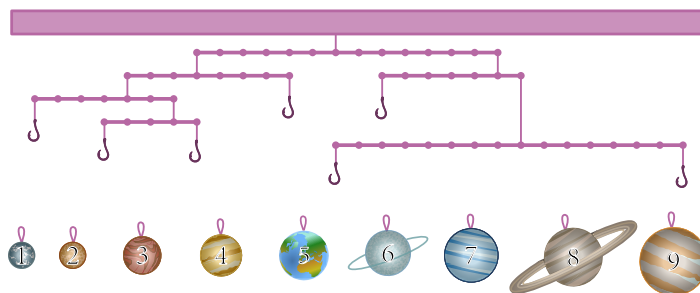
8	7	9		3		4		6
		6		7	9		1	
1			2	4	6	7		9
9		7	3			5	6	4
	2		6		4		9	7
	5			8		2		1
5	6	3	7		8	1	4	
7			4	1	2	6		
4	1		5	6			7	8

2 Villamosvezető Vilmos szabadnapján vonatra száll és egy vonatkabinban élvezzi az utazást Pozsonyból Bécsbe. A menetiránynak háttal ül, és a kabin szemközti falára szerelt tükörben látja a pálya mellett álló jelzőtábla tükörképét.

Mekkora a jelzőtábla tükörképének látszólagos sebessége, amivel Vilmos felé közeledik a tükörben, ha a vonat v sebességgel halad előre?

3 Heléna a nulladik születésnapjára kapott egy bölcső föle akasztható forgót. Nem is akármilyet: csillagászati témájú, és több, különböző hosszúságú, könnyű karra különböző plüssbolygókat lehet akasztani. Martin, a büszke apa, emlékezett rá, hogy régen kilenc bolygó volt, így pontosan ennyit rendelt az interneten. A bolygók tömege rendre 1–9 gramm közötti (azaz az egyik 1 g, a másik 2 g, ..., a kilencedik 9 g).

Most Martinnak minden kampóra egy bolygót kell felakasztania úgy, hogy az egész körhinta egyensúlyban legyen. Mely bolygókat **nem** fogja használni?

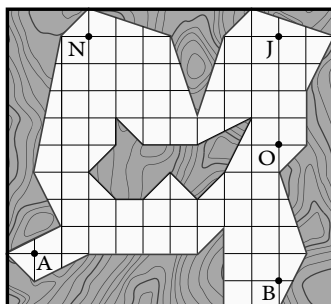


4 Józsi nyaralni ment egy közeli üdülőhelyre, amelynek a neve „Meleg-domb”. Meglepetésére azonban a Meleg-domb nem domb volt, hanem egy tó – ráadásul hideg vízű –, így végül úgy döntött, inkább otthon fürdik meg. A fürdőszobában gyorsan meg is találta a két csapot: az egyikből meleg, a másikkól hideg víz folyt.

Az első csapból kifolyó víz hőmérséklete $68\text{ }^{\circ}\text{C}$. Józsi azonban azt szeretné, hogy a víz hőmérséklete $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ legyen, a térfogatárama pedig 600 ml/s . Mekkora térfogatáramnak kell folynia a hidegvízcsapból, ha a hideg víz hőmérséklete $17\text{ }^{\circ}\text{C}$?

5 Nina (N), Ádám (A), Barbara (B), Olivér (O), és Janka (J) egy sötét barlangban vannak. Nina, az expedíció vezetője szeretné tudni, merre vannak a többiek, ezért elkiáltja magát: „N”. Fél másodperccel azután, hogy Ádám meghallja őt, ő is a saját nevének kezdőbetűjét („Á”) kiáltja. Barbara meghallva Ádámot ugyan így tesz, ahogy sorban mindenki, mígnem Nina meghalja a „J” betűt Jankától. Saját kiáltása után mennyi idő elteltével fogja Nina hallani a teljes „NÁBOJ” szót, melyből tudja, senki nem vész el?

Egy négyzet oldalhossza a rácsban 10 méter. A hallás és a kiáltás közti reakcióidő az expedíció minden tagjánál azonos, $0,5\text{ s}$, és a hanghullámok nem hatolnak át a tömör sziklán.



6 Patrik futópályán edz. Azóta, hogy kapott egy okosórát, mindig méri az átlagos tempóját. A legutóbbi edzésén észrevette, hogy a harmadik és a negyedik kör teljesítése között az átlagos körideje két teljes másodperccel javult, $01:20$ -ról $01:18$ -ra.

Mennyi ideig tartott a negyedik kört lefutnia?

7 A modern navigációs rendszerek mindenféle funkcióval rendelkeznek. Például meg tudják mondani azt a sebességet is, amelyet tartanod kell, hogy időben megérkezz a célpontodhoz. Nagy Marci siet a repülőtérrre, és érkezési idejét $22:00$ -ra állította be. $21:00$ -kor a navigációs rendszer azt jelzi neki, hogy 120 km/h sebességgel kell haladnia, hogy odaérjen. Azonban $21:30$ -kor a becslés 150 km/h -ra emelkedett.

Ha Nagy Marci végig állandó sebességgel halad, mikor érkezik meg valójában a repülőtérrre?

8 Szonja vett egy új üveglámpát, amely teljes kocka alakú. A kocka törésmutatója $1,5$, és a közepében van egy izzó. Szonja izgatottan várja, hogy kipróbálhassa a lámpát, pontosan a szoba közepére tette egy állványra. A kérdés: a szobája mekkora részét fogja megvilágítani ez a lámpa?

9 Simon a japán álmotutazásán Shinkansennel utazik. A vonat, amelyen ül, az állomásról $2,6 \text{ km/h/s}$ gyorsulással indult, és maximális sebessége 320 km/h . Az állomástól milyen távolságra fogja Simon vonata elérni a maximális sebességét?

10 A vegán Luca magával vitt egy kirándulásra egy olyan avokádót, aminek a belsejében egy játék volt. Azonban kénytelen volt csalódní, mert a játék ismét csak egy egyszerű fából készült gömb volt, amelynek sugara 2 cm , sűrűsége pedig 750 kg/m^3 . Ezért egyszerűen a tóba dobta.

Azonban Mirkó, a vízitündér, azonnal észrevette a labdát, és lehúzta a tó fenekére. Mennyi munkát végzett a labdán, ha a tó mélysége 30 m ?

A labda közvetlen vízfelszín alá merítéséhez szükséges munkája elhanyagolható.

11 Villamosvezető Vilmos egy v sebességgel haladó villamossal közeledik egy útkereszteződéshez. Hirtelen észreveszi, hogy egy autó áll a síneken a kereszteződésben. Vilmos kétségbeesve próbálja megakadályozni az ütközést és meghúzza a csengőt. Arra számít, hogy amikor az autó sofőrje meghallja a csengő hangját, még t időn belül el tud menni a sínekről.

Legalább mekkora távolságra kell Vilmosnak megszólaltatnia a csengőt a kereszteződéstől, ha a hang sebessége c ?

12 Patrik egy hatalmas papírt használt a jegyzeteihez az érettségire készüléknél, hogy minden egy helyen legyen. Ez a papír akkora volt, hogy le tudta fedni Patrik szobájának padlóját. Ettől nagyon megkönnyebbült, mert ha ennél is tovább írt volna, lassan annyit tudott volna írni, hogy a szükséges papír a teljes Földet is le tudta volna fedni. Mekkora a legkisebb A formátumú papír, ami le tudja fedni az egész Földet?

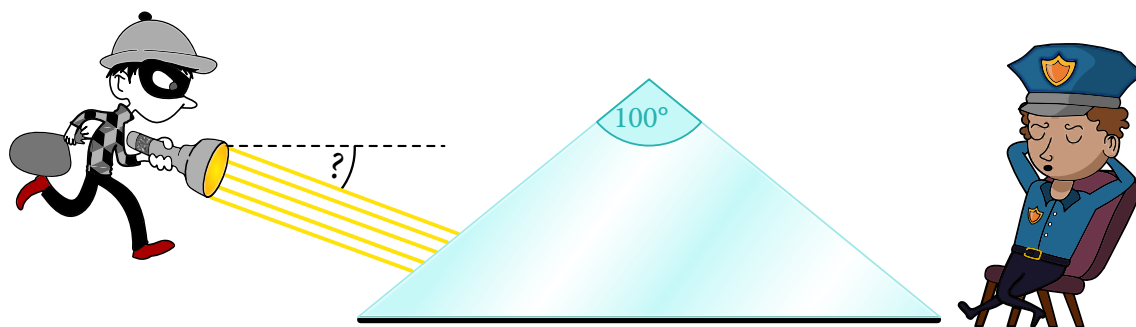
Az A0-s papír felülete 1 m^2 . A1-es papírt úgy tudunk csinálni, hogy az A0-st a rövidebb oldala mentén félbevágjuk és így tovább. Patrik tetszőleges módon felvághatja a papírt a Föld lefedése közben.

13 Szabina egy repülőbemutatón vett részt. Elégge fázott, mert egész idő alatt balról jobbra fújt a v sebességű szél, és az arcába csapott. A legjobban a műrepülő gépek nyűgözték le. A bemutató végén az egyik repülő a nézőtér előtt jobbról balra repült, a talajhoz viszonyított sebessége u volt. A nézőtér előtti elhaladása közben végig színes füstöt bocsátott ki, amely a levegőhöz képest gyorsan megállt.

Mekkora volt a füstcsík hossza, ha a nézőtér hossza s ?

14 Robi, a rabló szeretne ellopni a múzeumból egy olyan háromszög alapú prizmat, melynek törésmutatója $2,4$. A prizma keresztmetszete egy egyenlő szárú háromszög, amelynek csúcshöge 100° , ahogy az a képen is látható. A rablónak valószínűleg párhuzamos fénysugárral kell majd rávilágítania, de nem akarja, hogy a prizma másik oldalán lévő múzeumi ör észrevegye. Legalább mennyire kell lefelé döntenie a zseblámpát a vízszinteshez képest, hogy semmilyen sugár ne jusson át a prizma másik oldalára, függetlenül attól, hogy a prizma lapjának melyik részére világít?

A prizma alja tökéletesen fekete, és elnyeli az összes ráeső sugarat.



15 Karcsi egy otthoni edzőtermen dolgozik. Jelenleg egy új 20 kg tömegű súlyzót visz fel a lakásába egy lifttel, aminek tömege 250 kg. Mivel még nem járt sokat edzőterembe, Karcsi súlya csak 60 kg, és karjai olyan könnyűek, hogy súlyukat teljesen figyelmen kívül hagyhatjuk. A lift jelentős állandó 4 m/s sebességgel emelkedik, de mivel Karcsi nem akar időt veszíteni, azonnal elkezd emelgetni a súlyokat.

Mekkora erő hat a liftet tartó kötélre, amikor Karcsi a súlyzót 5 m/s² gyorsulással lefelé mozgatja?

16 Hajnal három óra harminc perc van, és Samu tojásokat dob ki az ablakon, célzva egy ismeretlen harsonást, aki valahol a sötétben rejtőzik. Ha felfelé dobja a tojást, az négy másodperc alatt ér földet. Ha ugyanolyan sebességgel lefelé dobja, elég a földetéréshez két másodperc.

Mennyi ideig fog zuhanni a tojás, ha Samu csak elejti?

17 Lucának le kellett foglalnia zajos unokaöccsét, legalább egy kis időre. Amikor a játékok, az építőkeszletek és még a fakanállal való fenyegetés sem vált be, elővett a szekrényből egy súlytalan kötelet és egy súlytalan csigát, majd a kötel két végére két súlyt kötött — az egyik tömege m , a másiké pedig $\frac{m}{2}$. A kötelet átdobták a csigán, és kíváncsian figyelték, mi történik. Az unokaöccs izgatottan nézte egy rövid pillanatil, ahogy a súlyok mozgásba lendültek, de rövidesen visongva elszaladt, hogy máshol keverje tovább a bajt. Lucát azonban továbbra is foglalkoztatta a kérdés:

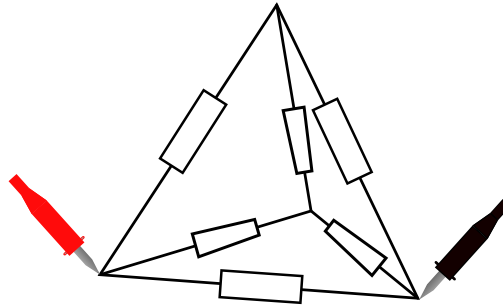
„Milyen gyorsulással mozognak valójában a súlyok?”

Segítsünk Lucának kifejezni a súlyok gyorsulását!

18 Add meg a helyes állítások melletti számok összegét!

- 1 Egy test körpályán mozog. Amikor a sebessége megnő, a keringési ideje lerövidül.
- 2 Amikor a Föld pályája során közelebb kerül a Naphoz, gyorsabban mozog.
- 4 A tél azért következik be, mert a Föld pályája ellipszis alakú, és a Föld ilyenkor van a legtávolabbi pontján a Naptól.
- 8 Minden Föld körüli körpályán keringő műhold azonos sebességgel mozog.
- 16 A geostacionárius műholdak csak az Egyenlítő felett létezhetnek.
- 32 Kéttestes rendszerben a könnyebb test mindig ellipszis pályán mozog a közös tömegközéppont körül.

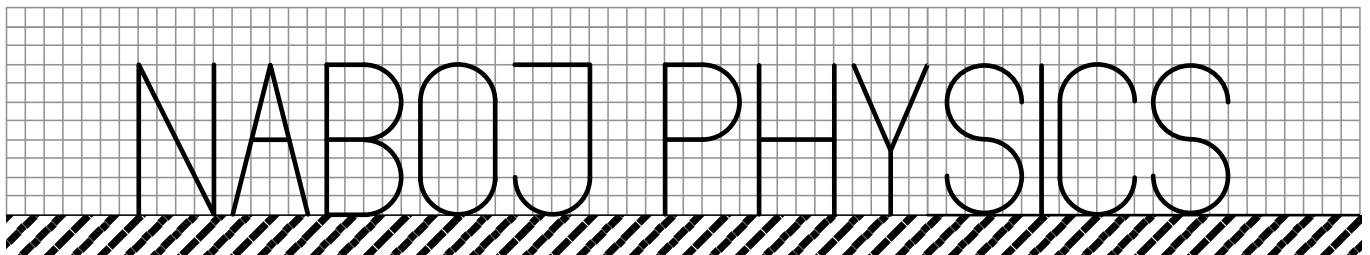
19 Készítettünk egy szabályos tetraédert hat darab, egyenként R ellenállású ellenállásból. Ezután egy ohmmérőt kötöttünk a tetraéder két csúcspontjára. Ha teljesen eltávolítjuk a tetraéder egyik élét a hozzá tartozó ellenállással együtt, milyen eredő ellenállásokat mérhetnénk az ohmmérővel?



20 A segítségetekre van szükségünk, hogy a verseny nevében szereplő betűket a stabilitásuk szerint sorba rakjátok. Stabilitás alatt azt a munkát értjük, ami ahhoz kell, hogy feldöntsünk egy betűt.

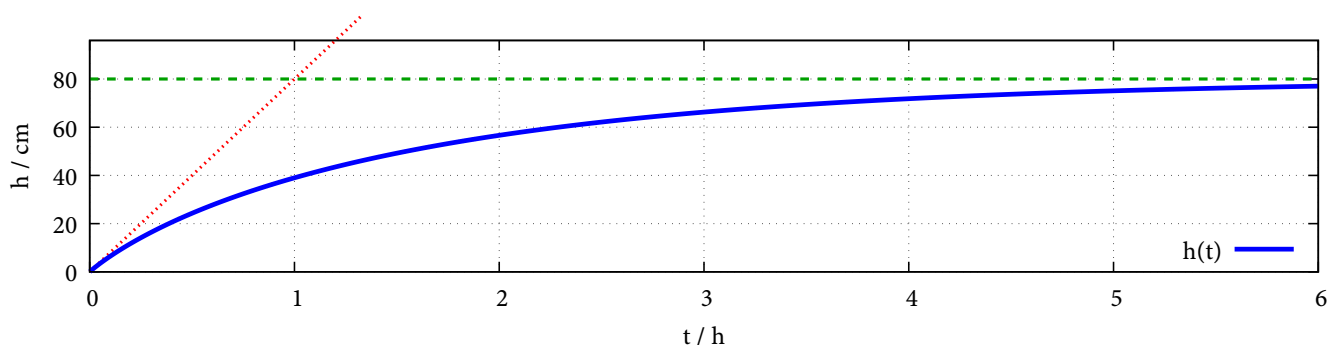
A betűk homogén tömör rudakból és körívekből állnak, amiknek vastagsága habár **nem nulla**, de kicsi, illetve éleik nincsenek lekerekítve. A betűknek a papír síkjában kell maradniuk.

