

Droga Czytelniczko, Drogi Czytelniku,

Właśnie trzymasz w rękach książeczkę z zadaniami 28<sup>th</sup> konkursu Náboj Physics. Zawiera ona wszystkie zadania z fizyki, które pojawiły się w tegorocznej edycji konkursu, a także ich rozwiązania, z których można się sporo nauczyć. Jeżeli masz jakikolwiek problem z ich zrozumieniem, skontaktuj się z nami; chętnie je wyjaśnimy.

Nie byłoby tego zbioru, gdyby nie ogromna praca wielu osób zaangażowanych w organizację Náboj Physics. Wielu z nich to studenci Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Komeńskiego (Comenius University) w Bratysławie, a niektórzy z nich aktywnie uczestniczyli w organizacji korespondencyjnych seminariów z fizyki (FKS).

Náboj Physics kontynuuje swoją międzynarodową tradycję również w roku 2025. Chcielibyśmy podziękować za całą międzynarodową współpracę organizatorom lokalnym: Katarína Nedelková (Bratysława), Marián Kireš (Koszyce), Jakub Kliment (Praga), Lenka Plachtová (Ostrawa), Ágnes Kis-Tóth (Budapeszt), Urszula Goławska (Gdańsk), Andrzej Karbowski (Toruń), Maciej Matyka (Wrocław), José Francisco Romero García (Madrid), Dmytro Rzhemovskyi (Wiedeń), Vasyl Rizak (Użhorod) and João Rico (Lizbona). Wyniki tego międzynarodowego starcia możecie znaleźć na naszej stronie.

W imieniu całego zespołu organizatorów mamy nadzieję, że dobrze się bawiliście podczas rozgrywki Náboj Physics w 2025, i że zobaczymy się z Wami na Náboju w przyszłym roku. Zarówno z uczestnikami, jak i organizatorami.

Jaroslav Valovčan  
Chief organiser

Wyniki, treści archiwalne i inne informacje znajdziecie na stronie <https://physics.naboj.org/>.

# Problemy

**1** Ania lubi rozwiązywać Sudoku z niedzielnych gazet. Jednak nie są one dla niej wystarczającym wyzwaniem. Dlatego wymyśliła własną, unikalną modyfikację: wyobraża sobie, że każdy bok kwadratu siatki ma długość 1 cm, a masa każdego kwadratu wynosi dokładnie tyle gramów, ile cyfra w nim zapisana. Jaka będzie odległość między środkiem masy takiej siatki Sudoku, a jej geometrycznym środkiem po rozwiązaniu łamigłówki przez Anię?

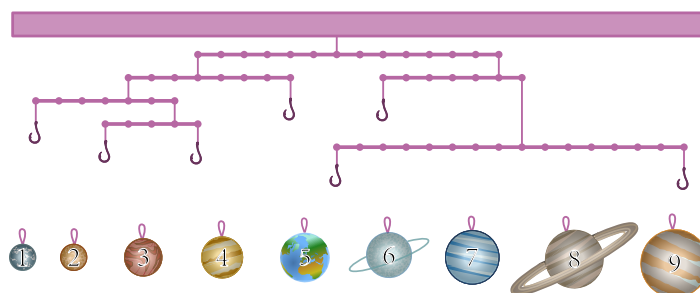
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 9 |   | 3 |   | 4 |   | 6 |
|   |   | 6 |   | 7 | 9 |   | 1 |   |
| 1 |   |   | 2 | 4 | 6 | 7 |   | 9 |
| 9 |   | 7 | 3 |   |   | 5 | 6 | 4 |
|   | 2 |   | 6 |   | 4 |   | 9 | 7 |
|   | 5 |   |   | 8 |   | 2 |   | 1 |
| 5 | 6 | 3 | 7 |   | 8 | 1 | 4 |   |
| 7 |   |   | 4 | 1 | 2 | 6 |   |   |
| 4 | 1 |   | 5 | 6 |   |   | 7 | 8 |

**2** Jakub siedzi w przedziale pociągu, ciesząc się podróżą z Gdańska do Warszawy. Jest odwrócony twarzą do kierunku jazdy, a w lustrze przymocowanym do przeciwległej ściany przedziału widzi odbicie słupka sygnałowego znajdującego się blisko torów.

Jaka jest pozorna prędkość z jaką obraz słupka zbliża się w lustrze do Jakuba, jeśli pociąg porusza się do przodu z prędkością  $v$ ?

**3** W dniu swoich zerowych urodzin mała Helena dostała karuzelę do kołyski. Nie była to zwykła karuzela, ale karuzela o tematyce astronomicznej: na kilku ramionach o różnej długości można zawiesić różne pluszowe planety. Jednak Marcin, dumny ojciec, pamiętał, że kiedyś było dziewięć planet i właśnie tyle zamówił przez Internet. Ich masy wynoszą od 1 do 9 g.

Marcin musi teraz zawiesić po jednej planecie na każdym ramieniu, aby cała karuzela była wyważona. Których planet **nie** wykorzysta?

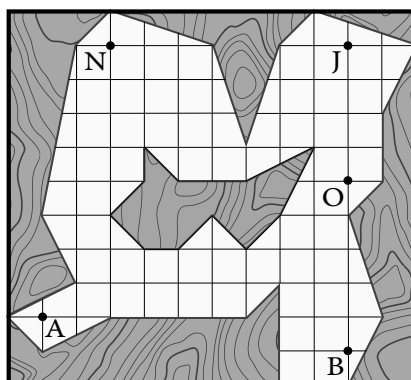


**4** Jan wybrał się na wakacje do pobliskiego kurortu o nazwie Warm Hill. Ku jego zaskoczeniu, Warm Hill nie było wzgórzem, ale jeziorem, a co więcej woda była zimna, więc postanowił wykąpać się w domu. W łazience znajdują się dwa krany: z ciepłą i zimną wodą.

Woda płynąca z pierwszego kranu ma temperaturę  $68\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Jan chciałby jednak, aby woda do kąpieli miała temperaturę  $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ , przy objętościowym natężeniu jej wypływu wynoszącym  $600\text{ ml/s}$ . Jakie powinno być objętościowe natężenie wypływu z kranu z zimną wodą, jeżeli jej temperatura wynosi  $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

**5** Nina (N), Adam (A), Barbara (B), Oliver (O) i Janka (J) stoją w ciemnej jaskini. Nina, liderka ekspedycji, chce dowiedzieć się, gdzie są pozostali. Krzyczy więc swoją literę „N”. Pół sekundy po tym, jak Adam ją słyszy, chłopak krzyczy „A”, Barbara robi to samo po usłyszeniu krzyku Adama i tak dalej, aż Nina usłyszy Jankę krzyczącą swoją literę. Po jakim czasie od swojego krzyku Nina usłyszy całe słowo „NABOJ” i będzie wiedziała, że nikt się nie zgubił?

*Bok kwadratu w siatce ma 10 metrów, a czas reakcji między uszami a ustami wszystkich członków ekspedycji jest taki sam, 0,5 s.*



**6** Piotr biega na bieżni. Odkąd ma smartwatcha, zawsze mierzy swoje średnie tempo. Podczas ostatniego treningu zauważył, że między ukończeniem trzeciego a ukończeniem czwartego okrążenia, jego średni czas okrążenia poprawił się o całe dwie sekundy, z  $01:20$  do  $01:18$ .