A betűk sorozatát **csökkenő** sorrendben adjátok be. Azokat a betűket, melyek nem stabilak, a sor **ne tartalmazza**.



21 Ádám, a kertész egy nagy henger alakú víztartályba gyűjti az esővizet. Az alap területe 1 m^2 . A nagy nyári szárazság után teljesen kiürült a tartály, de most elkezdett esni, és a tartály szépen telik meg vízzel.

A tartályban van egy vízszintmérő, mely segítségével Ádám tudja figyelni a vízszint magasságát az okostelefonján. Eleinte örült, mert gyorsan emelkedett a vízszint (lásd a piros pontozott vonalat, amely $t = 0$ -ban érinti a kék vonalat). Azonban pár óra múlva világossá vált, hogy nem fog teljesen megtelni a tank, mert a vízszint emelkedésének sebessége nullához tart egy bizonyos magasságnál $h_{\text{max}} = 80 \text{ cm}$ (szaggatott vonal). Úgy látszik, van egy lyuk a tartály alján. Mekkora a lyuk keresztmetszetének területe?



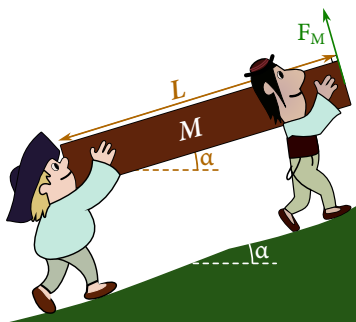
22 Miki vásárolt egy liter epres ivójoghurtot, melynek térfogata 10 % joghurtból, és 90 % vízből áll. Éjszakára a hűtőbe tette és reggelre az ital leülepedett úgy, hogy az üveg tetején tiszta víz volt, és a joghurt koncentrációja lineárisan nőtt az üveg alja felé haladva.

Miki reggelire szeretett volna inni belőle egy olyan pohárral, melynek térfogata 400 ml, viszont elfelejtette felrázni előtte az üveget. Ezt csak akkor vette észre, amikor már a poharába öntött 200 ml folyadékot. Ekkor visszazárta a dobozt, erősen felrázta, és feltöltötte a poharat a tetejéig. Mennyi a joghurt koncentrációja Miki poharában most?



23 Máté és Jakab egy fatörzset cipelnek fel egy lejtős síkon, aminek a dőlésszöge α . A fatörzs hosszú, vékony henger alakú, hossza L , tömege M . Máté az elejét viszi, Jakab a végét. Máté azonban nem erőlteti meg magát túlságosan: az általa kifejtett erő nem felfelé mutat, hanem merőlegesen a fatörzs tengelyére. Mekkora a Máté és Jakab által kifejtett erők aránya?

Máté és Jakab azonos magasságúak, és a fatörzset a talajtól azonos magasságban tartják.



24 A Föld felszínének mekkora hányadában lehetséges a Napot pontosan északon látni (bármilyen magasságban a horizont felett)?

Feltételezzük, hogy a Föld tökéletes gömb, és a napsugarak párhuzamosak. A légköri fénytörés és hasonló hatások elhanyagolhatóak.

25 Dani az íjász-világ bajnokságra készül. A cél D távolságra van Danitól vele azonos magasságban. Mennyivel kell a céltábla közepe fölé céloznia Daninak ahhoz, hogy eltalálja azt, ha a nyíl v_0 sebességgel hagyja el az íját?

Elméletben kétféle módon lehetséges ez, ám íjászversenyeken közvetlenül a táblát kell célozni, ezért a lehetséges megoldások közül a kisebbet adjátok le.

26 Amikor valamit meg kell mérni, az amerikaiak bármilyen, de abszolút bármilyen mértékegységet használnak, csak SI-t ne kelljen. John Doe is létrehozta az ő saját mértékegységrendszerét, ami a *korty*, *böffentés* és *pislantás* mértékegységeken alapul, amiket a következőképp definiál:

- 1 korty az a folyadéktérfogat, amit egyszerre le tud nyelni, egy pintet 20 kortyolással iszik meg;
- 1 böffentés a böffentésének a hangintenzitása, ami 100 dB-es hangintenzitásnak felel meg;
- 1 pislantás az az idő, amennyi eltelik, amíg egyet pislant, John egy másodperc alatt pontosan kettőt tud pislantani.

Mennyi John Doe tömege az ő saját mértékegységrendszerében, ha az angolszász mértékegységekben mérve 200 font?

0 dB 1 pW/m²-es teljesítményfluxusnak (egységfelületre eső teljesítménynek) felel meg.

27 Jusstina nagymamának újra kell töltenie a munkájához szükséges 10 l térfogatú nitrogénpalackját. Mint mindig, hajnali fél ötkor érkezett a nitrogén szállító.

A furgonjában öt kisebb, 2 l térfogatú nitrogénpalackot hozott, amelyek nyomása 5 MPa.

A munkamenet a következő: a nitrogén szállító két palackot összeköt egy szeleppel.

Ezután kinyitja a szelepet, hogy a palackok közötti nyomás kiegyenlítődjön.

Miután a nitrogén hőmérséklete is egyensúlyba került a külső hőmérséklettel, a palackokat ismét elválasztja.

Mekkora maximális nyomást tud elérni a nitrogén szállító a nagy palackban?

28 A történelem ismétli önmagát. Ebben az évben Patrik ismét talált egy furcsa fekete korongot a nagyapja szekrényében. Mielőtt felszolgált volna rajta egy szójaburgert vagy frizbiként használta volna, a nagyapja megmutatta neki, hogy ha rárakja egy lemezjátszóra és megnyom pár gombot, majd a tű hegyét a spirál alakú mélyedésbe helyezi, a hangszóróból baljós recsegés és szisszegés fog hallatszani, valamiféle történelem előtti zene kíséretében.

Ezúttal Patrik arra kíváncsi, hogy mennyi időbe telik, míg a bakelit fergyorsul álló helyzetből a szokványos 33 $\frac{1}{3}$ fordulat per perces sebességre. Feltételezzük, hogy csak azután helyezi rá a tűt, hogy a lemez elérte a szokványos sebességét.

A bakelit egy tömör lemez, melynek átmérője 30 cm, tömege pedig 200 g. A lemezt egy vele megegyező átmérőjű kör alapú tálcára helyezzük, melynek tömege 2 kg és együtt forog a lemezzel. A lejátszót egy AC/DC adapter hajtja, melynek feszültsége 5 V és 100 mA egyenáramot vesz fel. Tekintsünk el minden energiavesztéstől.

29 Rizzimus Primus egy elektromosan töltött skibidi kockával játszott. A kocka minden csúcsánál $q = 1$ C töltésnyi drip volt. Rizzimus Primus spawnolt egy kilencedik töltést, amit odadroppolt a kocka közepébe, hogy chill legyen, fr fr. Rizzimus Primus lowkey szigma, szóval pontosan tudja, mekkorának kell lennie ennek a töltésnek uwu, hogy egyik töltés se szálljon el Miskolcig, vagy zuhanjon bele a kocka közepébe, mer' az már straight-up cringe lenne.

Mekkorának kell lennie ennek a kilencedik töltésnek?

#elektrosztatika #skibidi #naboj-fizika #nocap

30 A NáSa (Náboj Satellites) űrcég bejelentette a nagy sikert — leszálltak a Holdon. A valóságban azonban nem volt elég pénzük, így csak a Földön forgattattak videót alulfizetett fizikushallgatókkal. És mindezt egy egyszerű telefonnal tették, aminek kamerája másodpercenként 60 Hz képkockát rögzít. Az első próbafelvételhez egy csavarkulcs segítségével modelleztek egy ferde hajítást.

Milyen képkockasebességgel kellene lejátszani a videót, hogy meggyőzőnek tűnjön? A Holdon a gravitációs gyorsulás a Földiének 16 %-a.

31 Ádám, a kertész, és Jusztina nagymama, a híres füvesasszony egymás szomszédai, és házaik egy közös falat osztanak meg. Ádámnak hűvös pincére van szüksége, hogy a zöldségei ne romoljanak meg, míg Jusztina nagymama meleg pincét szeretne, hogy a gyógynövényei megfelelően tudjanak száradni.

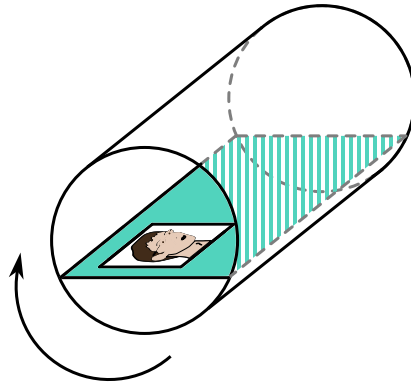
Ezért úgy döntöttek, hogy beruháznak egy hőszivattyúba. A hőszivattyú elektromos energiával működik, és Ádám pincéjéből vonja el a hőt, majd Jusztina nagymama pincéjébe juttatja. Mindketten nagyon elégedettek a befektetésük eredményével. Jusztina nagymama megfigyelte, hogy a hőszivattyú átlagos hatásfoka 1500 %.

Ádám mekkora átlagos hatásfokot fog megfigyelni ekkor?

32 Nemrég olvasott István a Nemzetközi Űrállomásról. Tudja tehát, hogy a tömege 400 t, és hogy a felszín felett 400 km magasan körpályán kering a Föld körül. Annak ellenére, hogy milyen magasan van, még így is hat rá a légkör közegellenállása, melynek hatására naponta körülbelül 100 m magasságot veszít.

Milyen erővel lassítja a légkör a Nemzetközi Űrállomást?

33 Ádám ismét hosszú időt töltött a WC-n. Hogy gyorsabban teljen az idő, elkezdett játszani egy WC-papír gurigával. Kivette a pénztárcájából az ISIC kártyáját, és a vízszintesen tartott guriga aljába helyezte. Ezután forgatni kezdte a gurigát. Mekkora a maximális szög, amellyel elforgathatta a gurigát, ha az ISIC kártya nem csúszott le? Az ISIC kártya szélessége $\sqrt{2}$ -ször nagyobb, mint a guriga sugara, a súrlódási együttható az ISIC kártya és a guriga között 0,3.



34 Gergő gyakran emlékszik vissza a gyerekkorára – arra az időre, amikor még a szivárvány is fekete-fehér volt, nem léteztek mobiltelefonok, és ő lovaskártyákat gyűjtött. Többek között minden kártyán szerepelt, hogy az adott ló mennyi idő alatt gyorsul 0 km/h-ról 100 km/h-ra sík úton.

Ma már a szivárványok színesek, Gergőnek is van okostelefonja, és modern autók kártyáit gyűjti. A legnagyobb becsben tartott darab a Rimac Neverát ábrázolja, a leggyorsabb sorozatgyártású autót. Elektromos motorjai összesen akár 1888 hp leadására képesek, és az autó nekik köszönhetően 1,8 s alatt gyorsul 100 km/h-ra. A még nagyobb gyorsulást nem a teljesítmény hiánya, hanem a kerekek és az út közötti tapadás akadályozza meg.

Mi a legrövidebb idő, ami alatt a Rimac Nevera felgyorsulhat 0 km/h-ról 100 km/h-ra egy lejtőn lefelé, ha a motorok korlátlan teljesítményre képesek, és tetszőlegesen meredek lejtőt választhatunk?

35 Egy trópusi ország nyugati tengerpartján függőleges sziklafal emelkedik. Amikor a Nap lemegy a partnál, a szikla teteje még világít: a Föld gömbölyű, és a horizont távolabb van, ha a szikla tetejéről nézünk, mint a tengerpartról nézve, így a Napot egy kicsit tovább lehet látni.

A naplemente után az árnyék éle egyenletesen gyorsulva kúszik felfelé a sziklafalon. Mekkora ennek a gyorsulásnak a nagysága?

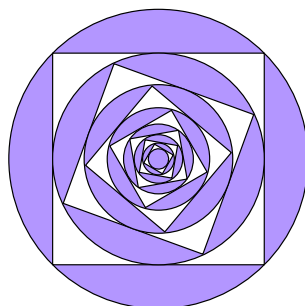
A szikla pontosan az Egyenlítőn helyezkedik el. Tegyük fel, hogy a tavaszi napéjegyenlőség napja van.

36 Jakab ellátogatott a helyi atomerőműbe. Az idegenvezető sok érdekes tényt mesélt a látogatóknak az erőmű működéséről. Jakab például megtudta, hogy a természetes urán csak 0,72 %-át teszi ki a ^{235}U izotóp, a többi pedig főként ^{238}U . Ezek felezési ideje rendre $7 \cdot 10^8$ és $4,46 \cdot 10^9$ év. A reaktor működéséhez azonban dúsított uránra van szükség, amely 3 % ^{235}U -t tartalmaz.

Jakab most kíváncsi: mennyivel nagyobb a dúsított urán aktivitása a természetes uránéhoz képest, ha azonos számú atomot tekintünk?

37 Szonja kapott az anyukájától egy mágikus ékszert, egy nyakláncot, amelyen a mellékelt ábrán látható amulett függ. Az amulett egy r sugarú kör, amelyből egy beleírt négyzetet vágott ki. A négyzetbe belehelyezett egy beleírt kört, majd ebből ismét kivágott egy beleírt négyzetet és ezt a mintát folytatta a végtelenségig. Hogy az amulettnek még nagyobb hatalma legyen, minden négyzetet 20° -kal elforgatott az előzőhöz képest, úgy, ahogyan az ábra mutatja.

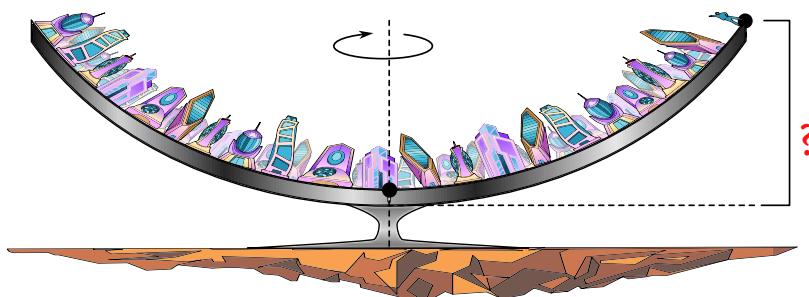
Szonja tudja, hogy minél tovább forog az amulett, annál jobban működik. Mekkora az amulett tehetetlenségi nyomatéka a síkjára merőleges, a középpontján áthaladó tengelyre vonatkoztatva? Az amulett tömege m .



38 A tervek szerint a jövőben az emberiség gyarmatosítani és terraformálni akarja a Marsot. Azonban a Mars felszíni gravitációja csak a földi gravitáció 36 % százaléka, és sokan nehezen szokják meg ezeket a körülményeket. Ezért megépítettük **Gyropolist**, egy hatalmas várost, amely forgási paraboloid alakú, sugara pedig 1000 m. A város lassan forog a függőleges tengelye körül, így mesterséges gravitációt hoz létre!

Amikor egy új telepés érkezik a Marsra, a város legszélén kap szobát, ahol a látszólagos gravitáció megegyezik a földivel. Később fokozatosan a város alacsonyabb részeibe költözik, ahogy hozzászokik a kisebb, és kisebb gravitációhoz. Természetesen a város minden pontjában az érzékelt gravitáció iránya merőleges a felszínre.

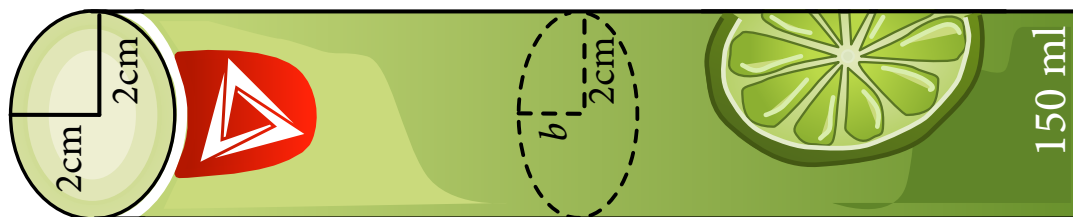
Kérdés: mekkora a magasságkülönbség a város közepe és széle között?



39 Gergőnek felfrissülésre van szüksége egy hosszú, forró nyári kerékpáros nap után. A legközelebbi élelmiszerboltban vett egy jégkrémes nyalókát. A nyalóka egy „deformált tölcser” alakú csomagolásban van. A csomag térfogata 150 ml, vízszintes keresztmetszete pedig tetszőleges magasságban ellipszis alakú. A fél nagytengely mindig konstans $a = 2$ cm, de a fél kistengely lineárisan változik a magassággal – legfelül $b = a$, míg legalul $b = 0$.

Gergő a nyalókát a tetejétől kezdve eszi, miközben lassan felfelé nyomja azt a csomagolásból. Mekkora munkát fog végezni a nyalókát felfelé tolva, mire megesszi a nyalóka térfogatának felét? A nyalóka sűrűsége 1000 kg/m^3 .

A kép el van forgatva, hogy elférjen ezen a papíron, de még Gergő is úgy tartja a nyalókát, mint egy normális ember, a nyílással felfelé.



40 Tom imádja a gyors autókat és a gyorsulási versenyeket. Legutóbbi világrekord-kísérlete során a rajongói egyenletesen helyezkedtek el az s hosszúságú gyorsulási pálya mentén. Tom padlóig nyomta a gázt, és állandó a gyorsulással, végigszárguldott a pályán. Minden rajongó feljegyezte, mekkora volt Tom autójának pillanatnyi sebessége, amikor elhaladt mellette. A verseny után, a kocsmában összegyűlt rajongók összehasonlították a jegyzeteiket, és kiszámolták a mért sebességek átlagát.

Mekkora ennek az értéknek és Tom tényleges átlagsebességének az aránya?

Megoldások

1 A probléma megoldásához Annának valójában nem kell kitöltenie az egész sudokut. Mivel a szabályok szerint minden szám 1-től 9-ig pontosan egyszer szerepel egy adott oszlopban, minden oszlop tömege megegyezik: 45 g. Emiatt a feladvány tömegközéppontjának vízszintes koordinátája biztosan pontosan középen lesz. Ugyanez igaz minden sorra is, így a tömegközéppont függőleges koordinátája szintén középre esik. Következésképpen a tömegközéppont és a geometriai középpont egybeesik, tehát a keresett távolság 0 cm.

2 A feladat megoldása szempontjából elképzelhetjük, hogy a vonat (és így Vilmos és a tükör) áll, és a jelzőtábla mozog felé v sebességgel. A tükör a Vilmos mögötti tájat tükrözi, így a tükörtől d távolságban lévő objektumok Vilmos számára a tükör mögött d távolságban látszanak. Ezért, ha a jelzőtábla felé mozog v sebességgel, a tükörképe is v sebességgel közelít Vilmos felé.

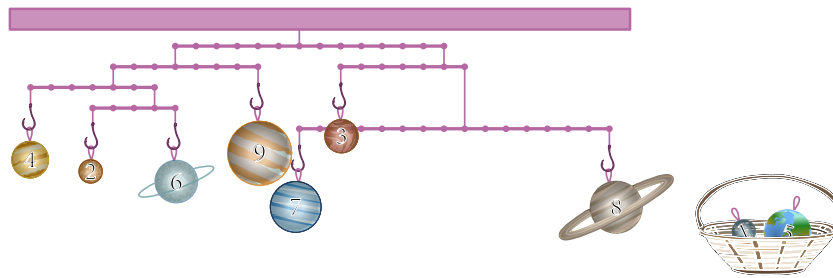
3 Jelöljük a kampókat balról jobbra A -tól G -ig. Vegyük észre, hogy az E és G kampók tengelytől mért távolságainak aránya $\frac{8}{7}$. A kínált bolygók közül pontosan a 7 és 8 grammosok tömegaránya $7 : 8$, ezért ezeket kell felakasztanunk az E és G kampókra.

Erre a mérlegre került teljes tömeg tehát $7\text{ g} + 8\text{ g} = 15\text{ g}$. A felette levő karra ható nyomaték ezért $15\text{ g} \cdot g \cdot 1\text{ cm} = 15\text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g^1$. Annak érdekében, hogy ezt a nyomatékot kiegyensúlyozzuk az F kampóval, amely az elforgatási tengelytől 5 cm-re van, egy 3 g tömegű bolygónak kell ott lógnia.

Most vegyük észre, hogy a B és C kampók tengelytől mért távolságainak aránya $3 : 1$. A megmaradt bolygók közül csak a 2 g és 6 g tömegűek tömegaránya ilyen. Együtt ezek a felső karra $8\text{ g} \cdot g \cdot 1\text{ cm} = 8\text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g$ nyomatékot adnak, ezért az A kampón egy 4 g tömegű bolygónak kell lennie. Az A , B és C kampókon lévő bolygók össztömege így 12 g, azaz ezek össznyomatéka $12\text{ g} \cdot g \cdot 3\text{ cm} = 36\text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g$. A D kampónak ezt kell kiegyenlítenie, tehát ide a 9 g tömegű bolygót akasszuk.

Balról jobbra tehát a kampókon lévő bolygók tömegei rendre 4, 2, 6, 9, 7, 3 és 8 g, és Martin nem fogja használni a 1 g és 5 g tömegű bolygókat. Ez érthető is: Pluto már nem számít bolygónak, és amúgy is van otthon Földjük.

¹Egyszerűsítésképp feltételeztük, hogy egymástól minden pont távolsága 1 cm, de bármely más nemnulla konstans is megfelelne.

Ábra 3.1: *Balanced scales*

4 A meleg víz hőt ad át a hideg víznek mindaddig, amíg be nem áll a hőmérsékleti egyensúly. A feladat szerint ez az egyensúlyi hőmérséklet 34 °C .

Kezdjük a kalorimetrikus egyenlettel:

$$Q_{\text{felvett}} = Q_{\text{leadott}} \quad (4.1)$$

$$m_{\text{hideg}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t - t_{\text{hideg}}) = m_{\text{meleg}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t_{\text{meleg}} - t).$$

Ezután az egész egyenletet eloszthatjuk a víz fajhőjével, $c_{\text{H}_2\text{O}}$ -val. Legyen x a hideg víz térfogatárama (azaz másodpercenként a kádba beáramló hideg víz térfogata). Mivel a teljes térfogatáram 600 ml/s , ezért a meleg víz térfogatárama $600\text{ ml/s} - x$ lesz. Ezeket az értékeket az egyenletbe behelyettesítve és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy:

$$x \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (34\text{ °C} - 17\text{ °C}) = (600\text{ ml/s} - x) \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (68\text{ °C} - 34\text{ °C}), \quad (4.2)$$

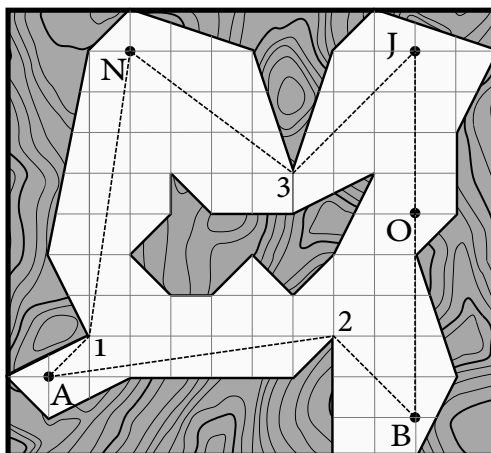
$$x \cdot 17\text{ °C} = (600\text{ ml/s} - x) \cdot 34\text{ °C}.$$

Ebből az összefüggésből pedig x -re megoldva:

$$x = \frac{600\text{ ml/s} \cdot 34\text{ °C}}{17\text{ °C} + 34\text{ °C}} = 400\text{ ml/s}. \quad (4.3)$$

Tehát a szükséges hidegvíz-térfogatáram: 400 ml/s .

5 Az alábbi ábrán látható a legrövidebb út minden egymást követő pár közt, melyen a hang utazik (5.1. ábra). Helyenként kőfal állja az utat, melyet a hangnak meg kell kerülnie.



Ábra 5.1: A hanghullám által követett út a barlangban

Ennek következtében fel kell osztanunk az első utat az N és az A pontok közt két szakaszra az 1-es pont közbeiktatásával. Szerencsére a négyzetrácson minden vonal vagy egy rácson fut, vagy átfogója egy derékszögű háromszögnek, tehát csak a Pitagorasz-tételt kell ismernünk.

Például az első szakasz hossza

$$\begin{aligned} d_{NA} &= d_{N1} + d_{1A} = \sqrt{(70 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} + \sqrt{(10 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} = \\ &= \sqrt{5000} \text{ m} + \sqrt{200} \text{ m} = 50\sqrt{2} \text{ m} + 10\sqrt{2} \text{ m} = 60\sqrt{2} \text{ m}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Hasonlóan végigmehetünk minden egyes szakaszon, hogy megkapjuk a hosszukat:

$$d_{A2} = 50\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{2B} = 20\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{BO} = 50 \text{ m}, \quad d_{OJ} = 40 \text{ m}, \quad d_{J3} = 30\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{3N} = 50 \text{ m}. \quad (5.2)$$

Ha összeadjuk őket, megkapjuk a teljes távolságot, ami $(140 + 160\sqrt{2}) \text{ m}$. A hang sebessége nagyjából $c_s = 343 \text{ m/s}$, tehát ennek a távnak a teljesítéséhez

$$t_s = \frac{(140 + 160\sqrt{2}) \text{ m}}{343 \text{ m/s}} \doteq 1,07 \text{ s} \quad (5.3)$$

szükséges.

Azonban tudjuk, hogy az expedíció résztvevői egyaránt fél másodperces reakcióidővel rendelkeznek. Mivel ezzel együtt halad végig a kiáltás-lánc az expedíció négy tagján, az $\bar{t}$ teljes reakcióidejük $t_r = 4 \cdot 0,5 \text{ s} = 2 \text{ s}$, és Nina ennél fogva a teljes NÁBOJ szót $t_s + t_r \approx 3,07 \text{ s}$ után fogja meghallani.

6 Ha Patrick átlagos körideje az első három körben 80 s volt, akkor a három kör összideje $3 \cdot 80 \text{ s} = 240 \text{ s}$. A negyedik kör után az átlagos körideje 78 s , így a négy kör összideje $4 \cdot 78 \text{ s} = 312 \text{ s}$.

Tehát a negyedik kört $312 \text{ s} - 240 \text{ s} = 72 \text{ s}$, vagyis $01:12$ alatt futotta le.

7 A navigáció először jelzi Nagy Marcinak, hogy 120 km/h sebességgel kell haladnia, amiből közvetlenül kiszámíthatjuk Marci távolságát a repülőtértől 21:00-kor,

$$s = v \cdot t = 120 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 120 \text{ km.} \quad (7.1)$$

Hasonló módon, ki tudjuk számolni Marci távolságát a repülőtértől 21:30-kor,

$$s = 150 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 75 \text{ km.} \quad (7.2)$$

Ebből tudjuk, hogy az út első fél órájában $120 \text{ km} - 75 \text{ km} = 45 \text{ km}$ -t haladt, tehát Marci sebessége $\frac{45 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 90 \text{ km/h}$. Így az út

$$\frac{120 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 80 \text{ min} \quad (7.3)$$

időt fog igénybe venni, vagyis Marci 22:20-kor fog a reptérre érni.

8 Ha az izzó a kocka nélkül világított volna, az egész szobát bevilágította volna. Ha a fényforrás köré egy 1-nél nagyobb törésmutatójú kockát helyezünk (lehet akár más is, nem feltétlenül 1,5), a Snellius–Descartes-törvény szerint a fény az általános merőlegestől eltérően törik a kocka fala és a levegő határfelülete között. Ezért, ha egy adott kockafalat nézünk, a kockából kilépő sugarak jobban szóródnak, mint a kocka nélkül, ami azt jelenti, hogy még inkább, és biztosan nem kevésbé világítják meg a teret. Így a szoba 100 %-a továbbra is be lesz világítva.

9 A feladat legfontosabb része azt felismerni, hogy a két mennyiség mértékegységei eltérőek. A $v_{\max} = 320 \text{ km/h}$ sebesség nem azonos a megadott $2,6 \text{ km/h/s}$ gyorsulás mértékegységével. Utóbbit azonban átválthatjuk használható mértékegységre, $\text{km}/(\text{h} \cdot \text{h}) \equiv \text{km/h}^2$. Ha tudjuk, hogy a vonat másodpercenként $2,6 \text{ km/h/s}$ -t gyorsul, akkor egy óra (ami 3600 másodpercből áll) alatt ennyivel gyorsulna: $2,6 \text{ km/h/s} \cdot 1 \text{ h} = 9360 \text{ km/h}$.

A $v = a \cdot t$ összefüggésből ki tudjuk fejezni azt az időt, ami alatt a vonat eléri a maximális sebességét. Nyugalomból induló egyenletesen gyorsuló mozgás esetén a következő érvényes:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} v_{\max} t. \quad (9.1)$$

Ha a $\frac{v_{\max}}{a}$ értéket helyettesítjük be t helyére, megkapjuk, hogy a vonat mekkora utat tesz meg, mielőtt eléri a maximális sebességét:

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_{\max} \cdot \frac{v_{\max}}{a} = \frac{v_{\max}^2}{2a}. \quad (9.2)$$

Ha mindkét változóhoz a helyes mértékegységben helyettesítjük be az értékeket, megkapjuk a távolságot: 5,47 km.

10 A teljesen elmerült golyóra ható eredő erő, F_t , a felhajtóerő és a gravitációs erő különbsége, azaz

$$F_t = F_f - F_g = V \rho_v g - V \rho_g g = (\rho_v - \rho_g) \frac{4}{3} \pi r^3 g. \quad (10.1)$$

A vízitünder által végzett munka a $W = F_t \cdot h$ összefüggéssel határozható meg, ami alapján:

$$W = (\rho_v - \rho_g) \frac{4}{3} \pi r^3 g \cdot h \doteq 2,5 \text{ J.} \quad (10.2)$$

11 Mire a villamos eléri a kereszteződést, a csengő hangjának el kellett jutnia a sofőrig, és az autónak elég ideje kellett, hogy legyen elhajtani az útból. Ahhoz, hogy meghatározzuk a minimális szükséges távolságot, használjuk fel, hogy a villamos kereszteződéshez érkezéséig szükséges t_{vill} időnek meg kell egyeznie a hang autóhoz való eljutásához szükséges t_{hang} idő és az autó elhajtásához szükséges t idő összegével.

Legyen s a villamos és a kereszteződés közötti szükséges távolság! Az idők értékei a következőképpen fejezhetők ki ekkor:

$$t_{\text{vill}} = \frac{s}{v} \quad \text{és} \quad t_{\text{hang}} = \frac{s}{c}. \quad (11.1)$$

Ezeket behelyettesítve az időegyenletbe megkapjuk, hogy

$$t_{\text{vill}} = t_{\text{hang}} + t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{v} = \frac{s}{c} + t, \quad (11.2)$$

amiből pedig a távolság kifejezhető a következőképp:

$$s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v}. \quad (11.3)$$

12 Először is határozzuk meg, hogy mekkora területet akarunk lefedni. A földet közelítsük egy $R_{\oplus} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$ sugarú gömbbel, tehát ennek a felülete

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2. \quad (12.1)$$

A feladatleírásból tudjuk, hogy egy A0-s papírnak a területe 1 m^2 és ez a szám növekedésével mindig a felére csökken. Például a leggyakoribb A4-es papírnak a területe $\frac{1}{2^4} \text{ m}^2 = \frac{1}{16} \text{ m}^2$.