Ile czasu zajęło mu pokonanie czwartego okrążenia?

**7** Nowoczesne systemy nawigacji są wyposażone w różnego rodzaju funkcje. Na przykład, mogą nawet pokazywać prędkość, którą należy utrzymać, aby dotrzeć na czas. Marcin spieszy się na lotnisko i ustawił czas przyjazdu na  $22:00$ . O  $21:00$  nawigacja mówi mu, że powinien jechać z prędkością  $120\text{ km/h}$ , aby zdążyć. Ale do  $21:30$  szacunki nawigacji wzrosły do  $150\text{ km/h}$ .

Kiedy Marcin dotrze na lotnisko, jeśli będzie jechał ze stałą prędkością?

**8** Zosia kupiła nową szklaną lampę w kształcie pełnego sześcianu. Sześcián ma współczynnik załamania światła równy  $1,5$  i żarówkę w samym środku. Podekscytowana możliwością przetestowania lampy, Zosia umieściła ją na stojaku dokładnie na środku swojego pokoju. Jaką część pokoju Zosi oświetlała ta lampa?

**9** Podczas wymarzonej wycieczki po Japonii Szymon podróżuje pociągiem Shinkansen. Jego pociąg rusza ze stacji z przyspieszeniem  $2,6 \text{ km/h/s}$  i może osiągnąć maksymalną prędkość  $320 \text{ km/h}$ . W jakiej odległości od stacji pociąg Szymona osiągnie maksymalną prędkość?

**10** Weganka Lucy zabrała ze sobą w podróż awokado z zabawką w środku. Była jednak rozczarowana, ponieważ zabawka znów okazała się zwykłą drewnianą kulką o promieniu  $2 \text{ cm}$  i gęstości  $750 \text{ kg/m}^3$ . Dlatego po prostu wrzuciła ją do jeziora. Jednak wodnik Marek natychmiast ją zauważył i pociągnął kulkę na dno jeziora. Ile pracy wykonał nad kulką, jeśli jezioro ma głębokość  $30 \text{ m}$ ?

*Pomiń pracę niezbędną do zanurzenia części kulki bezpośrednio pod powierzchnią wody.*

**11** Motorniczy tramwaju Karol zbliża się swoim tramwajem do skrzyżowania z prędkością  $v$ . Nagle zauważa, że na skrzyżowaniu stoi samochód. By uniknąć kolizji, w akcie desperacji Karol dzwoni dzwonkiem. Liczy na to, że kiedy kierowca usłyszy dzwonek, to zjedzie z torów w czasie  $t$ .

W jakiej najmniejszej odległości od skrzyżowania Karol musi zadzwonić dzwonkiem, jeśli prędkość dźwięku wynosi  $c$ ?

**12** Piotr użył ogromnego arkusza papieru aby zapisać swoje notatki przed egzaminami końcowymi, tak aby mieć wszystko w jednym miejscu. Arkusz jest tak ogromny, że mógłby zakryć całą podłogę pokoju Piotra. Poczuł ulgę, ponieważ, gdyby pisał i pisał, napisałby tyle, że potrzebny papier byłby wystarczający, aby zakryć całą Ziemię. Jaki najmniejszy format papieru typu A mógłby pokryć całą Ziemię?

*Papier A0 ma powierzchnię  $1 \text{ m}^2$ . Możemy zrobić papier A1, przecinając papier A0 na pół wzdłuż krótszej krawędzi itd. Piotr może swobodnie przecinać papier podczas próby pokrycia Ziemi.*

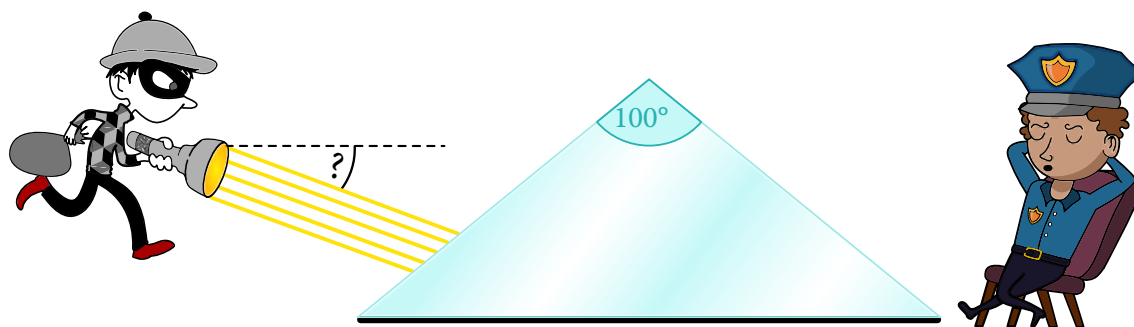
**13** Sabina uczestniczyła w pokazie lotniczym, podczas którego obserwowała samoloty z trybuny. Było jej dość zimno, ponieważ przez cały czas wiatr wiał jej w twarz z lewej strony z prędkością  $v$ . Najbardziej fascynowały ją samoloty akrobacyjne. Pod koniec pokazu jeden z nich przeleciał z prawej na lewą stronę przed trybuną z prędkością  $u$  względem ziemi. Podczas lotu przed trybuną wypuszczał kolorowy dym, który względem powietrza szybko się zatrzymywał.

Jak długa była smuga dymu, jeśli długość trybuny wynosiła  $s$ ?

**14** Władek włamywacz chce ukraść z muzeum trójkątny graniastosłup o współczynniku załamania światła  $2,4$ . Przekrój poprzeczny graniastosłupa jest trójkątem równoramiennym o kącie wierzchołkowym  $100^\circ$ , jak pokazano na rysunku. Włamywacz prawdopodobnie będzie musiał skierować na niego równoległą wiązkę światła, ale nie chce, aby strażnik muzeum znajdujący się po przeciwnej stronie graniastosłupa to zauważył. O ile co najmniej musi on pochylić latarkę w dół względem kierunku poziomego, aby żadne promienie nie przedostały się na drugą stronę graniastosłupa, niezależnie od tego, na którą część ścianki graniastosłupa skieruje światło?

*Dno pryzmatu jest idealnie czarne i pochłania wszystkie padające na nie promienie.*





**15** Karol urządza sobie domową siłownię. W tej chwili przenosi nową sztangę o masie 20 kg w górę do swojego mieszkania używając windy o masie 250 kg. Ponieważ Karol nie chodził jeszcze zbyt dużo na siłownię, waży on tylko 60 kg, a jego ramiona są tak wątłe, że możemy całkowicie pominąć ich masę. Pomimo tego, że winda porusza się ze stałą prędkością 4 m/s, Karol nie chce tracić czasu i od razu zaczyna podnosić ciężary.

Jak duża siła działa na linę podtrzymującą windę, gdy Karol przenosi hantle w dół z przyspieszeniem 5 m/s<sup>2</sup>?

**16** Jest wpół do czwartej nad ranem, a Szymon wyrzuca jajka przez okno, celując w niewidocznego puzonistę ukrytego gdzieś w cieniu. Kiedy rzuca jajko w górę, spada ono po czterech sekundach. Gdy rzuca je w dół z tą samą prędkością, wystarczą dwie sekundy.

Pytanie: Jak długo będzie spadało jajko, jeśli Szymon po prostu je upuści?