Viszont a számok sorozatát az ellenkező irányban is folytathatjuk, a negatív értékek felé. Az A–1-es papír területe tehát 2 m^2 és minden következőé az előzőnek a duplája, egészen addig amíg át nem lépjük a 12.1 egyenletből kapott értéket. Ilyen esetekben használhatjuk a kézenfekvő kettes alapú logaritmus függvényt. Ezt egy számológépen megoldhatjuk².

Ne feledkezzünk meg arról, hogy ezt az értéket felfele kell kerekíteni, hisz a *legkisebb elegendően nagy* papírt keressük. Az eredményünk tehát

$$-[N] = -[\log_2 (5,1 \cdot 10^{14})] = -49, \quad (12.2)$$

azaz egy A–49 papírt kerestünk.

13 A füst a levegőhöz képest nem mozog – vagyis a levegővel együtt halad, a szél v sebességével a talajhoz képest. Mire a vadászgép eléri a nézőtér végét, a füstcsík eleje az ellenkező irányba sodródik, és bizonyos

²Ha nincs ilyen a számológépünkön, alkalmazhatjuk a $\log_y x = \frac{\log x}{\log y}$ összefüggést.

távolságot megtesz. Ez az időtartam

$$t = \frac{s}{u}, \quad (13.1)$$

és ezalatt a legkorábban kibocsátott füst útja

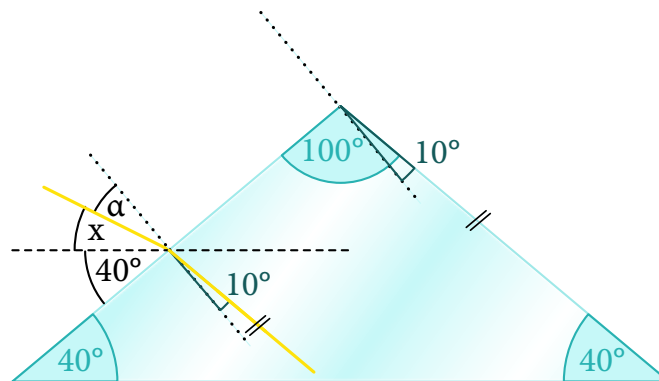
$$s_d = vt = v \frac{s}{u}, \quad (13.2)$$

így a füstcsík teljes hossza

$$s + s_d = s + v \frac{s}{u} = s \left(1 + \frac{v}{u} \right). \quad (13.3)$$

14 Mivel a prizma törésmutatója nagyobb, mint a levegőé, a fénysugarak a beeséskor a merőleges felé fognak megtörni.

Ahhoz, hogy egyetlen fénysugár se jusson át a prizma túloldalára, a sugaraknak legfeljebb párhuzamosan kell haladniuk azzal az oldallal, ami mögött az őt ül – vagy még meredekebben kell lefelé, a prizma alsó alapja felé irányulniuk. Az ábráról leolvasható, hogy ehhez a sugaraknak legfeljebb 10° -os szögben kell megtörniük a merőlegetől mérve.



Ábra 14.1: A releváns szögek az elrendezésben

Ebből a Snellius–Descartes-törvény segítségével meghatározhatjuk, milyen szögben kell a sugaraknak beesniük:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ). \quad (14.1)$$

Mivel a prizma egyenlő szárú, az oldalai 40° -os szöget zárnak be a vízszintessel. Ha megnézzük a merőleges és a határfelület közötti szögeket, akkor: $40^\circ + \gamma + \alpha = 90^\circ$ ahol γ az a szög, amennyivel a rablónak lefelé kell döntenie az elemlámpát.

A megfelelő szög tehát:

$$\gamma = 50^\circ - \alpha = 50^\circ - \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ) \doteq 25,4^\circ. \quad (14.2)$$

15 Először is, észrevehetjük, hogy a lift sebessége itt irreleváns. Ha Karcsi mozdulatlanul tartaná a súlyzót, az $m_c g$ erővel hatna rá. Azonban ő hagyja, hogy a súlyzó a gyorsulással essen, így elegendő, ha $m_c(g - a)$ erővel hat rá. Ezen felül a lift kábelének Karcsit és magát a liftet is meg kell tartania, ezért rendre $m_k g$ és $m_v g$ erőt is ki kell fejtenie, így összesen

$$\begin{aligned} F &= m_k g + m_v g + m_c(g - a) \\ &= 60 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 250 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 20 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s}^2 - 5 \text{ m/s}^2) = 3200 \text{ N} \doteq 3,2 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

16 Minden esetben függőleges hajításról van szó ugyanabban a gravitációs térben, csak a kezdőfeltételek különböznek. Ezért elegendő ismernünk az **egyenletesen gyorsuló mozgás** pályájának és időtartamának képleteit:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \quad (16.1)$$

Vegyük észre, hogy a felfelé dobás második fele pontosan megegyezik a lefelé dobás teljes idejével: az ablak szintjén a tojás biztosan eléri ugyanazt a v_0 sebességet, amivel Sam dobta. A felfelé dobás első fele tehát 2 s ideig tart, és ezalatt a tojás sebessége $2v_0 = g \cdot 2$ s-tal változik. Sam tehát nyilvánvalóan $v_0 = 10 \text{ m/s}$ sebességgel dob, ami azt jelenti, hogy a tojás

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \approx 5 \text{ m} \quad (16.2)$$

magasságba emelkedik az ablak szintje fölé. Tudjuk továbbá, hogy a mozgás csúcspontján a tojás megáll, és onnantól kezdve a mozgás **egyenletesen gyorsuló lesz nulla kezdősebességgel**. A zuhanás a legmagasabb pontból ennyi ideig tart:

$$\tau = t_{\uparrow} - \frac{t_{\uparrow} - t_{\downarrow}}{2} = \frac{t_{\uparrow} + t_{\downarrow}}{2} = 3 \text{ s}, \quad (16.3)$$

ebből következik, hogy

$$H = \frac{g\tau^2}{2} = 45 \text{ m}.$$

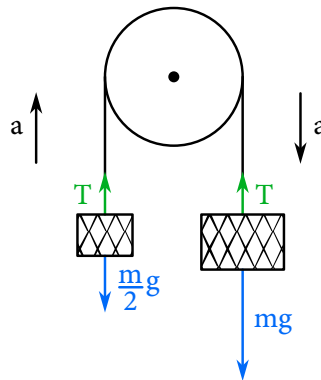
Sam ablaka tehát a föld felett

$$H - h = 40 \text{ m}$$

magasságban van. A szabadesés ebből a magasságból ennyi ideig tart:

$$\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s.} \quad (16.4)$$

- 17** Először készítsük el az erőábrát. Mindössze Newton második törvényére van szükségünk: $F = ma$.



Ábra 17.1: Két súly csigán

A gravitáció mindkét testre hat: $F_1 = mg$ és $F_2 = \frac{m}{2}g$. Mivel F_1 és F_2 a kötélen keresztül hatnak, az megfeszül, és így mindkét végén a gravitációval ellentétes irányú húzóerőt fejt ki. Ezeket az erőket az erőábrán T_1 és T_2 jelöli. Mivel a kötel és a csiga súlytalan, T_1 -nek egyenlőnek kell lennie T_2 -vel; különben maga a kötel végtelen gyorsulással mozogna. Ezért mindkettőt egyszerűen T -vel jelöljük.

Feltételezhetjük továbbá, hogy a két súly azonos gyorsulással (a) mozog, a nehezebb lefelé gyorsul. Most már csak fel kell írunk a mozgásegyenleteket mindkét súlyra, majd megoldani a -ra.

$$\frac{m}{2}a = -\frac{m}{2}g + T \quad \text{és} \quad ma = mg - T. \quad (17.1)$$

A két egyenletet összeadva kiküszöbölhetjük T -t, és megkaphatjuk a gyorsulást:

$$a = \frac{m - \frac{m}{2}}{m + \frac{m}{2}}g = \frac{1}{3}g. \quad (17.2)$$

- 18** A számok kettő hatványai, ezért minden állítás érvényességét külön kell értékelnünk.

A keringési sebesség növelése (1)

Az intuitív feltételezés azt diktálná, hogy ha növeljük a keringési sebességet, akkor a keringési időnek csökkennie kell. Azonban nem szabad elfelejtenünk, hogy ha megváltoztatjuk a keringési sebességet, akkor

az orbitális pálya alakja is megváltozik. Annak eldöntésére, hogy ez az állítás igaz vagy hamis, nézzük azt az esetet, amikor a sebességet annyira megnöveljük, hogy a keringő test elérje a szökési sebességet. Ebben az esetben a keringési idő gyakorlatilag végtelenné válik, tehát biztosan növekszik. Ezért az állítás **hamis**.

Keringési sebesség a perihéliumban (2)

Kepler második törvényéből közvetlenül következik, hogy minél közelebb van a Föld a Naphoz, annál gyorsabban halad. Ezért ez az állítás **igaz**.

Tél (4)

Vegyük észre, hogy amikor az északi féltekén tél van, akkor a déli féltekén nyár van. Ha az állítás igaz lenne, akkor a télnek mindkét féltekén egyszerre kellene bekövetkeznie. Ezért tehát ez az állítás **hamis**. Valójában amikor a Föld január elején a Naphoz legközelebbi pontján tartózkodik, az északi féltekén fagyos tél uralkodik. Vagy talán mégsem annyira fagyos.

Körpálya és az első kozmikus sebesség (8)

A testet körpályára kényszerítő centripetális erő a gravitációs erő, amely az r sugártól függ, $\frac{1}{r^2}$ szerint. A centripetális erő azonban arányos $\frac{v^2}{r}$ -el, ahol v a keringési sebesség. Ez azt jelenti, hogy a keringési sebesség a Föld felszíne feletti h magassággal változik $v \propto \frac{1}{R+h}$ módon. Ezért ez az állítás **hamis**.

Geostacionárius műholdak (16)

A geostacionárius műholdak olyan műholdak, amelyek a Föld körül keringenek, de mindig a Föld felszínének ugyanazon pontja felett helyezkednek el. Ezt úgy érik el, hogy a műholdat olyan magasságba állítják pályára, ahol a keringési szögsebessége megegyezik a Föld forgási szögsebességével. Ha egy műhold mindig ugyanazon pont fölött marad, akkor az a földrajzi szélességi körök irányában kering. Ha azonban a műhold bármely más szélességi kör fölött keringene, mint az egyenlítő, akkor a Föld középpontja felé ható gravitáció az egyenlítő felé húzná, így lehetetlenné válna, hogy a műhold a saját szélességi köre fölött maradjon. Ezért a geostacionárius műholdak valóban csak az egyenlítő fölött létezhetnek. Tehát az állítás **igaz**.

Elliptikus pályák (32)

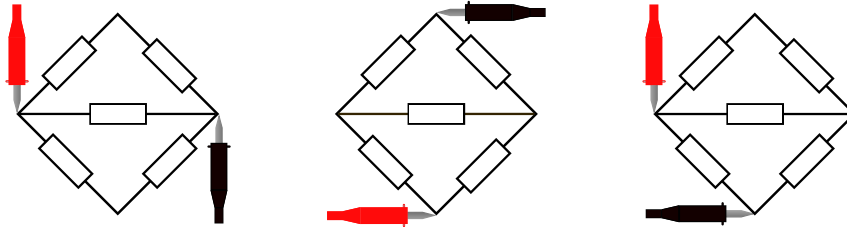
A könnyebb test akkor kering elliptikus pályán, ha gravitációsan kötött a jóval nehezebb testhez (és véletlenül nincs körpályára elegendő sebessége). Azonban, ha a sebessége túl nagy, el tud szökni a végtelenbe, és ebben az esetben hiperbolikus vagy parabola pályán halad. Ezért az állítás **hamis**.

Az igaz állítások számainak összeadásával a következő eredményt kapjuk: 18.

19 Első lépésként érdemes megjegyezni, hogy egy szabályos tetraéderben minden él, illetve minden csúcspár ekvivalens. Ezért mindegy, hogyan forgatjuk el, vagy melyik két csúcshoz csatlakoztatjuk kezdetben az ohmmérőt – az eredmény nem változik; csak azután mérhetünk eltérő ellenállásokat, miután az egyik ellenállást eltávolítjuk.

Így egy ezzel ekvivalens, de kicsivel egyszerűbb feladatot oldhatunk meg: először eltávolítunk tetszőlegesen egy ellenállást, és csak ezután csatlakoztatjuk az ohmmérő kivezetéseit két tetszőleges csúcshoz.

Rögtön láthatjuk, hogy csak három különböző esetet kell megvizsgálnunk (lásd a 19.1 ábrát).³



Ábra 19.1: A tetraéder három lehetséges ellenállásmérése egy ellenállás eltávolítása után

- Ha az ohmmérőt két olyan csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyekhez az eltávolított ellenállás nem csatlakozott, három párhuzamos ágot kapunk, amelyekben rendre egy, két és két ellenállás van sorba kötve. A teljes ellenállás tehát:

$$R_1 = R \parallel (R + R) \parallel (R + R) = R \parallel 2R \parallel 2R = \frac{1}{2}R. \quad (19.1)$$

- Ha az ohmmérőt két olyan csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyek közül eltávolítottuk az ellenállást, két szimmetrikus, két-két ellenállásból álló párhuzamos ágot kapunk. Mivel a kapcsolás teljesen szimmetrikus, a maradék ellenállás két vége között nem lehet feszültségkülönbség, és ahol nincs feszültség, ott áram sem folyik. Ezért az eredő ellenállás:

$$R_2 = (R + R) \parallel (R + R) = 2R \parallel 2R = R. \quad (19.2)$$

- Végül, ha az egyik mért csúcs érintetlen, a másik pedig olyan, amelyről eltávolítottunk egy ellenállást, soros-párhuzamos hálózatot kapunk, amelynek eredője:

$$R_3 = R \parallel (R + (R \parallel 2R)) = R \parallel \left(R + \frac{2}{3}R\right) = R \parallel \frac{5}{3}R = \frac{5}{8}R. \quad (19.3)$$

Ez a három érték mind különböző, tehát a válasz a következő halmaz: $\left\{\frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R\right\}$.

20 A rendezés egyszerűsítése kedvéért a betűket több különböző csoportba soroljuk. Sejtteni lehet, hogy lesznek betűk, melyek nem fognak megállni a saját lábukon.

Például a J és C egy ponton támaszkodnak, de a tömegközéppontjuk nem e fölött a pont fölött van, tehát egyből feldőlnek. Hasonló indokok miatt a P is azonnal megdől. Annak ellenére, hogy véges hosszúságú talpazata van, a tömegközéppontja egészen biztosan ezen kívül -jobbra- helyezkedik, tehát felborul.

³A párhuzamos kapcsolás rövidített jelölését fogjuk használni: $a \parallel b \equiv \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

A második csoportba tartoznak az 0 és 5 betűk. Ezek maguktól nem dőlnek fel, mert a tömegközéppontjuk a támaszpont felett helyezkedik el, de tetszőlegesen kicsi impulzus hatására már felborulnak.

Az I és V más kategóriát képez. Mivel a talpazat nem nulla vastagságú, ezek már stabilak, de mivel magasságuk sokkal nagyobb, mint egyéb méreteik, egy kicsi (de nem tetszőlegesen kicsi mint az 0 és 5 esetében) lökés is elég, hogy feldöntsük őket. A kettő közül az V lényegesen nagyobb tömegű, de a tömegközéppontja is kicsit magasabban van mint az I-nek. Számoljuk ki, melyik stabilabb!

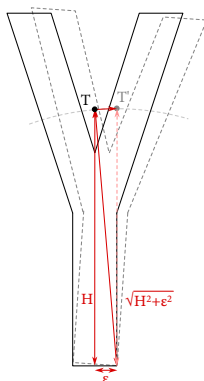
Vegyünk egy m tömegű betűt, aminek tömegközéppontja H magasságban van, és az él amin át akar borulni a vízszintes irányban ettől ε távolságban van. Az átborulás pillanatában a potenciális energia növekvés

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg(\sqrt{H^2 + \varepsilon^2} - H). \quad (20.1)$$

Ez az a munka, ami alapján számszerűsítjük egy betű stabilitását. Ha $\varepsilon \ll H$,

$$\sqrt{H^2 + \varepsilon^2} \approx H \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2H^2} \right) \Rightarrow W \approx \frac{mg\varepsilon^2}{2H}. \quad (20.2)$$

Tehát a $\frac{m\varepsilon^2}{H}$ arány kulcsfontosságú a stabilitáshoz. Egy betű, aminek ez az aránya magasabb, stabilabb, a súlya pedig arányos lesz a méretével.



Ábra 20.1: Az V megdöntése. A megdöntéshez fel kell emelni a kipontozott vonalig. Láthatjuk, hogy a T' tömegközéppont magasabb ebben az esetben, mint T az alapállapotban.

Az I-nek és az V-nak ugyanaz az ε -ja, tehát a döntő faktor a $\frac{m}{H}$ arány. Legyen a négyzetrács egy négyzetének egy oldala egységnyi hosszúságú, illetve egy ilyen hosszúságú része egy betűnek legyen egységnyi tömegű. Ekkor I-nek a tömegközéppontja 8/3 és a tömege 8, tehát a keresett arány $\frac{m}{H} = 2$. V esetében $H \approx 4,76$ és $m \approx 12,9$, tehát a stabilitást meghatározó arány nagyjából 2,7. Ebből következik, hogy V stabilabb mint I

Haladjuk tovább. Az N, A és H betűk esetében a tömegközéppont az általuk meghatározott négyzet középpontjában van és ennek a négyzetnek a csúcsán dőlnek meg, ami minden esetben vízszintesen két egységnyire van a középponttól, függőlegesen meg négyre. Tehát a stabilitást kizárólag a tömeg határozza meg. Egyszerűen a rudak hosszát összeadva azt vesszük észre, hogy N tömege a legnagyobb, és ezt követi H, majd A.

Már csak egy betű maradt: a B. Ez egy 2 hosszúságú rúdon fekszik, ami egy 2 sugarú körhöz csatlakozik. Ha a tömegközéppontja több mint 2 négyzetre lenne a függőleges rúdtól készen lennénk. De egy közelítő számítás azt mutatja, hogy a tömegközéppont egy kicsit több mint⁴

$$x = \frac{8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4\pi \cdot 3}{14 + 4\pi} \doteq 1,645. \quad (20.3)$$

Ez azt jelenti, hogy a B tömegközéppontja kevesebb, mint 0,355 egységre van vízszintesen a fordulóponttól, ami kisebb, mint az előző csoport esetében, de több, mint az I és V-nál, tehát B a stabilitási sorozatban ezek között lesz.⁵

A válasz tehát: N, H, A, B, V, I. A többi betű vagy magától ledől, vagy tetszőlegesen kicsi munkával feldönthető.

21 Tudjuk, hogy a víztartályba való Q beáramlás konstans. Ezzel szemben, a kis lyukon való kiáramlás sebessége függ a hidrosztatikus nyomástól, ami pedig függ a vízszint h magasságától a tartályban. A vízszlop magasságát idő függvényében meghatározni valószínűleg túl nehéz lenne számunkra.⁶ Szerencsére nem is szükséges, mert a kérdés egyetlen paraméterre vonatkozik.

Az $t \rightarrow \infty$ aszimptotikus viselkedés meghatározza a maximális vízszintet a tartályban $h_{\max} = 80$ cm – azaz azt a szintet, amelynél akkora a hidrosztatikus nyomás a tartály alján, hogy a be- és kiáramlás sebessége megegyezik.

Aztán van a pontozott érintő $t = 0$ -nál. Azon a ponton a vízszint még nulla, így a hidrosztatikus nyomás is nulla és egyáltalán nem folyik ki víz a tartály alján, mintha nem is lenne lyukas. Idővel $\tau = 1$ h természetesen megtelne a tartály. Tehát a beáramlást kifejezhetjük úgy, hogy

$$Q = \frac{h_{\max} \cdot S}{\tau}. \quad (21.1)$$

A Bernoulli-egyenletből hamar meghatározható a kiáramlás sebessége a vízszint magasságának függvényében,

$$\rho \frac{v(h)^2}{2} = \rho gh \quad \Rightarrow \quad v(h) = \sqrt{2gh}. \quad (21.2)$$

Tudjuk, hogy egy bizonyos szinten $h_{\max} = 80$ cm a be- és kiáramlás egyenlő, amit a kiáramlási sebességnek és a lyuk A ismeretlen területének szorzata adja meg. Ezután

$$Av = A\sqrt{2gh_{\max}} = Q, \quad (21.3)$$

⁴Ez egy alsó becslés, mert a félkör tömegközéppontja egy kicsit közelebb van a széléhez, tehát a koordinátája kicsit nagyobb mint 3.

⁵B esetében ε megfelelően kicsi a tömegközéppont magasságához képest, tehát ugyanaz a módszer használható, mint ami az Y és I esetében. De nem kell kiszámolnunk a stabilitási arányt pontosan, mert a B-nek az ε értéke sokkal nagyobb, ami ráadásul négyzetesen szerepel a képletben, tehát B biztosan stabilabb.

⁶Egy Chini-differenciálegyenlethez vezet $\frac{dh}{dt} = \alpha + \beta\sqrt{h}$, amely Lambert-féle W -függvénnyel fejezhető ki, és mi olyat biztos nem akarunk megoldani.

és Q helyére a 21.1 egyenletből behelyettesítve megkapjuk az eredményt

$$A = \frac{Q}{\sqrt{2gh_{\max}}} = \frac{S}{\tau} \sqrt{\frac{h_{\max}}{2g}} = 56 \text{ mm}^2. \quad (21.4)$$

22 Azt rögtön ki tudjuk számolni, hogy az italban pontosan 100 ml joghurt van, hiszen ez a 10 %-a 1 l-nek. Amikor az ital leülepszik, csak víz van a tetején, tehát a joghurt koncentrációja ott 0 % lesz. Hogy az átlagos sűrűség 10 % legyen, a koncentrációnak az üveg alján 20 %-nak kell lennie és így minden és így minden 100 ml után 2 %-al nő. A felső 200 ml tehát átlagosan 2 % koncentrációjú, ami összesen 4 ml joghurtot jelent.

A palackban maradó ital térfogata 800 ml és így a maradék joghurt térfogata 96 ml. Felrázaskor az ital homogenizálódik, tehát: $\frac{96 \text{ ml}}{800 \text{ ml}} = 12 \%$. Ebből Miki kitöltött 200 ml-t, vagyis 24 ml joghurtot.

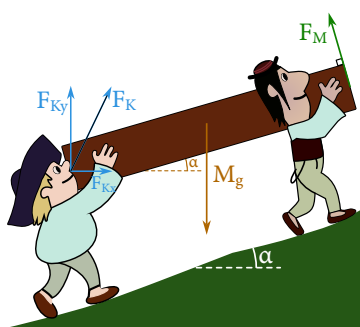
Végül összeadjuk a pohárban lévő joghurt mennyiségét:

$$4 \text{ ml} + 24 \text{ ml} = 28 \text{ ml}, \quad (22.1)$$

és kiszámoljuk az összesített koncentrációt a joghurt térfogatának és az össztérfogat arányaként:

$$\frac{28 \text{ ml}}{400 \text{ ml}} = 7 \%. \quad (22.2)$$

23 A feladat szövegéből következtethetünk arra, hogy a rönk a lejtővel együtt a vízszinteshez képest α szöggel döntött. Az $M \cdot g$ súlyerő függőlegesen lefelé hat a rönk középpontjánál, Máté a rönk felső végén a felszínére merőleges F_M erőt fejt ki, Jakab pedig az alsó végén hat egy F_K erővel, amely felbontható egy vízszintes F_{Kx} és egy függőleges F_{Ky} komponensre.



Ábra 23.1: A Máté és Jakab által a farönkre kifejtett erők lebontása

Egyensúlyi helyzetben felírhatjuk, hogy

- a függőleges irányú erőkre $Mg = F_M \cos \alpha + F_{Ky}$;
- a vízszintes irányú erőkre $F_M \sin \alpha = F_{Kx}$;
- az erők alsó végpontra vett nyomatékaira $Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = F_M L$.

Ezt a egyenletrendszert megoldva pedig azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} F_M &= \frac{1}{2} M g \cos \alpha, \\ F_{Kx} &= \frac{1}{2} M g \sin \alpha \cos \alpha, \\ F_{Ky} &= \frac{1}{2} M g + \frac{1}{2} M g \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (23.1)$$

A Jakab által kifejtett erő

$$F_K = \sqrt{F_{Kx}^2 + F_{Ky}^2} = \frac{1}{2} M g \sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}, \quad (23.2)$$

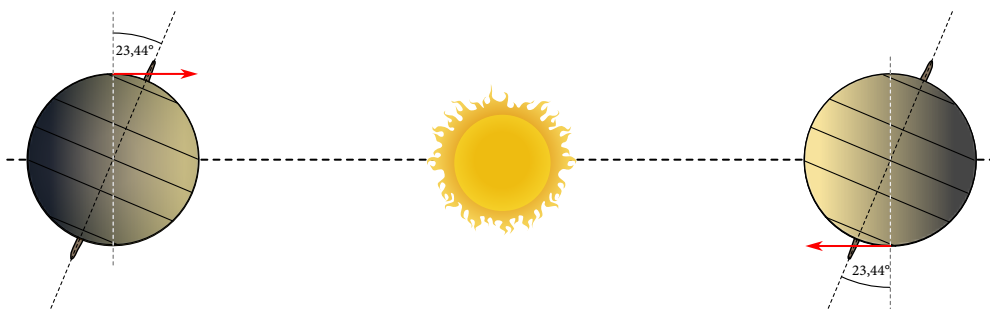
és végül a keresett erőarány

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}}. \quad (23.3)$$

24 Nem kell a hosszúsági körökkel foglalkoznunk: egy nap sokkal rövidebb, mint egy év, és a Nap helyzete sokkal gyorsabban változik kelet-nyugati irányban, mint észak-déli irányban. Ezért egyetlen nap során a Nap földrajzi szélességét állandónak tekinthetjük, és elég, ha a szélességet nézzük.

A Föld tengelyének dőlése határozza meg, hogy a Nap mennyire északra vagy délre térhet el az év folyamán. Ezeket a párhuzamosokat nevezzük Ráktérítőnek (júniusi napforduló) és Baktérítőnek (decemberi napforduló). Ugyanakkor decemberben, amikor a Nap a legtávolabb van délen, az északi sarkvidék egyáltalán nem látja a Napot. A legdélebbi párhuzamos, ahol ez előfordulhat, az északi sarkkör. Ugyanez történik a déli féltekén is, csak fordítva, és hat hónappal később. A trópusi övek szélessége $\varepsilon_{\oplus} = \pm 23,44^\circ$, a sarkkörök szélessége pedig $\pm(90^\circ - \varepsilon_{\oplus}) \approx \pm 66,56^\circ$.

Az egész helyzet látható a 24.1 ábrán.



Ábra 24.1: A Föld és a Nap viszonya a júniusi és decemberi napfordulók idején

Ezek a körök a Föld felszínét öt régióra osztják, ahol a Nap helyzete az égen az év folyamán eltérően viselkedik:

- A déli sarkvidéken legalább egyszer egy évben van egy poláris nap, amikor a Nap egyáltalán nem nyugszik. Amikor a horizont felett kering, szükségszerűen keresztezi az északi irányt.

- A Baktérítő és a déli sarkkör között minden nap láthatjuk a Napot északon, függetlenül az évszaktól, a nap delelésének idején.
- A trópusi övezetben, azaz a Ráktérítő és Baktérítő között, a Nap a nap delelésének idején északon vagy délen lehet, az évszaktól függően. A júniusi napforduló érdekel bennünket, amikor a Nap a legészakibb helyzetét éri el, és így délben északon lesz látható.
- Az északi mérsékelt övezetben, azaz a Ráktérítő és az északi sarkkör között, a Napot a nap delelésének idején csak délen látjuk. Éjfélkor északon található, de a horizont alatt, így nem látható.
- Végül, az északi sarkkörön belül a júniusi napforduló idején a Nap egyáltalán nem nyugszik. Ismét, amikor kering, szükségszerűen keresztezi az északi irányt, de ez nem délben, hanem éjfélkor történik. Az egyetlen kivétel az Északi-sark maga, ahol minden irány „dél”; azonban ez csak egyetlen pont, és nem járul hozzá a területhez.



Ábra 24.2: A Föld azokon a területeken, ahol a Nap látható északon

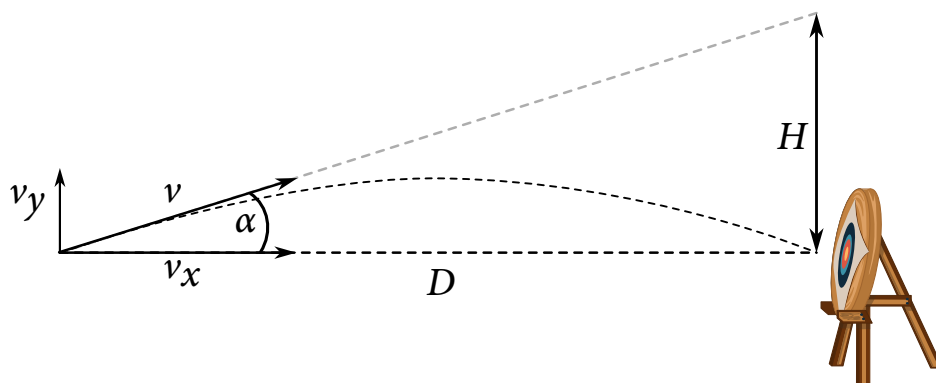
Marad a számítás: össze kell adnunk a Ráktérítő déli részén található összes régió területét $S_{\downarrow}$ és az északi sarkkörtől északra található területet $S_{\uparrow}$, amelyek a 24.2 ábrán láthatók. Ezt például a gömbszelet felszínének képletével számíthatjuk ki. Ehhez mindkét terület magasságára szükség van: a sarki gömbszeletnél $h_{\uparrow} = R(1 - \cos \varepsilon)$, a Ráktérítő déli részén $h_{\downarrow} = R(1 + \sin \varepsilon)$. Így együtt

$$S = S_{\downarrow} + S_{\uparrow} = 2\pi R h_{\downarrow} + 2\pi R h_{\uparrow} = 2\pi R(h_{\downarrow} + h_{\uparrow}) = 2\pi R^2(1 - \cos \varepsilon + 1 + \sin \varepsilon) = 2\pi R^2(2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon), \quad (24.1)$$

és mivel az egész Föld $S_{\oplus}$ felszínéhez viszonyított arány érdekel bennünket, az eredmény:

$$\frac{S}{S_{\oplus}} = \frac{2\pi R^2(2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon)}{4\pi R^2} = \frac{2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon}{2} \doteq 0,74 = 74 \%. \quad (24.2)$$

25 Dani jó íjászként gondol arra, hogy hova kell céloznia. Tudja a céltábla távolságát $d = 70$ m és a nyíl kezdősebességét $v_0 = 50$ m/s. Ahhoz, hogy tudja hova célozzon, ábrát készít a rendszerről lövés előtt.



Ábra 25.1: Célra lövés

Először is észreveszi, hogy a céltábla közepéhez képest H -val magasabbra céloz, amit az alábbi összefüggéssel tud kifejezni:

$$\tan \alpha = \frac{H}{D}. \quad (25.1)$$

Ezután csak $\tan \alpha$ kifejezése marad hátra, ami megjelenik a kezdősebesség x és y irányú komponensekre való bontásakor

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \quad (25.2)$$

y irányban csak a gravitáció hat a nyíllra, így ebben az irányban

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (25.3)$$

ahol a nyíl becsapódásának helye érdekel minket, ami $y = 0$. Ez a

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v \sin \alpha}{g} \quad (25.4)$$

időpontban következik be.