**17** Lucy szukała sposobu, żeby choć na chwilę zająć czymś swojego hałasliwego siostrzeńca. Kiedy zabawki, klocki, a nawet groźby z użyciem drewnianej łyżki nie przynosiły już skutku, wyciągnęła z szafki nieważką linkę i nieważki bloczek, po czym przywiązała ciężarki do końców linki – jeden o masie  $m$  a drugi o masie  $\frac{m}{2}$ . Przewiesiła linę przez bloczek i obserwowała, co się stanie. Siostrzeniec przez chwilę z zaciekawieniem patrzył, jak ciężarki zaczynają się poruszać, ale wkrótce uciekł z krzykiem, by narobić psot gdzie indziej. Jednak Lucy wciąż nurtowało jedno pytanie:

„Z jakim przyspieszeniem poruszają się te ciężarki?”

Pomóż Lucy znaleźć wyrażenie na przyspieszenie ciężarków.

**18** Proszę podać sumę liczb obok poprawnych stwierdzeń.

- 1 Ciało znajduje się na orbicie kołowej. Gdy jego prędkość wzrasta, okres orbitalny ulega skróceniu.
- 2 Gdy Ziemia na swojej orbicie zbliża się do Słońca, porusza się szybciej.
- 4 Zima występuje, ponieważ orbita Ziemi jest eliptyczna, a Ziemia znajduje się wówczas w najdalszym punkcie od Słońca.
- 8 Każdy satelita krążący wokół Ziemi po orbicie kołowej porusza się z tą samą prędkością.
- 16 Satelity mogą być geostacjonarne wyłącznie powyżej równika.

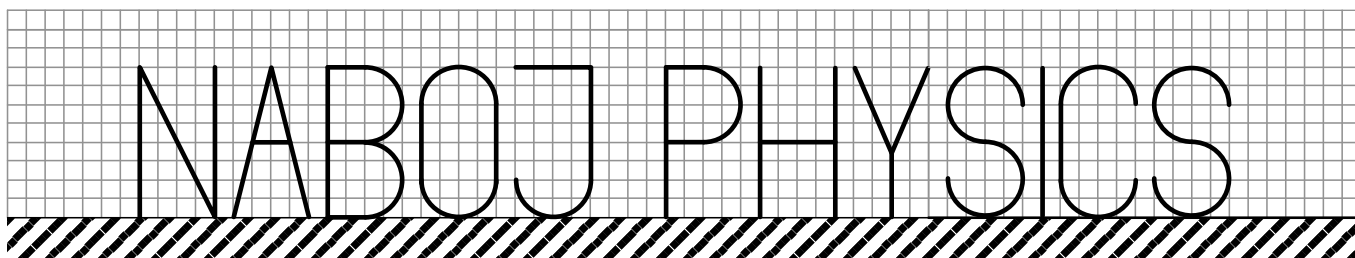
- 32 W układzie dwóch ciał, ciało lżejsze porusza się zawsze po trajektorii eliptycznej wokół wspólnego środka masy.

**19** Przy pomocy sześciu oporników o oporze elektrycznym  $R$  zbudowaliśmy czworościan foremny. Następnie do dwóch jego wierzchołków podłączyliśmy omomierz. Jaki całkowity opór wskaże omomierz, gdy z czworościanu usuniemy jedną krawędź?

**20** Potrzebujemy Waszej pomocy w uporządkowaniu liter z nazwy naszego konkursu według ich stabilności. Przez stabilność rozumiemy ilość pracy potrzebną do przewrócenia litery.

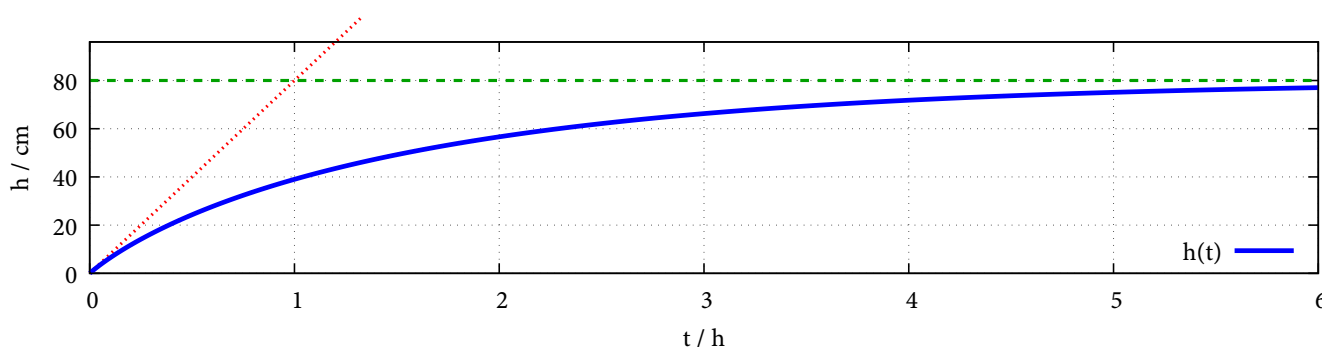
Litery składają się z jednorodnych prętów, które są proste lub mają kształt łuków okręgów, o stałej, ale niewielkiej grubości **niezerowej** i mają ostre krawędzie. Litery muszą pozostać w płaszczyźnie papieru.

Posortuj litery w kolejności **malejącej**. Litery, które nie znajdują się w stabilnej pozycji, **nie powinny być uwzględniane**.



**21** Ogrodnik Adam ma ogromny cylindryczny zbiornik na deszczówkę. Pole jego podstawy wynosi  $1 \text{ m}^2$ . Po długiej letniej suszy zbiornik był pusty, ale teraz zaczęło padać i zbiornik zaczął się ładnie napełniać.

W zbiorniku znajduje się czujnik poziomu wody, a Adam może obserwować wysokość słupa wody na swoim smartfonie. Na początku był zadowolony, ponieważ poziom wody wydawał się szybko rosnąć (patrz linia przerywana, która jest styczna do niebieskiej linii w punkcie  $t = 0$ ). Jednak po kilku godzinach stało się jasne, że zbiornik nigdy nie zostanie całkowicie napełniony, ponieważ tempo wzrostu poziomu wody spada do zera przy wysokości  $h_{\max} = 80 \text{ cm}$  (linia przerywana). Najwyraźniej w dnie zbiornika znajduje się dziura. Jakie jest pole przekroju tej dziury?



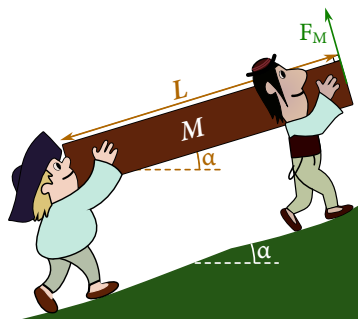
**22** Michał kupił litr truskawkowego napoju jogurtowego, w którym 10 % objętości stanowi jogurt (a 90 % objętości stanowi woda) i włożył je do lodówki. Jednak do rana napój rozdzielił się: na górze kartonu znajdowała się czysta woda, a stężenie jogurtu wzrastało liniowo w kierunku dna kartonu.

Rano Michał chciał wypić napój ze szklanki o pojemności około 400 ml, ale zapomniał wstrząsnąć kartonem. Zauważył to dopiero po nalaniu około 200 ml napoju. Następnie ponownie zamknął karton, potrząsnął nim gwałtownie i całkowicie napełnił szklankę. Jaki jest teraz stężenie jogurtu w szklance napoju Michała?



**23** Michał i Kuba niosą kłodę po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$ . Kłoda ma kształt długiego, cienkiego walca o długości  $L$  i masie  $M$ . Michał trzyma przód kłody, a Kuba jej tył. Michał nie daje z siebie wszystkiego: siła, z którą działa na kłodę, nie jest skierowana w górę, ale prostopadle do osi kłody. Jaki jest stosunek sił, którymi Michał i Kuba działają na kłodę?

*Michał i Kuba są tego samego wzrostu i niosą kłodę na takiej samej wysokości od płaszczyzny równi.*



**24** Na jakim ułamku powierzchni Ziemi można zobaczyć Słońce dokładnie na północy (na dowolnej wysokości nad horyzontem)?

*Założ, że Ziemia jest idealną kulą, a promienie słoneczne są równoległe. Pomiń refrakcję atmosferyczną i podobne efekty.*

**25** Jan przygotowuje się do mistrzostw świata w łucznictwie. Cel znajduje się w odległości 70 m i jest na tej samej wysokości co Jan. Jak wysoko nad środkiem celu powinien celować Jan, aby trafić w dziesiątkę, jeśli strzała opuszcza łuk Jana z prędkością 50 m/s?

*Teoretycznie istnieją dwa sposoby, aby to osiągnąć. W łucznictwie wyczynowym jednak strzała jest wystrzeliana prosto, więc podaj mniejsze z tych dwóch rozwiązań.*

**26** Podczas mierzenia czegokolwiek, Amerykanie używają absolutnie wszystkiego – byle nie jednostek SI. John Doe stworzył swój własny system miar, oparty na jednostkach łyk, beknięcie i mrugnięcie, zdefiniowanych w następujący sposób:

- 1 łyk to objętość, jaką potrafi przełknąć za jednym razem; John potrafi wypić jedną amerykańską pintę w 20 łykach;
- 1 beknięcie to intensywność dźwięku jego beknięcia która odpowiada poziomowi natężenia dźwięku 100 dB;
- 1 mrugnięcie to czas potrzebny na jedno mrugnięcie, a John potrafi mrugnąć dokładnie dwa razy na sekundę.

Jaka jest jego masa wyrażona w jego własnym systemie jednostek, jeśli w jednostkach amerykańskich wynosi ona 200 funtów?

*0 dB odpowiada strumieniowi mocy  $1 \text{ pW/m}^2$ .*

**27** Justyna musi uzupełnić w laboratorium zbiornik azotu o objętości 10 l. Jak zwykle, o wpół do czwartej rano przyjechał serwisant azotu. Przywiózł on swoim vanem pięć mniejszych zbiorników azotu 2 l, napełnionych do ciśnienia 5 MPa.

Przebieg pracy wygląda następująco: serwisant azotu łączy dwa zbiorniki zaworem. Następnie otwiera zawór, aby wyrównać ciśnienia w zbiornikach. Gdy temperatura azotu zrówna się z temperaturą zewnętrzną, zbiorniki zostają od siebie odłączone.

Jakie będzie maksymalne ciśnienie azotu w dużym zbiorniku?

**28** Historia lubi się powtarzać. W tym roku Patryk ponownie odkrył dziwny czarny dysk w szafce swojego dziadka. Zanim zdążył podać na niej sojowego burgera lub użyć jej zamiast frisbee, dziadek pokazał mu, że jeśli położyć ją na talerzu gramofonu, nacisnąć kilka przycisków i umieścić igłę w spiralnym rowku na zewnętrznej krawędzi płyty, z głośników, wśród złowieszczych trzasków i syku, zacznie płynąć prehistoryczna muzyka.

Tym razem Patryk chce wiedzieć w jakim czasie płyta rozpędzi się ze stanu spoczynku do swojej normalnej prędkości  $33\frac{1}{3}$  obrotów na minutę. Proszę założyć, że Patryk umieści igłę na płycie dopiero po osiągnięciu przez nią standardowej prędkości.

Płyta jest jednorodnym dyskiem o średnicy 30 cm i masie 200 g. Leży ona na talerzu o tej samej średnicy i masie 2 kg, który obraca się razem z płytą. Gramofon jest zasilany przez zasilacz AC/DC o napięciu wyjściowym 5 V i prądzie stałym 100 mA.

*Proszę pominąć wszelkie straty energii.*

**29** Rizzimus Prime bawił się naładowaną skibidi kostką. Ta kostka jest brat i ma po jednym ładunku  $q = 1 \text{ C}$  w każdym wierzchołku, slay. Rizzimus Prime zespawnował dziewięty ładunek, który zostawił do chillowania w środku sześcianu fr fr. Rizzimus Prime to lowkey sigma i nie traci punktów aury, więc wie dokładnie, jak duży musi być ten ładunek, aby żaden ładunek nie uciekł (totalny cringe i azbest) ani nie zderzył się ze środkiem sześcianu (womp womp). Very demure, very mindful.

Jaki to musi być ładunek?

#elektrostatyka #skibidi #nabój-fizyczny #fein

**30** Firma kosmiczna FKS ogłosiła wielki sukces – lądowanie na Księżycu. W rzeczywistości jednak nie mieli wystarczającego finansowania, więc nakręcili tylko film na Ziemi. I zrobili to zwykłym telefonem, którego kamera nagrywa z prędkością 60 Hz klatek na sekundę. Na początek próbowali nagrać ruch ciała (klucza do odkręcania śrub) rzuconego pod kątem.

Z jaką prędkością klatek na sekundę powinno być odtwarzane nagranie, aby wyglądało wiarygodnie? Przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu to 16 % wartości przyspieszenia na Ziemi.

**31** Ogrodnik Adam i babcia Justyna, słynna zielarka, są sąsiadami, a ich domy mają wspólną ścianę. Adam potrzebuje chłodnej piwnicy, aby jego warzywa nie psuły się i nie gniły, natomiast babcia Justyna potrzebuje ciepłej piwnicy, aby jej zioła dobrze wysychały.

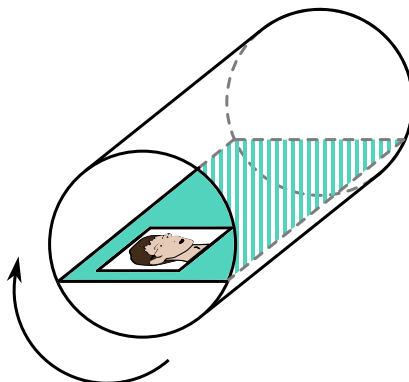
Dlatego zdecydowali się zainwestować w pompę ciepła. Pompa ciepła jest zasilana energią elektryczną i pobiera ciepło z piwnicy Adama do piwnicy babci Justyny. Oboje są bardzo zadowoleni z tego, jak ich inwestycja się opłaca. Babcia Justyna zauważa, że średnia sprawność pompy ciepła wynosi 1500 %.

Jaka jest średnia wydajność zaobserwowana przez Adama?

**32** Niedawno Staszek przeczytał o Międzynarodowej Stacji Kosmicznej. Dzięki temu wie, że jej masa wynosi 400 t, a orbituje ona wokół Ziemi po orbicie kołowej na wysokości 400 km nad powierzchnią. Pomimo tego, że znajduje się na niebiańskich wysokościach, nadal podlega sile oporu atmosferycznego, która powoduje, że każdego dnia zbliża się o około 100 m do powierzchni Ziemi.