Ezzel szemben x irányban nem hat erő, ezért az alábbi összefüggés áll fenn a t idő és D távolságok között:

$$D = v_x t = v \cos \alpha \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.5)$$

Mivel H és D hányadosa a szög tangense, így trigonometrikus összefüggéseket használhatunk:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}. \quad (25.6)$$

Behelyettesítve a távolság képletébe

$$D = \frac{2v^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}. \quad (25.7)$$

Behelyettesítjük a H/D hányadost $\tan \alpha$ helyére a 25.1 egyenlet alapján, majd átalakítás után másodfokú egyenletet kapunk:

$$H^2 - \frac{2v^2}{g}H + D^2 = 0, \quad (25.8)$$

aminek a megoldása⁷

$$H = \frac{v^2}{g} - \sqrt{\frac{v^4}{g^2} - D^2} \approx 10 \text{ m}. \quad (25.9)$$

26 Kezdjük a dolgot a korty-böfentés-pislantás mértékegységrendszer definiáló mértékegységeinek meghatározásával. Tudjuk, hogy

$$V = 1 \text{ korty} = \frac{1 \text{ pt}}{20} \approx \frac{473 \text{ ml}}{20} = 23,65 \text{ ml}, \quad (26.1)$$

és $t = 1 \text{ pislantás} = 0,5 \text{ s}$. A hangintenzitás meghatározása kicsit nehezebb. Legyen I az 1 böfentés-es hangintenzitás. Tudjuk, hogy ez a 100 dB-es, azaz 10 B-es hangintenzitásként lett definiálva. A hangintenzitás definíciója alapján $L = \log \frac{I}{I_0}$, ahol $I_0 = 1 \text{ pW/m}^2$, írhatjuk, hogy $10 \text{ B} = \log \frac{I}{I_0}$, ahonnan

$$I = 10^{10} I_0 = 10^{10} \cdot 1 \text{ pW/m}^2 = 10^{-2} \text{ W/m}^2. \quad (26.2)$$

Most kombinálnunk kell a V , t és I mennyiségeket, hogy valami kg dimenziójút kapjunk. Tehát egy $m = V^\alpha \cdot t^\beta \cdot I^\gamma$ alakú kifejezést keresünk. Igaznak kell lennie, hogy $[V]^\alpha \cdot [t]^\beta \cdot [I]^\gamma = [m]$, ahol $[A]$ az A mennyiség dimenziója (mértékegysége). Azt kapjuk, hogy

$$[m] = (\text{m}^3)^\alpha \cdot \text{s}^\beta \cdot (\text{kg/s}^3)^\gamma = \text{m}^{3\alpha} \cdot \text{kg}^\gamma \cdot \text{s}^{\beta-3\gamma} \stackrel{!}{=} \text{m}^0 \cdot \text{kg}^1 \cdot \text{s}^0. \quad (26.3)$$

Innen azonnal láthatjuk, hogy $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ és $\beta = 3$, tehát

$$m = t^3 I = (0,5 \text{ s})^3 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2 = \frac{1}{800} \text{ kg} = 1,25 \text{ g}. \quad (26.4)$$

És most már semmi sem állíthat meg minket abban, hogy megadjuk John tömegét a természetes mértékegységrendszerében:

$$M = 200 \text{ lb} \approx 90\,718 \text{ g} = 72\,575 \text{ böfentés} \cdot \text{pislantás}^3. \quad (26.5)$$

27 A legnagyobb nyomás a nagy tartályban úgy érhető el, ha fokozatosan mind az öt kisebb tartályt egymás után csatlakoztatjuk hozzá, mert maximalizálni kell a nagy tartály és a kis, éppen kapcsolt tartály közötti nyomáskülönbséget – ekkor adódik át a legtöbb gáz a kisebb tartályból a nagyba. Nézzük meg az esetet, ha a nitrogénzállítónak csak két kis tartálya van, jelöljük ezeket 1-gyel és 2-vel. A normál eljárás az, hogy a

⁷A kisebb gyököt választjuk.

kis 1-es, utána 2-es palackot egymás után kapcsoljuk a nagy tartályhoz. Ez p_1 és p_2 nyomásokat hagy a kis palackokban, míg a nagy tartályban p_2 lesz.

Egy alternatív eljárás, ha előbb összekapcsoljuk a kis 1-es tartályt a naggyal, utána az 1-es és 2-es tartályokat összekapcsolva kiegyenlítjük közöttük a nyomást, majd ezután sorra csatlakoztatjuk őket a nagy tartályhoz. Ilyenkor a kis tartályokat többször kapcsoljuk a nagyhoz, és az 1-es kis tartályban a nyomás p'_1 lesz, ami nagyobb, mint az előző p_1 , ezért a nagy tartályban (és a 2-es kis tartályban) keletkező p'_2 kisebb lesz, mint a korábbi p_2 . Tehát nem érdemes kiegyenlíteni a nyomásokat a kis tartályok között.

Az ideális gáz állapotegyenletéből tudjuk, hogy a gáz anyagmennyisége mind a kis, mind a nagy tartályban a csatlakoztatás előtt az $n = \frac{pV}{RT}$ egyenletből adódik. Tudjuk, hogy a csatlakozás előtti és utáni összes n anyagmennyiség meg kell egyeznie, azaz a nagy és a kis palackban lévő n összege a csatlakoztatás előtt ugyanannyi lesz, mint a teljes n a csatlakoztatás után. s indexszel a kis palackokra, l -lel pedig a nagy tartályra vonatkozó mennyiségeket jelölve, a csatlakozás utáni állapotot pedig t -vel jelölve, felírhatjuk:

$$\frac{p_l V_l}{RT} + \frac{p_s V_s}{RT} = \frac{p_t V_t}{RT}. \quad (27.1)$$

Mivel a hőmérséklet és az R egyetemes gázállandó végig állandó marad, a csatlakozás utáni (kiegyenlített) nyomást kifejezhetjük mint

$$p_t = \frac{p_l V_l + p_s V_s}{V_t}. \quad (27.2)$$

Mielőtt az első kis palackot csatlakoztatnánk, a nagy tartály nyomása nulla, de minden egyes csatlakoztatás után növekszik – és az új eredő nyomás természetesen attól függ, milyen volt a nagy tartály nyomása az adott csatlakoztatás előtt.

Tehát ötször számoljuk ki p_t -t; először p_l helyére nullát írunk, majd minden további lépésben a legutóbb kapott p_t -t használjuk kezdőértékként. Az utolsó, ötödik p_t pontosan $\frac{23255}{7776}$ MPa, azaz körülbelül 3 MPa.

28 A lemeznek a következő szögsebességgel kell forognia:

$$\omega = \frac{100}{3} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{9} \pi \text{ rad/s}.$$

Az ehhez szükséges forgási energia tehát $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$. A tömör korong tehetetlenségi nyomatéka alapján a lemezre és a tálcára összességében $J = \frac{1}{2} (m + M) r^2$, ahol r a henger sugara. J -t behelyettesítve az energia felírható

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} (m + M) r^2 \omega^2 \quad (28.1)$$

alakban.

Mivel tudjuk, hogy mennyi feszültségre és áramra van szüksége a lejátshónak, illetve, hogy a teljesítmény, amit szolgáltatunk neki, $P = UI$, az idő megismeréséhez elegendő a szükséges energiát a teljesítménnyel elosztani:

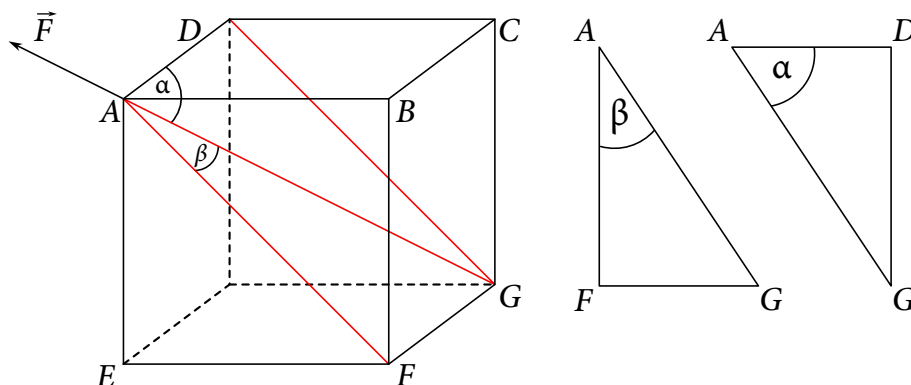
$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{P} = \frac{\frac{1}{4} (m + M) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2}{UI} = \frac{(200 \text{ g} + 2 \text{ kg}) \cdot (15 \text{ cm})^2 \cdot \left(\frac{10}{9} \pi \text{ rad/s}\right)^2}{4 \cdot 5 \text{ V} \cdot 100 \text{ mA}} \approx 0,302 \text{ s}. \quad (28.2)$$

29 Mielőtt elkezdenénk számolni, le kell fordítanunk a problémát valami érthető nyelvre. Amint megértettük, hogy mi a feladat, neki is állhatunk.

Hogy az egész rendszer egyensúlyban legyen, minden töltésre ható erők eredőjének 0-nak kell lennie. A szimmetriának köszönhetően elég a kocka egyetlen csúcsát és az ott nyugvó töltést vizsgálnunk. Az erre ható erők közül a középső az egyetlen, ami vonzó, ennek a nagyságát szeretnénk meghatározni; a többi töltés taszító erővel hat rá – három töltés egy élhossznyi távolságban, három töltés egy lapátló távolságban és egy töltés testátló távolságban. Jelöljük a kocka élhosszát a -val. A lapátló hossza ekkor $\sqrt{2}a$, a testátlóé pedig $\sqrt{3}a$.

Minden, a kiválasztott csúcsban nyugvó töltésre ható erő felbontható két komponensre - egy az eredő erő irányában, azaz a testátló mentén, egy pedig arra merőlegesen. A merőleges komponensek a szimmetria miatt kiejtik egymást, a testátlómentiek pedig összeadódnak. Tehát kell nekünk a testátló és a kockaél bezárta szögnek és a testátló és a lapátló bezárta szögnek a koszinusza.

Itt most állj le az olvasással, ez egy kötelező vibe-check.



Ábra 29.1: Skibidikocka

OK, átmertél a vibe-checken. Következőnek számoljuk ki a kockaélnyi távolságra levő töltésekből származó erők eredőjét. E szög koszinusza az ADG derékszögű háromszögből számolható, így:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (29.1)$$

Az erő tehát

$$F_{\text{él}} = -k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2}. \quad (29.2)$$

Ezután nézzük meg a lapátlónyi távolságban fekvő töltésekből adódó erőt. Az ehhez szükséges szög koszinusza az AFG derékszögű háromszög alapján

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad (29.3)$$

Az erő tehát így

$$F_{\text{lap}} = -k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2}. \quad (29.4)$$

A testátló távolságban levő töltés erejéhez pedig nem kell semmilyen szög, az csak simán

$$F_{\text{test}} = -k \frac{q^2}{3a^2}. \quad (29.5)$$

Végül, de nem utolsósorban, a középső töltés vonzóereje is kell. Itt ugyanaz a helyzet, mint a testátlónál, csak a távolság feleakkora. Az erő tehát

$$F_{\text{cent}} = 4k \frac{qQ}{3a^2}. \quad (29.6)$$

Az eredő erő az alábbi:

$$F = F_{\text{cent}} - 3F_{\text{él}} - 3F_{\text{lap}} - F_{\text{test}} = 0. \quad (29.7)$$

Behelyettesítve a kapott kifejezéseket pedig ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} 4k \frac{qQ}{3a^2} &= -3k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2} - 3k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2} - k \frac{q^2}{3a^2}, \\ 4 \frac{Q}{3} &= -3 \frac{q}{\sqrt{3}} - 3 \frac{\sqrt{2}q}{2\sqrt{3}} + \frac{q}{3}, \\ Q &= -\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} q. \end{aligned} \quad (29.8)$$

A középben nyugvó töltés töltése tehát $Q \doteq -2,47 \text{ C}$ kell legyen. GG EZ.

30 Írjuk fel a ferde hajítást leíró egyenleteket:

$$\begin{aligned} y &= v \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}at^2, \\ x &= v \cos(\alpha)t. \end{aligned} \quad (30.1)$$

A Holdon ezek az egyenletek ugyanúgy érvényesek, csupán a gravitációs gyorsulás értéke más: ha behelyettesítjük $a = 0,16g$ -t, akkor

$$\begin{aligned} y_{\text{G}} &= v_{\text{G}} \sin(\alpha)t_{\text{G}} - \frac{1}{2}0,16gt_{\text{G}}^2, \\ x_{\text{G}} &= v_{\text{G}} \cos(\alpha)t_{\text{G}}. \end{aligned} \quad (30.2)$$

A videón a tárgy pozícióját nem tudjuk meghamisítani. Ahhoz, hogy az x -re és y -ra vonatkozó egyenletek azonosak maradjanak, az időt és a sebességet kell módosítani. Tudjuk, hogy

$$0,16t_{\zeta}^2 = t_{\oplus}^2 \Rightarrow t_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{0,16}}t_{\oplus} = \frac{1}{0,4}t_{\oplus} = 2,5t_{\oplus}. \quad (30.3)$$

Az x_{ζ} egyenletből pedig láthatjuk, hogy

$$x_{\zeta} = v_{\zeta} \cos(\alpha) 2,5t_{\oplus}, \quad (30.4)$$

vagyis ahhoz, hogy az egyenlet 30.4 megegyezzen az x kifejezésével a 30.1 egyenletben, $v_{\zeta} = 0,4v_0$ kell legyen. A Holdon tehát ez az egész ferde hajítás 2,5-szer hosszabb ideig tartana, ami azt jelenti, hogy a földi videót ugyanennyivel kisebb képkockasebességgel kell lejátszani, vagyis 24 Hz-sel.

Ez pedig azt jelenti, hogy egyszerűen a televíziós képkockasebességről a filmes sebességre váltunk.

Véletlen? Aligha.

31 Tekintsük a hőszivattyút egy olyan hőerőgépként, amely elektromos hálózatról nyeri az energiát, és hőt szállít Ádám pincéjéből Juszina nagymama pincéjébe! A feladat megoldásának kulcsa annak megértése, hogyan definiáljuk a hatásfokot.

Általánosságban a hatásfok a „mit akarunk elérni” és a „mit kell befektetnünk érte” arányaként írható le. Juszina mama esetében amit el akarunk érni, az az a hőmennyiség, amit a hőszivattyú a pincéjébe juttat, vagyis Q_{le} . Amit be kell fektetnünk az a hálózathoz származó elektromos energia, ami egyenlő a hőszivattyú munkaközegén végzett W munkával. Ezért az általa megfigyelt hatásfokra igaz kell, hogy legyen: $\eta_J = \frac{Q_{le}}{W} = 1500 \%$.

Ádám esetében amit el akarunk érni, az az a hőmennyiség, amit a hőszivattyú elszív az ő pincéjéből, Q_{fel} , és amit be kell fektetnünk, az pedig - úgy, mint Juszina mama esetében - a hálózathoz származó elektromos energia, W . Így az ő általa megfigyelt hatásfok: $\eta_A = \frac{Q_{fel}}{W}$.

A hőszivattyú tehát Ádám pincéjéből Q_{fel} hőt von el, ehhez W energiát kap a hálózathoz, és Q_{le} hőt ad le Juszina nagymama pincéjébe. A hőszivattyú energiamérlege ennél fogva $Q_{fel} + W = Q_{le}$.

Ezt a kapcsolatot felhasználva az Ádám által megfigyelt hatásfok kifejezhető: $\eta_A = \frac{Q_{le}-W}{W} = \eta_J - 1 = 1400 \%$.

32 Vizsgáljuk a vázolt problémát az energia szempontjából! Adott nap elején a Nemzetközi Űrállomás (ISS) összes energiája a mozgási és helyzeti energiájának összege. Egy napnyi keringés után, mely során közegellenállást tapasztal, az ISS energiája csökken, mivel a közegellenállási erő a mozgás irányával ellentétes.