Z jaką siłą atmosfera spowalnia Międzynarodową Stację Kosmiczną?

**33** Adam znów spędził dużo czasu w toalecie. Aby szybciej zabić czas, zaczął bawić się rolką papieru toaletowego. Wyjął swoją legitymację studencką ISIC (ang. International Student Identity Card) z portfela i umieścił ją wewnątrz rolki trzymanej poziomo, przy dolnej krawędzi. Następnie zaczął obracać rolkę. Jaki był maksymalny kąt, o jaki mógł obrócić rolkę, aby legitymacja ISIC nie zsunęła się w dół? Szerokość legitymacji ISIC jest  $\sqrt{2}$  razy większa niż promień rolki, a współczynnik tarcia między legitymacją a rolką wynosi 0,3.



**34** George często wspomina swoje dzieciństwo – czasy, gdy tęczę były jeszcze czarno-białe, kiedy nie było telefonów komórkowych, a on kolekcjonował karty z końmi. Na każdej karcie widniał między innymi czas, w którym dany koń przyspieszał od 0 km/h do 100 km/h na płaskiej powierzchni.

Dziś tęczę są kolorowe, George ma też smartfona i kolekcjonuje karty z nowoczesnymi samochodami. Na tej, którą ceni najbardziej, znajduje się Rimac Nevera, najszybszy samochód produkowany seryjnie. Jego silniki elektryczne mogą dostarczyć do 1888 hp i rozpędzić samochód do 100 km/h w 1,8 s. Czynnikiem ograniczającym, który uniemożliwia mu jeszcze szybsze przyspieszanie, nie jest niedostateczna moc, ale tarcie między kołami a drogą.

Jaki jest najkrótszy czas, jakiego potrzebuje Rimac Nevera, aby przyspieszyć od 0 do 100 km/h zjeżdżając ze wzgórza, jeśli silniki mogą zapewnić mu nieograniczoną moc, a my możemy wybrać dowolnie strome wzniesienie?

**35** Na zachodnim wybrzeżu pewnego kraju w tropikach znajduje się pionowa skalna ściana. Gdy Słońce zachodzi nad brzegiem, szczyt klifu jest wciąż oświetlony: Ziemia jest kulista, a horyzont jest dalej, gdy patrzymy ze szczytu klifu niż z plaży, więc Słońce można zobaczyć trochę dłużej.

Po zachodzie Słońca krawędź cienia wspina się po ścianie klifu z jednostajnie rosnącym przyspieszeniem. Jaka jest wartość tego przyspieszenia?

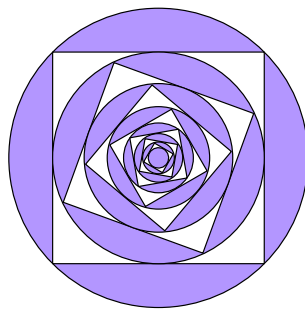
*Klif znajduje się dokładnie na równiku. Załóżmy, że jest to dzień równonocy wiosennej.*

**36** Jakub odwiedził lokalną elektrownię jądrową. Przewodnik opowiedział zwiedzającym wiele ciekawych faktów dotyczących działania elektrowni. Jakub dowiedział się na przykład, że naturalny uran zawiera 0,72 % izotopu  $^{235}\text{U}$ , a reszta to głównie  $^{238}\text{U}$  o okresach połowicznego rozpadu wynoszących odpowiednio  $7 \cdot 10^8$  lat oraz  $4,46 \cdot 10^9$  lat. Reaktor jądrowy wymaga jednak uranu wzbogaconego, który zawiera 3 % izotopu  $^{235}\text{U}$ .

Jakub jest teraz ciekawy: o ile większa jest aktywność wzbogaconego uranu w porównaniu z taką samą liczbą atomów uranu naturalnego?

**37** Mama dała Zosi talizman, który przynosi harmonię – naszyjnik z amuletem, który widać na rysunku. Jest to okrąg o promieniu  $r$ , z którego Zosia wycięła wpisany kwadrat. Wewnątrz tego kwadratu umieściła wpisany okrąg. Z tego okręgu wycięła kolejny wpisany kwadrat i kontynuowała ten proces w nieskończoność. Aby amulet był potężniejszy, obróciła każdy wpisany kwadrat o 20 stopni względem poprzedniego.

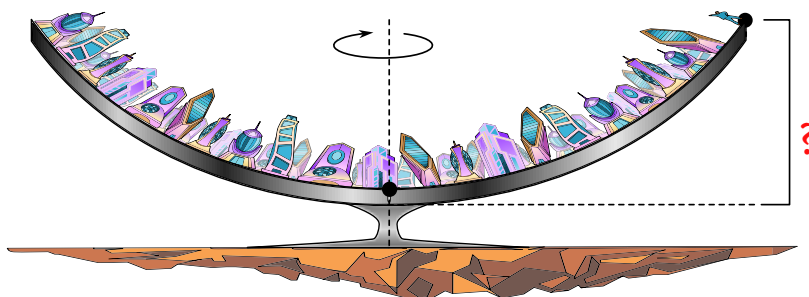
Zosia wie, że im dłużej obraca się amulet, tym lepiej on działa. Jaki jest moment bezwładności tego przedmiotu względem osi przechodzącej przez środek amuletu i prostopadłej do jego płaszczyzny? Masa amuletu wynosi  $m$ .



**38** W przyszłości planujemy kolonizację i terraformację Marsa. Jednak przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Marsa wynosi jedynie 36 % przyspieszenia grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi, a wiele osób nie radzi sobie dobrze w takich warunkach.

Dlatego zbudowaliśmy Gyropolis, ogromne miasto w kształcie paraboloidy obrotowej o promieniu 1000 m, które zapewnia sztuczną grawitację poprzez powolny obrót wokół swojej osi pionowej. Kiedy imigrant przybywa na Marsa, otrzymuje pokój na samym skraju, gdzie grawitacja jest taka sama jak na Ziemi, a następnie powoli przenosi się do niższych części miasta, aż przyzwyczai się do niższej grawitacji. Oczywiście, w każdym punkcie miasta kierunek odczuwanej siły grawitacji jest prostopadły do powierzchni.

Jaka jest różnica wysokości między centrum a skrajem miasta?

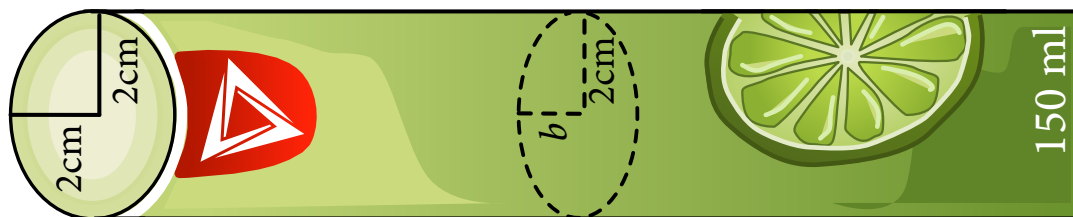


**39** Grzegorz potrzebuje orzeźwienia po długim, gorącym, letnim dniu jazdy na rowerze. W najbliższym sklepie spożywczym kupił lodowego lizaka. Lizak znajduje się w opakowaniu w kształcie „zdeformowanego stożka”. Opakowanie ma objętość 150 ml, a jego przekrój poziomy jest eliptyczny na dowolnej wysokości. Pół wielka ma stałą wartość  $a = 2$  cm, a pół mała zmienia się liniowo wraz z wysokością – na samej górze wynosi  $b = a$ , a na samym dole  $b = 0$ .

Grzegorz je lizaka od góry i powoli wypycha go w górę z opakowania. Jaką pracę wykona, aby wypchnąć lizaka do góry, zanim zje połowę jego objętości? Gęstość lodowego lizaka wynosi  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

*Zdjęcie jest obrócone, aby pasowało do kartki, ale Grzegorz trzyma oczywiście lizaka otworem ku górze.*





**40** Robert uwielbia szybkie samochody i wyścigi drag racing. Podczas swojej ostatniej próby pobicia rekordu świata jego fani ustawili się w jednakowych odstępach wzdłuż toru o długości  $s$ . Robert wcisnął gaz do dechy i przejechał tor ze stałym przyspieszeniem  $a$ . Każdy z jego fanów zapisał chwilową prędkość samochodu Roberta w momencie, gdy ten go mijał. Po wyścigu fani spotkali się w pubie, porównali swoje notatki i obliczyli średnią z pomiarów.

Jaki jest stosunek tej wartości do rzeczywistej średniej prędkości Roberta podczas wyścigu?

# Rozwiązania

**1** To solve this problem, Annie doesn't need to complete it at all. Since, according to the rules, each number between 1 and 9 must appear exactly once in each column, all columns have the same weight (45 g) and the horizontal coordinate of the centre of gravity must therefore be exactly in the middle. The same argument applies to the rows and the vertical coordinate, so the centre of gravity is exactly in the middle, and the answer we are looking for is 0 cm.

**2** For the purposes of solving the problem, we can imagine that the train (and therefore Jacob and the mirror) are stationary and the signal is moving towards it at a speed of  $v$ . The mirror transforms the scenery behind Jacob, so that objects at a distance  $d$  from the mirror will be seen by Jacob as being located  $d$  behind the mirror. Therefore, if the signal is moving towards him at a speed of  $v$ , its image in the mirror also moves towards Jacob at a speed of  $v$ .

Na potrzeby rozwiązania tego zadania możemy sobie wyobrazić, że pociąg (a więc Jakub i lustro) jest nieruchomy, a sygnał porusza się w jego kierunku z prędkością  $v$ . Lustro przekształca scenię za Jakubem tak, że obiekty znajdujące się w odległości  $d$  od lustra będą postrzegane przez Jakuba jako znajdujące się w odległości  $d$  za lustrem. Zatem, jeśli sygnał porusza się w kierunku Jakuba z prędkością  $v$ , jego obraz w lustrze również porusza się w kierunku Jakuba z prędkością  $v$ .

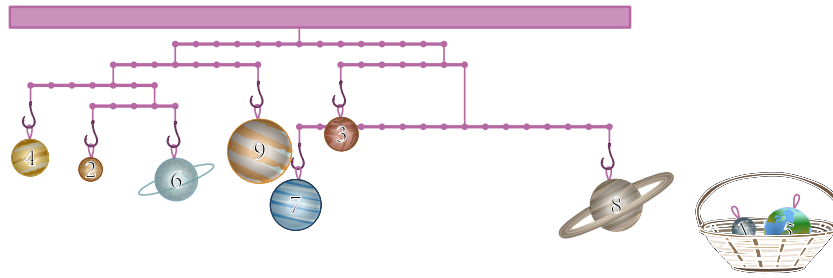
**3** Let's label the hooks from left to right with letters  $A$  to  $G$ . Note that the ratio of the distances of hooks  $E$  and  $G$  from the axis of rotation is  $\frac{8}{7}$ . The only two planets offered, whose masses are in the ratio  $7 : 8$ , are precisely the 7- and 8-gram planets. We must therefore hang these planets on hooks  $E$  and  $G$ .

The total mass on these scales is therefore  $7\text{ g} + 8\text{ g} = 15\text{ g}$ . The torque exerted on the arm above will therefore be  $15\text{ g} \cdot g \cdot 1\text{ cm} = 15\text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g$ <sup>1</sup>. In order to balance this torque with hook  $F$  at a distance of 5 cm from the axis of rotation, there must be a planet with mass 3 g.

Now let's note that the ratio of the distances of hooks  $B$  and  $C$  from the axis of rotation of their scales is  $3 : 1$ . The only remaining planets whose masses are in this ratio are those with 2 g and 6 g. Together, they exert a torque on the arm above them  $8\text{ g} \cdot g \cdot 1\text{ cm} = 8\text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g$ , therefore hook  $A$  must accommodate the planet with mass 4 g. The planets on hooks  $A$ ,  $B$  and  $C$  together weigh 12 g, so they exert a total torque of  $12\text{ g} \cdot g \cdot 3\text{ cm} = 36\text{ g} \cdot \text{cm} \cdot g$ . The planet on hook  $D$  must balance this, so one with mass 9 g must be hung here.

From left to right, the masses of the planets must be 4, 2, 6, 9, 7, 3 i 8 g, and Martin will not use the planets with masses 1 g i 5 g. Which makes sense: Pluto is not a planet anymore, and they already have Earth at home anyway.

<sup>1</sup>For simplicity, we assume that the distance between each pair of points is 1 cm, but we could also choose any other nonzero constant.

Figura 3.1: *Balanced scales*

**4** Ciepła woda przekazuje ciepło wodzie zimnej do momentu osiągnięcia równowagi termicznej. Zgodnie z treścią zadania, równowaga ta powinna wystąpić w temperaturze  $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Rozpoczynamy od napisania równania kalorymetrycznego:

$$Q_{\text{absorbed}} = Q_{\text{released}}$$

$$m_{\text{cold}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t - t_{\text{cold}}) = m_{\text{warm}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t_{\text{warm}} - t). \quad (4.1)$$

Następnie dzielimy obustronnie równanie przez ciepło właściwe wody  $c_{\text{H}_2\text{O}}$ . Niech  $x$  będzie teraz objętością zimnej wody wpływającej do wanny w ciągu jednej sekundy. Ponieważ sumaryczne objętościowe natężenie wypływu musi wynosić  $600\text{ ml/s}$ , objętościowe natężenie wypływu ciepłej wody wyniesie  $600\text{ ml/s} - x$ . Podstawiamy te wartości do równania i upraszczamy:

$$x \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (34\text{ }^{\circ}\text{C} - 17\text{ }^{\circ}\text{C}) = (600\text{ ml/s} - x) \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (68\text{ }^{\circ}\text{C} - 34\text{ }^{\circ}\text{C}),$$

$$x \cdot 17\text{ }^{\circ}\text{C} = (600\text{ ml/s} - x) \cdot 34\text{ }^{\circ}\text{C}. \quad (4.2)$$

Z powyższego wyrażenia możemy wyznaczyć  $x$ :

$$x = \frac{600\text{ ml/s} \cdot 34\text{ }^{\circ}\text{C}}{17\text{ }^{\circ}\text{C} + 34\text{ }^{\circ}\text{C}} = 400\text{ ml/s}. \quad (4.3)$$

Tak więc wymagane objętościowe natężenie wypływu zimnej wody wynosi  $400\text{ ml/s}$ .