Jelöljük a kezdeti és a végállapot energiát rendre 1-gyel és 2-vel! Az energia megmaradás törvényéből következik, hogy

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} + W, \quad (32.1)$$

ahol E_p potenciális (helyzeti), E_k kinetikus (mozgási) energiákat takar, W pedig a közegellenállás által az ISS-en végzett munka.

Az ISS a Föld körül kör alakú pályán kering, tehát kerületi sebességét egyszerűen kifejezhetjük a gravitációs és a centripetális erők egyenlőségét felhasználva. Számunkra előnyös a sebesség négyzetét kifejezni⁸:

$$v^2 = \frac{GM_{\oplus}}{r}, \quad (32.2)$$

ahol $M_{\oplus}$ a Föld tömege, $r = R_{\oplus} + 400$ km a távolság az ISS és a Föld középpontja között, és $R_{\oplus}$ így magától értetődően a Föld sugara. Jelöljük az űrállomás tömegét m -mel, és a napi magasság-változását Δr -rel! Most már átírhatjuk a fenti 32.1. egyenletet, mint:

$$-\frac{GM_{\oplus}m}{r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r} = -\frac{GM_{\oplus}m}{r - \Delta r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r} + W, \quad (32.3)$$

ahonnan kifejezzük a közegellenállási munkát:

$$W = \frac{GM_{\oplus}m}{2} \left(\frac{1}{r - \Delta r} - \frac{1}{r} \right). \quad (32.4)$$

A közegellenállási erő az ISS mozgása ellen dolgozik, tehát s út megtétele után a légkör által végzett munka $W = Fs$. De mi is az ISS által egy nap alatt megtett út? Mivel Δr sokkal kisebb, mint a körpálya sugara, nem kell az ISS valódi spirálpályájának hosszát kiszámolnunk. Kellően pontos eredményre jutunk, ha feltesszük, hogy az állomás egész nap egy $r - \Delta r/2$ sugarú pályán kering az ennek a sugárnak megfelelő keringési sebességgel (ld. 32.2. egyenlet). Tehát

$$s = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r/2}} T, \quad (32.5)$$

ahol T egy nap hossza.

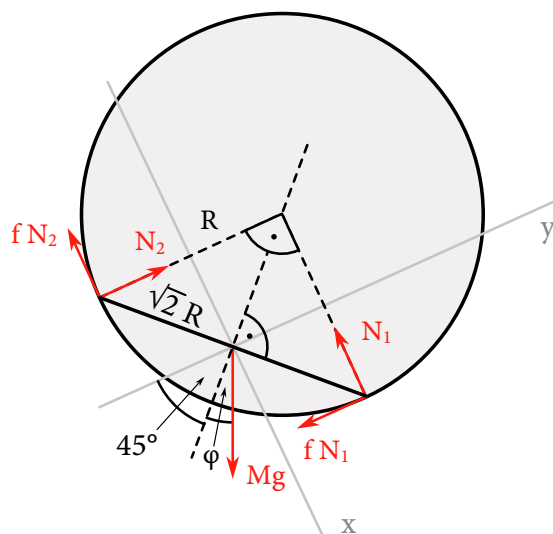
Ez után egyszerűen behelyettesítjük a fenti 32.4. és 32.5. egyenleteket az erő és munka közti összefüggésbe,

$$F = \frac{W}{s}, \quad (32.6)$$

és a megadott számokat beírva megkapjuk, hogy $F \doteq 0,26$ N.

33 Tekintsük a legnagyobb lehetséges szöggel elforgatott gurigát! Ebben a helyzetben az ISIC normálisa és a függőleges irány közötti szög legyen φ .

⁸Hiszen a mozgási energia képletébe fogjuk behelyettesíteni.



Ábra 33.1: Guriga az erőkkel

Az ISIC szélein N_1 és N_2 normálerők hatnak, merőlegesen a guriga felületére, így a guriga középpontjába mutatva. Tangenciális irányban súrlódási erők hatnak, melyek nagysága a határhelyzetben rendre $f N_1$ és $f N_2$. Az ISIC tömegéből származó Mg gravitációs erő függőlegesen lefelé hat az ISIC középpontjánál.

Az ISIC mérete olyan, hogy a normálerők hatásvonalalaival együtt derékszögű háromszöget alkotnak R hosszúságú befogókkal és $\sqrt{2}R$ átfogóval. Ez többek között azt jelenti, hogy N_1 és $f N_2$ ugyanabba az irányba mutat, azaz merőlegesen N_2 és $f N_1$ irányára. Ezért érdemes olyan koordinátarendszert választani, ahol a tengelyek ezekben az irányokban állnak, azaz az ISIC-hez képest 45° -kal elforgatva. Ekkor a gravitációs erő komponensekre bontható: $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ és $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$.

Most felírhatjuk a stabilitási feltételeket:

- Erőegyensúly az x irányban:

$$N_1 + f N_2 = Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right); \quad (33.1)$$

- Erőegyensúly az y irányban:

$$N_2 = f N_1 + Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right); \quad (33.2)$$

- Nyomatékegyensúly az ISIC középpontja körül:

$$N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = f N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (33.3)$$

amiből

$$N_1 = f N_1 + N_2 + f N_2. \quad (33.4)$$

A normálerők kiküszöbölésével

$$\underbrace{\frac{1+2f-f^2}{1-2f-f^2}}_K = \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}, \quad (33.5)$$

és innen

$$\tan\varphi = \frac{K-1}{K+1} = \frac{2f}{1-f^2}. \quad (33.6)$$

$f = 0,3$ esetén $\varphi \approx 33,4^\circ$ -ot kapunk.

34 A sík úton mozgó autó mozgásegyenletét

$$ma_- = fmg \Rightarrow f = \frac{a_-}{g}, \quad (34.1)$$

alakban írhatjuk.

Egy α hajlásszögű lejtőn ezt kissé módosítani kell:

$$ma = mg \sin\alpha + fmg \cos\alpha. \quad (34.2)$$

A fenti 34.1. egyenlethez képest a jobb oldalon plusz tag jelenik meg – az autó gyorsulását továbbra is a kerekek és az út közötti súrlódás okozza, de ez a lejtő meredekségének növelésével csökken, továbbá a mozgást befolyásolja a gravitációs erő lejtővel párhuzamos komponense is. Az így kapott gyorsulás:

$$a = g \sin\alpha + fg \cos\alpha. \quad (34.3)$$

Analitikus megoldás

A legkisebb gyorsulási időt úgy kapjuk, hogy maximalizáljuk a -t. Tehát a α szerinti deriváltját kell nullává tenni:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} &= g \cos\alpha - fg \sin\alpha \stackrel{!}{=} 0, \\ \cos\alpha &= f \sin\alpha, \\ \tan\alpha &= \frac{1}{f} = \frac{g}{a_-}. \end{aligned} \quad (34.4)$$

Trigonometrikus azonosságokat felhasználva (ld. 25.6. egyenlet) behelyettesítünk $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ helyére a gyorsulás 34.3. egyenletébe, végül pedig az imént kapott eredmény jobb oldalát $\tan\alpha$ helyett. Kis átrendezés után, a súrlódásra vonatkozó 34.1. összefüggés segítségével azt kapjuk, hogy a maximális gyorsulás:

$$a = \sqrt{a_-^2 + g^2}. \quad (34.5)$$

Most már csak meg kell határoznunk az autó gyorsulását sík úton, és kiszámolni a gyorsuláshoz szükséges időt a lejtőn. Tudjuk, hogy egyenletesen gyorsuló mozgásnál $v = at$, tehát

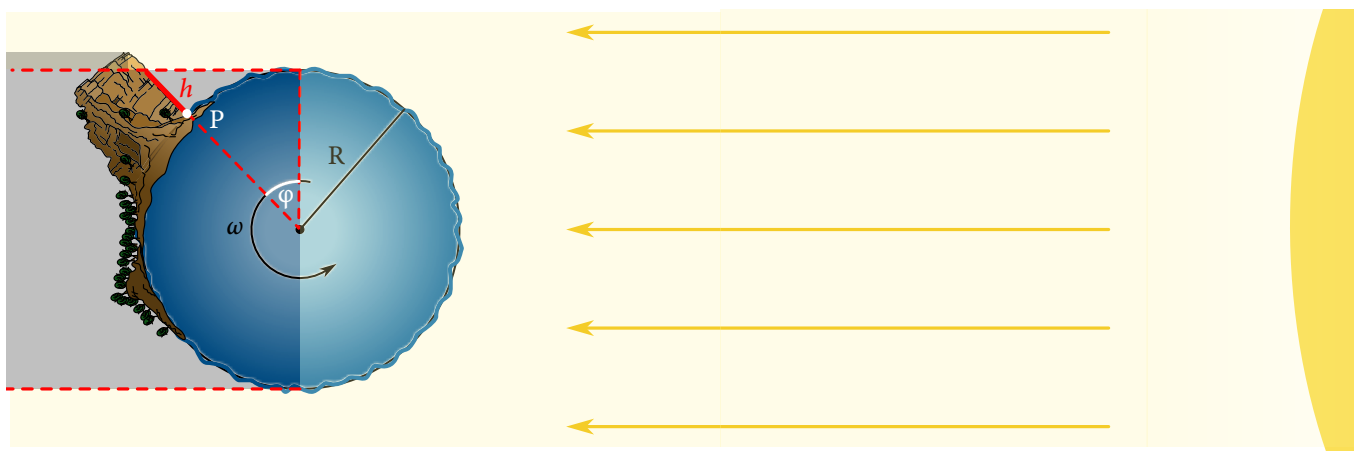
$$t = \frac{v}{\sqrt{a_{\perp}^2 + g^2}} = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{v}{t_{\perp}}\right)^2 + g^2}}, \quad (34.6)$$

ahol v a végsebesség, amelyre az autó gyorsul, és $t_{\perp}$ a gyorsuláshoz szükséges idő sík úton. Behelyettesítve az értékeket kapjuk, hogy $t \doteq 1,51$ s.

Numerikus megoldás

Ha nem szeretnénk deriválni, közvetlenül is kereshetjük az a maximumát a fenti 34.3. egyenlet alapján, például lineáris kereséssel az adott intervallumban egy számológéppel. Ha felrajzoljuk a függvényt ezen 34.3. egyenlet alapján, láthatjuk, egyértelműen csak egy maximuma van, ezért elég megtalálni az első csökkenést, majd szükség esetén finomítani a lépést. Ez ugyanazt a köztes eredményt adja: $\alpha \approx 0,595$ rad $\approx 34,1^\circ$, amelyből kiszámolhatjuk a gyorsulást és az időt.

35 Amikor távolról nézzük a Földet és annak árnyékát, az árnyék egy végtelen körhengernek tűnik.⁹ Minden rögzített pontra a Föld felszínén a Nap akkor nyugszik le, amikor a Föld forgása azt a pontot átviszi az árnyék határán.



Ábra 35.1: A Föld által vetett árnyék

És nemcsak a felszínen — ugyanez vonatkozik a sziklafal pontjaira is. Ha a szikla magassága elhanyagolható a Föld sugarához képest – aminek így kell lennie –, akkor tetszőleges h magasságban lévő pont esetén a Nap akkor nyugszik le, amikor a P pont az árnyék belsejében h -nyi mélységre kerül, azaz h távolságra a henger felszínétől. Az árnyék magassága tehát (egy nem túl magas szikla esetén) megegyezik P pont hengerfelszínétől mért merőleges távolságával.

⁹Tekintettel a véges méretekre és Naptól mért távolságra, valójában kúpot kapnánk, de ez számunkra nem lényeges.

Ennyi az egész. A P pont $R_{\oplus}$ sugárral bíró kör mentén mozog, állandó $\omega = \frac{2\pi}{1\text{ d}} = \frac{2\pi}{86\,400\text{ s}}$ szögsebességgel. E mozgás vetülete a Nap sugaraira merőleges síkra harmonikus mozgásként vetül le ugyanazzal a szögsebességgel, és a maximális kitérés közelében fellépő gyorsulása

$$a = \omega^2 R_{\oplus} \approx \left(\frac{2\pi}{86\,400\text{ s}} \right)^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6\text{ m} \doteq 0,034\text{ m/s}^2. \quad (35.1)$$

Favágó megoldás

Ugyanerre az eredményre erőből is eljuthatunk. Jelöljük a függőleges szikla és a terminátor közötti középponti szöget φ -vel. Ekkor arra a derékszögű háromszögre, amelyet ez a φ szög és az árnyék burkolója határoz meg, felírhatjuk, hogy

$$R_{\oplus} + h(\varphi) = \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.2)$$

Amikor a Föld $d\varphi$ szöggel elfordul, az árnyék által elért magasság

$$dh = \frac{R_{\oplus}}{\cos(\varphi + d\varphi)} - \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi} \quad (35.3)$$

-vel nő.

Egy alacsony szikla esetén a φ szög nagyon kicsi, így használhatjuk a közelítéseket $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ és $(1+x)^{-1} \approx 1 - x$. Ekkor

$$dh \approx R_{\oplus} \left[\frac{1}{1 - \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} \right] \approx R_{\oplus} \left[1 + \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2} - \left(1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \approx R_{\oplus} \varphi d\varphi. \quad (35.4)$$

Mivel a Föld állandó ω szögsebességgel forog, ezért $\varphi = \omega t$, és így

$$dh \approx R_{\oplus} \omega t \omega dt. \quad (35.5)$$

Ebből azonnal felírhatjuk az árnyék felfutásának sebességét a sziklafalon:

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \approx R_{\oplus} \omega^2 t, \quad (35.6)$$

és ebből felismerjük, hogy a mozgás egyenletesen gyorsuló, $a = \omega^2 R_{\oplus}$ gyorsulással.

36 Először is, Jakab elgondolkodott azon, hogy mit is jelent a természetes és dúsított urán aktivitása. Eszébe jutott az a képlet, amely összefüggésbe hozza a Δt idő után elbomlott atomok ΔN számát, és az adott időben lévő atomok N teljes számát.

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t, \quad (36.1)$$

ahol λ a bomlásállandó. Ebből az egyenletből az következik, hogy:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (36.2)$$

ami az exponenciális bomlás képlete, ahol N_0 az atomok száma a $t = 0$ időben.

Végül ki kell fejezzük a felezési időt, ami után az atomok fele elbomlik. Ez azt jelenti, hogy az atomok száma fele lesz az eredeti értéknek $N = \frac{N_0}{2}$, amit ha behelyettesít az exponenciális bomlás képletébe, megkapja a bomlásállandót.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (36.3)$$

A fenti tudást használva meg tudja határozni az aktivitást.

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N. \quad (36.4)$$

Ahhoz, hogy kiszámolhassa, mennyivel nagyobb a dúsított urán aktivitása a természetes uránénál, meg kell keresse az $\frac{A_{\text{dús}} - A_{\text{term}}}{A_{\text{term}}}$ arányt, ahol fel tudja használni a tudását a ^{235}U és ^{238}U atomok arányáról a két uránium fajtában, ezen felül tudja az izotópok felezési idejét is: $T_{1/2}^{235} = 7 \cdot 10^8$ a és $T_{1/2}^{238} = 4,46 \cdot 10^9$ a. A felezési időkből és az aktivitás képletéből meg tudja határozni, hogy a λ bomlásállandója a ^{235}U -nak k -szor nagyobb a ^{238}U -énál. Számszerűsítve:

$$k = \frac{T_{1/2}^{238}}{T_{1/2}^{235}} \doteq 6,371. \quad (36.5)$$

Ezután, ha elnevezi a ^{235}U arányát a -nak a dúsított uránban és b -nek a természetesben, megkapja a relatív aktivitás változást:

$$\frac{A_{\text{dús}} - A_{\text{term}}}{A_{\text{term}}} = \frac{k\lambda a N + \lambda(1-a)N}{k\lambda b N + \lambda(1-b)N} - 1 = \frac{(a-b)(k-1)}{1+b(k-1)} \doteq \frac{(0,03 - 0,0072) \cdot (6,371 - 1)}{1 + 0,0072 \cdot (6,371 - 1)} \doteq 11,8 \%. \quad (36.6)$$

37 Először is vegyük figyelembe, hogy ha a forgástengely merőleges az amulett síkjára, akkor az egyes kivágott négyzetek elforgatása nem befolyásolja az amulett tehetetlenségi nyomatékát. Az első kört, amelyből kivágunk egy négyzetet, nevezzük első iterációnak. Most, amikor egy másik kört rajzolunk be, és kivágjuk a berajzolt négyzetet, ezt nevezzük második iterációnak, és így tovább. A r sugarú kör tehetetlenségi nyomatéka $I_{\bigcirc} = \frac{1}{2}mr^2$, a négyzeté pedig $I_{\square} = \frac{1}{6}ma^2$, ahol a a négyzet oldala.