**5** Figure 5.1 shows the shortest path along which sound travels between every pair of consecutive friends. In some places, there is a stone wall in the direct path, which the sound must go around.

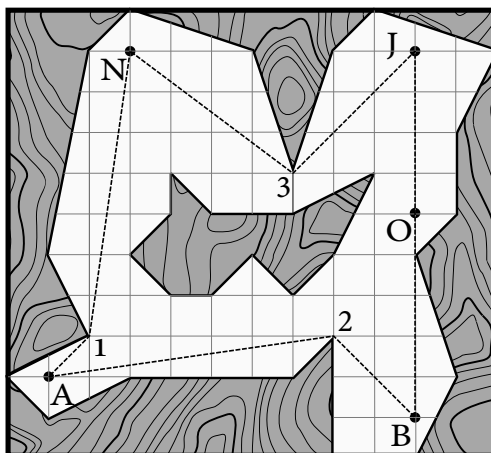


Figura 5.1: Path of a sound wave in a cave

We must therefore divide the first part of the path between points  $N$  and  $A$  into two shorter sections with an auxiliary point 1. Fortunately, on a square grid, all lengths either lie directly on the axes, or are hypotenuses of right triangles, so we only need to know Pythagoras' theorem.

For instance, the length of the first part is

$$\begin{aligned} d_{NA} &= d_{N1} + d_{1A} = \sqrt{(70 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} + \sqrt{(10 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} = \\ &= \sqrt{5000} \text{ m} + \sqrt{200} \text{ m} = 50\sqrt{2} \text{ m} + 10\sqrt{2} \text{ m} = 60\sqrt{2} \text{ m}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Similarly, we go through all sections one by one and obtain their lengths

$$d_{A2} = 50\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{2B} = 20\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{BO} = 50 \text{ m}, \quad d_{OJ} = 40 \text{ m}, \quad d_{J3} = 30\sqrt{2} \text{ m}, \quad d_{3N} = 50 \text{ m}. \quad (5.2)$$

If we add up all the length, we get the total distance  $(140 + 160\sqrt{2}) \text{ m}$ . Sound travels at a speed of approximately  $c_s = 343 \text{ m/s}$ , so to travel this distance, it will take

$$t_s = \frac{(140 + 160\sqrt{2}) \text{ m}}{343 \text{ m/s}} \doteq 1,07 \text{ s}. \quad (5.3)$$

However, we know that the reaction time of the expedition members is half a second for everyone. Since the shout passes through the four expedition members in this way, their total reaction time is  $t_r = 4 \cdot 0,5 \text{ s} = 2 \text{ s}$ , and Nina will therefore hear the entire word NABOJ after  $t_s + t_r \approx 3,07 \text{ s}$ .

**6** If Patrick's average lap time for the first three laps was  $80 \text{ s}$ , then the total time for those three laps is  $3 \cdot 80 \text{ s} = 240 \text{ s}$ . After the fourth lap, his average lap time is  $78 \text{ s}$ , thus the total time for all four laps is  $4 \cdot 78 \text{ s} = 312 \text{ s}$ .

Therefore, he ran the fourth lap in  $312 \text{ s} - 240 \text{ s} = 72 \text{ s}$ , or  $01:12$ .

**7** For the first time, the navigation tells Marcel that he should go at a speed of  $120 \text{ km/h}$ , from which we can directly calculate Marcel's distance from the airport at  $21:00$ ,

$$s = v \cdot t = 120 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 120 \text{ km}. \quad (7.1)$$

In the same way, we can also calculate Marcel's distance from the airport at  $21:30$ ,

$$s = 150 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 75 \text{ km}. \quad (7.2)$$

From this, we know that in the first half hour of the drive, he travelled  $120 \text{ km} - 75 \text{ km} = 45 \text{ km}$ , thus the speed at which Marcel drives is  $\frac{45 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 90 \text{ km/h}$ . Therefore the trip will take

$$\frac{120 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 80 \text{ min}, \quad (7.3)$$

and he will arrive at the airport at  $22:20$ .

**8** If the light bulb were shining without being inside the cube, it would illuminate the entire room. If we place a cube with a refractive index greater than 1 (possibly even other than 1,5) around the light bulb, according to Snell's law, the light will refract from the perpendicular line to the interface between the cube wall and the air. Therefore, if we look at a specific wall of the cube, the rays will be more scattered when they hit it than without the glass, meaning that they will illuminate more and certainly not less. Thus, 100 % of the room will still be illuminated.

**9** The most important part of the problem is to notice the units of both quantities. The speed  $v_{\max} = 320 \text{ km/h}$  is not compatible with the given units of acceleration  $2,6 \text{ km/h/s}$ . However, we can convert the latter to usable units  $\text{km}/(\text{h} \cdot \text{h}) \equiv \text{km}/\text{h}^2$ . If we know that the train accelerates by  $2,6 \text{ km/h/s}$  every second, in one hour (which consists of 3600 seconds), it would accelerate by  $2,6 \text{ km/h/s} \cdot 1 \text{ h} = 9360 \text{ km/h}$ .

From the relationship  $v = a \cdot t$ , we can now express the time it takes for the train to accelerate to its maximum speed. For uniformly accelerated motion starting from rest, the following applies

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} v_{\max} t. \quad (9.1)$$

When we substitute  $\frac{v_{\max}}{a}$  for  $t$ , we find that the distance travelled by the train before it accelerates to its maximum speed is

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_{\max} \cdot \frac{v_{\max}}{a} = \frac{v_{\max}^2}{2a}. \quad (9.2)$$

By substituting values in the correct units for both variables, we obtain the distance  $5,47 \text{ km}$ .

**10** The resulting force  $F_t$  acting on a fully submerged ball is the resultant of buoyant and gravitational forces, i.e.

$$F_t = F_b - F_g = V\rho_v g - V\rho_d g = (\rho_v - \rho_d) \frac{4}{3} \pi r^3 g. \quad (10.1)$$

The work done by the water sprite is determined by the formula  $W = F_t \cdot h$ , which gives us the answer

$$W = (\rho_v - \rho_d) \frac{4}{3} \pi r^3 g \cdot h \doteq 2,5 \text{ J}. \quad (10.2)$$

**11** By the time the tram reaches the crossing, the sound of the bell must have reached the driver, and the car must have had enough time to move out of the way. To find the minimum distance needed for this to happen, the time for the tram to reach the crossing ( $t_{\text{tram}}$ ) must equal the sum of the time it takes the sound to reach the car ( $t_{\text{sound}}$ ) and the time the car needs to leave ( $t$ ).

Let  $s$  be the required distance between the tram and the crossing. The values of times can be expressed as

$$t_{\text{tram}} = \frac{s}{v} \quad \text{and} \quad t_{\text{sound}} = \frac{s}{c}. \quad (11.1)$$

Substituting these expressions into the time equation gives

$$t_{\text{tram}} = t_{\text{sound}} + t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{v} = \frac{s}{c} + t, \quad (11.2)$$

from which we can express the distance

$$s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v}. \quad (11.3)$$

**12** Let's start by determining how large area we actually want to cover. We approximate the Earth as a sphere with radius  $R_{\oplus} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Its surface area can be expressed as

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2. \quad (12.1)$$

From the task description, we know that the area of A0 paper is  $1 \text{ m}^2$  and that the size decreases by half with each increasing number. For example, the most common A4 paper has an area of  $\frac{1}{2^4} \text{ m}^2 = \frac{1}{16} \text{ m}^2$ .