Nézzük meg a feladat első iterációját. Az első iteráció körének sugara $r_1 = r$, és egy beírt négyzetünk van, amelynek oldalhossza $a = \sqrt{2}r$, amit könnyen láthatunk. Tudjuk, hogy a négyzet átlója $2r$. A négyzet két szomszédos oldala és a kör középpontja által meghatározott derékszögű háromszögből látjuk, hogy:

$$\cos 45^\circ = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \sqrt{2}r. \quad (37.1)$$

Az első iteráció tehetetlenségi nyomatéka és területe a következő:

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \frac{1}{2}\sigma S_{\bigcirc}^{(1)}r_1^2 - \frac{1}{6}\sigma S_{\square}^{(1)}a_1^2 = \frac{1}{2}\pi\sigma r_1^4 - \frac{4}{6}\sigma r_1^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r_1^4 \\ S^{(1)} &= S_{\bigcirc}^{(1)} - S_{\square}^{(1)} = \pi r_1^2 - a_1^2 = (\pi - 2)r_1^2. \end{aligned} \quad (37.2)$$

A következő iterációk tehetetlenségi nyomatékát $I^{(n)}$ és területét $S^{(n)}$ hasonlóan számoljuk, csak különböző r_n értékek esetén. Már csak az $r_n = r_n(r, n)$ kapcsolatot kell meghatározni. Az első iterációban $r_1 = r$. A második iteráció az épp kivágott négyzetbe írt kör, ezért

$$2r_2 = a_1 \Rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}r. \quad (37.3)$$

Hasonlóképpen, a következőre is igaz

$$r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_2 = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad (37.4)$$

és így az általános r_n esetén:

$$r_n = \frac{\sqrt{2}}{2}r_{n-1} = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}. \quad (37.5)$$

Már csak a megjelenő végtelen sorozatot kell kiszámítani,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)} = (\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = r^2(\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} \\ &= r^2(\pi - 2) \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2r^2(\pi - 2), \end{aligned} \quad (37.6)$$

és a tehetetlenségi nyomatékokot:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r_n^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4n-4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r^4 \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r^4 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\frac{m}{S}r^4, \end{aligned} \quad (37.7)$$

ahol azt a tényt használtuk, hogy egy mértani sorozat összege, amelynek kvóciense $0 < q < 1$, az $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
Miután behelyettesítettük S -t I -be, a következő eredményt kapjuk

$$I = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}}{\pi - 2} mr^2 = \frac{3\pi - 4}{9\pi - 18} mr^2. \quad (37.8)$$

38 Kezdjük a parabola alakú város alakját leíró egyenlettel:

$$h(r) = kr^2, \quad (38.1)$$

ahol r a paraboloid felszínén lévő pont távolsága a forgástengelytől, vagyis a város középpontjától. Nem kell hozzáadnunk konstans tagot, mivel csak a magasságkülönbséget keressük.

A város legmagasabb pontjára teljesülnie kell annak, hogy:

$$H = kR^2, \quad (38.2)$$

ahol H a keresett magasság, és R pedig adott a feladatban.

Itt viszont a k együtthatót még nem ismerjük.

Ezt a parabola első deriváltjából tudjuk meghatározni a $[R; H]$ pontban.

Tudjuk, hogy az eredő (látszólagos) gravitációs erőnek merőlegesnek kell lennie a paraboloid felszínére.

A parabola képletének deriváltja a $[R; H]$ pontban $2kR$, ami a parabola érintőjének meredeksége.

Egy egyenes meredeksége $\tan \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ahol

$\Delta y = a_c$ és $\Delta x = g_\sigma$, tehát

$$2kR = \frac{a_c}{g_\sigma} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{a_c}{2g_\sigma R}. \quad (38.3)$$

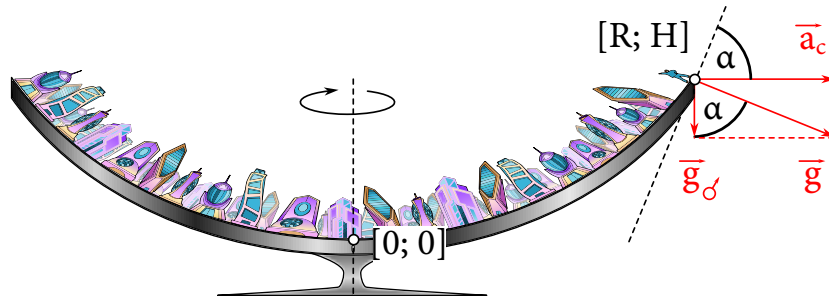
Ha k értékét behelyettesítjük a 38.2 egyenletbe, akkor

$$H = \frac{a_c R}{2g_\sigma}. \quad (38.4)$$

Most még ki kell fejeznünk a_c -t.

Ezt pedig a Pitagorasz-tétel segítségével meghatározva:

$$a_c = \sqrt{g^2 - g_\sigma^2}. \quad (38.5)$$

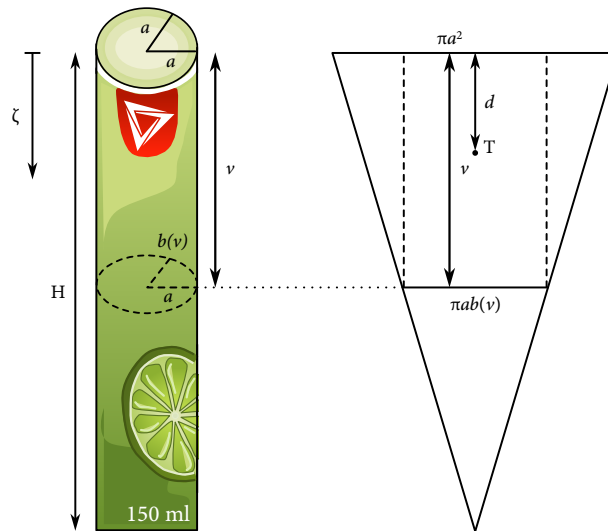


Ábra 38.1: A parabola alakú város függőleges metszete

A végeredmény tehát így:

$$H = \frac{R\sqrt{g^2 - g_{\sigma}^2}}{2g_{\sigma}} \doteq 1296 \text{ m.} \quad (38.6)$$

39 Jelöljük a nyalóka térfogatát V -vel! Alakja olyan, hogy bármely magasságban a keresztmetszete egy ellipszis, amelynek a fél nagytengelye állandó, a , és a fél kistengelye (b) lineárisan skálázódik a mélységgel, ahogyan az látható az alábbi ábrán: ábra 39.1.



Ábra 39.1: A nyalóka geometriája

Ha egy felülről induló, lefelé növekvő ζ koordinátát definiálunk, b úgy skálázódik, mint

$$b(\zeta) = \frac{H - \zeta}{H} a, \quad (39.1)$$

és a ζ mélységben lévő keresztmetszet területe

$$S(\zeta) = \pi ab(\zeta) = \pi a^2 \frac{H - \zeta}{H}. \quad (39.2)$$

Figyeljük meg, hogy a keresztmetszeti terület lineárisan csökken ζ -val! Ezért ennek a „deformált kúpnak” egy síkbeli analógiája egy háromszög, amely ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik. A tömegközéppont kiszámítása szempontjából a nyalóka egyenértékű egy olyan háromszöggel, amelynek alapja $\ell = S(0) = \pi a^2$ hosszú és azonos H magasságú. A háromszög területe megfelel a nyalóka V térfogatának, tehát

$$V = A = \frac{1}{2} \ell H = \frac{1}{2} \pi a^2 H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2V}{\pi a^2}. \quad (39.3)$$

Az esetet az után vizsgáljuk, hogy Gergő megette a nyalóka felét, tehát meg kell találnunk annak a résznek a magasságát, amelynek a térfogata az eredeti V térfogat fele. Jelöljük a nyalóka térfogatát a $[0; \zeta]$ -on belül $\Theta(\zeta)$ -ként! Ez egy trapéz területének felel meg, amelyet a háromszög alaptól való ζ távolságra történő csonkolásával kapunk:

$$\Theta(\zeta) = \frac{\pi a^2 + \pi ab(\zeta)}{2} \zeta = \pi a^2 \frac{1 + \frac{H-\zeta}{H}}{2} \zeta = \pi a^2 \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{2H}\right). \quad (39.4)$$

Amikor a térfogat az eredeti értékének felére csökken, akkor azt írhatjuk, hogy $\zeta = v$, és így $\Theta(v) \stackrel{!}{=} \frac{V}{2}$. Következésképpen

$$\frac{1}{2} \pi a^2 H = \pi a^2 v \left(1 - \frac{v}{2H}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} H, \quad (39.5)$$

tehát Gergőnek ennyire kell kitolnia a nyalókát a csomagolásából.

Mekkora munkára van ehhez szükség? A tömegközéppont v -vel felfelé mozdul el, ami ugyanaz, mintha minden elfogyasztott részt a tetejére vinnénk, majd eltávolítanánk — vagyis gyakorlatilag a hiányzó rész tömegközéppontját kell a tetejére juttatni. Ezért meg kell határoznunk, hol volt eredetileg a tömegközéppont.

Tegyük fel, hogy d mélységben volt! A kétdimenziós esetben ez megfelel a trapéz tömegközéppontjának helyének, ami egy egyszerű súlyozott átlaga egy téglalap és egy háromszög tömegközéppontjainak,

$$d = \frac{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v \cdot \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v \cdot \frac{v}{3}}{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} H. \quad (39.6)$$

A munka megegyezik a helyzeti energia megváltozásával, avagy

$$W = \frac{V}{2} \rho g d + \frac{V}{2} \rho g v = \frac{4 - \sqrt{2}}{6\pi} \frac{V^2}{a^2} \rho g \approx 76 \text{ mJ}. \quad (39.7)$$

40 Egy olyan test mozgását vizsgáljuk, amely s távolságon halad állandó a gyorsulással. Az út időben az $s = \frac{1}{2} at^2$, a sebesség pedig a $v = at$ összefüggés szerint nő. A két kifejezést kombinálva kapjuk:

$$v(s) = \sqrt{2as}. \quad (40.1)$$

Meg akarjuk határozni a pálya mentén mért átlagos sebességet, vagyis az átlagsebességet, de nem idő, hanem távolság szerint végezve az átlagolást. A $v(s) = \sqrt{2as}$ függvény monoton nő $v(0) = 0$ és $v(s) = \sqrt{2as} = v_{\max}$ között, alakja pedig egy félpárola, $y = \sqrt{x}$. A feladat a görbe átlagos magasságának meghatározása.

Ehhez meg kell határozni a görbe alatti területet. Ha tudunk integrálni, a feladat egyszerű, csak kiértékeljük a

$$\langle v \rangle_x = \frac{1}{s} \int_0^s \sqrt{2ax} \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as} \quad (40.2)$$

integrált.

Ha nem tudunk, vagy nem akarunk integrálni, használhatunk egy régi görög trükköt, amely *A parabola kvadrátúrája*¹⁰ című tanulmányban szerepel. (A modern változat elérhető a [Wikipédián](#).) Vágjuk le a görbe végeit összekötő egyenes alatti területet! A háromszög területe triviálisan kiszámolható, és a maradékot egy parabola és egy egyenes határolja. Nem nehéz belátni, hogy ennek a területnek a nagysága $\frac{4}{3}$ -szorosa annak a beírt háromszögének, amelynek harmadik csúcsa a szakasz felezőpontja. Ha ezt a háromszöget eltávolítjuk, két kisebb terület marad, ismét egyenessel és parabolával határolva, és így tovább, amiből egy $\frac{1}{4}$ kvóciensű mértani sorozatot kapunk. A kapott terület természetesen megegyezik az előző integrálás eredményével, lásd [40.2.](#) egyenlet.

Határozzuk meg Tom autójának tényleges átlagsebességét, vagyis az idő szerinti átlagot! Ez egyszerűen a teljes út és a teljes idő hányadosa¹¹

$$\langle v \rangle_t = \frac{s}{\sqrt{\frac{2s}{a}}} = \sqrt{\frac{as}{2}}. \quad (40.3)$$

A távolság szerinti átlagsebesség és az idő szerinti átlagsebesség aránya tehát:

$$\frac{\langle v \rangle_x}{\langle v \rangle_t} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as}}{\sqrt{\frac{as}{2}}} = \frac{4}{3}. \quad (40.4)$$

¹⁰Τετραγωνισμός παραβολῆς, Arkhimédész, Kr. e. 3. század

¹¹Vegyük észre, hogy ez a definíció összhangban van az előző átlagfogalommal. Az átlagsebesség:

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T at \, dt = \frac{\frac{1}{2}aT^2}{T} = \frac{s}{T}.$$

Válaszok

- 1

 0 cm
- 2

 v
- 3

 1 g és 5 g, Föld és Pluto
- 4

 400 ml/s
- 5

 $\frac{826 + 160\sqrt{2}}{343} \text{ s} \doteq 3,07 \text{ s}$
- 6

 72 s, szintén elfogadható 01:12.
- 7

 22:20
- 8

 100 %, a teljes szobát.
- 9

 5,47 km
- 10

 2,5 J, elfogadható az intervallumon belül 2,4 J – 2,5 J.
- 11

 $s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v} = \frac{v^2 t}{c - v} + vt$
- 12

 A-49
- 13

 $s \left(1 + \frac{v}{u} \right)$
- 14

 25,4°
- 15

 3,20 kN, szintén elfogadható 3,14 kN.
- 16

 $\sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s}$
- 17

 $\frac{1}{3}g$

18 18

19 $\left\{ \frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R \right\}$

20 N, H, A, B, Y, I, **ebben a sorrendben.**

21 56 mm²

22 7 %

23 $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{4 + \cot^2 \alpha}}$

24 74 %

25 10 m, *szintén elfogadható* 9,8 m.

26 72 575 böffentés · pislantás³

27 $\frac{23255}{7776} \text{ MPa} \doteq 3,0 \text{ MPa}$

28 0,302 s

29 $-\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} \text{ C} \doteq -2,47 \text{ C}$, *figyelj az előjelekre.*

30 24 Hz

31 1400 %

32 0,26 N

33 33,4°

34 1,51 s, *elfogadható az intervallumon belül* 1,51 s – 1,52 s.

35 34 mm/s²

36 11,8 %

37 $\frac{3\pi - 4}{9\pi - 18}mr^2 \doteq 0,528mr^2$

38 1296 m

39 76 mJ, *elfogadható az intervallumon belül* 76 mJ – 77 mJ.

40 $\frac{4}{3}$

A feladatok szerzői

Martin ,Kvík‘ Baláž
Šimon Borovský
Jakub Hluško
Lucia Kleščová

Katarína Magdolenová
Miroslav Pajger
Patrik ,pa3k‘ Rusnák
Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga
Jaroslav Valovčan
Soňa Vasiľová
Tomáš ,Mözög‘ Vörös

A képek alkotói

Katarína Nedelková

Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga

Szerkesztők

Martin ,Kvík‘ Baláž

Fordítás

Nagy Kadosa
Bárány Livia Blanka
Szerb Mátyás Tóbiás
Nyári Tamás

Pszota Máté
Koródi Nándor
Mihályfi Lilla
Kollmann Áron

Juhász Kamilla
Garai Luca
Mezősi Máté
Gyarmati Ágoston