However, we could also continue in the opposite direction towards negative numbers. A-1 paper would therefore have an area of  $2 \text{ m}^2$ , and each subsequent one would be double that... until we exceed the value from equation 12.1. For such cases, we can use a handy function called the logarithm with base 2. We can calculate this on a calculator<sup>2</sup>.

We should not forget that we want to round it up, since we need the *smallest sufficiently large* paper. The result will therefore be

$$-\lceil N \rceil = -\lceil \log_2 (5,1 \cdot 10^{14}) \rceil = -49, \quad (12.2)$$

thus we are looking for paper size A-49.

<sup>2</sup>If our calculator cannot do this directly, we can use the relationship  $\log_y x = \frac{\log x}{\log y}$ .

**13** The smoke does not move relative to the air – that is, it moves with the air at the wind speed  $v$  relative to the ground. By the time the fighter jet reaches the end of the grandstand, the beginning of the smoke trail is carried in the opposite direction and travels some distance. This time is

$$t = \frac{s}{u} \quad (13.1)$$

and during this time, the foremostly released smoke travels

$$s_d = vt = v \frac{s}{u}, \quad (13.2)$$

thus the length of the smoke trail is

$$s + s_d = s + v \frac{s}{u} = s \left( 1 + \frac{v}{u} \right). \quad (13.3)$$

**14** Since the prism has a higher refractive index than air, the rays will refract toward the normal when they hit it. To prevent any rays from passing to the other side of the prism, the rays must refract at least parallel to the wall of the prism behind which the guard is sitting, or they must be directed more steeply toward the lower base. From the figure, we can see that for this to happen, they must refract at an angle of at most  $10^\circ$  from the normal.

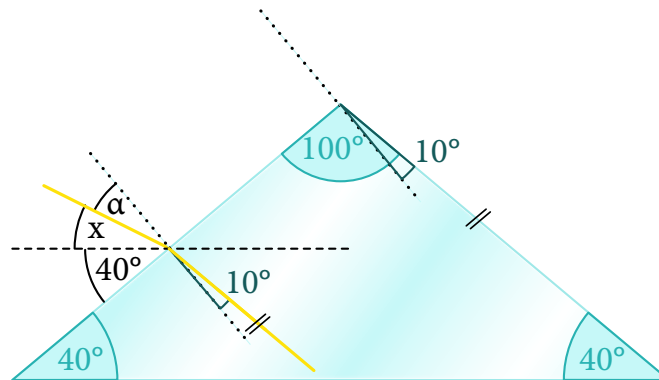


Figura 14.1: Overview of relevant angles in the prism

From this, we can use Snell's law to determine the angle at which the rays must strike,

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ). \quad (14.1)$$

Since the prism is isosceles, its faces are at an angle of  $40^\circ$  to the horizontal direction. So when we look at the angles between the normal and the interface, we see that  $40^\circ + \gamma + \alpha = 90^\circ$ , where  $\gamma$  is the angle at which the thief must tilt the flashlight. This angle is therefore

$$\gamma = 50^\circ - \alpha = 50^\circ - \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ) \doteq 25,4^\circ. \quad (14.2)$$



**15** First of all, we realize that the elevator's speed is irrelevant here. If Kai held the dumbbell motionless, it would exert a force of  $m_c g$  on him. However, he lets it fall with acceleration  $a$ , so it is sufficient for him to exert a force of  $m_c(g - a)$ . In addition to this, the elevator's cable also needs to carry Kai and the elevator itself, so it will also need to exert  $m_k g$  and  $m_v g$ , so in total it must exert a force of

$$\begin{aligned} F &= m_k g + m_v g + m_c(g - a) \\ &= 60 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 250 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 20 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s}^2 - 5 \text{ m/s}^2) = 3200 \text{ N} \doteq 3,2 \text{ kN}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

**16** In all three cases, it is a vertical throw in the same gravitational field, differing only in the initial conditions. Therefore, it will suffice to know the formulas for the trajectory and duration of uniformly accelerated motion,

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \quad (16.1)$$

Note that the second half of the upward throw is exactly the same as the entire downward throw: at the level of the window, the egg will definitely reach the same speed  $v_0$  as the speed with which Sam threw it. The first half of the upward throw therefore lasts 2 s and during that time, the speed of the egg changes by  $2v_0 = g \cdot 2 \text{ s}$ . Sam is therefore clearly throwing at a speed of  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ , which means that the egg will fly to a height of

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \approx 5 \text{ m} \quad (16.2)$$

above the level of the window. At the same time, we know that at the highest point of this movement, the egg will stop, and from that moment on, it will be the simplest uniformly accelerated movement with zero initial velocity. The fall from the highest point will take

$$\tau = t_{\uparrow} - \frac{t_{\uparrow} - t_{\downarrow}}{2} = \frac{t_{\uparrow} + t_{\downarrow}}{2} = 3 \text{ s}, \quad (16.3)$$

from which we know that  $H = \frac{g\tau^2}{2} = 45 \text{ m}$ . Sam's window is therefore at a height of  $H - h = 40 \text{ m}$  above the ground. Free fall from this height takes

$$\sqrt{\frac{2(H - h)}{g}} = \sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s}. \quad (16.4)$$

**17** First, we draw the free-body diagram. All we need is Newton's second law,  $F = ma$ .

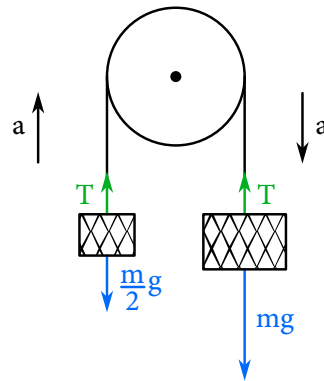


Figura 17.1: Two weights on a pulley

Gravity acts on both weights:  $F_1 = mg$  and  $F_2 = \frac{m}{2}g$ . Because  $F_1$  and  $F_2$  act on the rope as well, it is being stretched, and therefore exerts a tension force on both ends, in the direction opposite to gravity. These two forces are labeled  $T_1$  and  $T_2$  in the free-body diagram. Since the rope and pulley are massless,  $T_1$  must equal  $T_2$ ; otherwise, it would cause an infinite acceleration of the rope itself. Because of this, we denote both  $T_1$  and  $T_2$  simply as  $T$ .

Additionally, we can assume that both weights have the same acceleration  $a$ , with the heavier one accelerating downwards. Now the only thing left to do is to write the equations of motion for both weights and solve for  $a$ .

$$\frac{m}{2}a = -\frac{m}{2}g + T \quad a \quad ma = mg - T. \quad (17.1)$$

By adding the equations, we can eliminate  $T$  and solve for  $a$ ,

$$a = \frac{m - \frac{m}{2}}{m + \frac{m}{2}}g = \frac{1}{3}g. \quad (17.2)$$

**18** The numbers are powers of two, so we have to assess the validity of every statement separately.

Poszczególne liczby są potęgami dwójki, zatem prawdziwość każdego stwierdzenia należy oceniać osobno.

### Increasing the orbital speed (1)

Intuitive guess would say that if we increase the orbital speed, the orbital period should decrease. But we must not forget that if we change the orbital speed, the shape of the orbit changes too. To find out whether this statement is true or false, we can look at a situation in which we increase the speed so much, so that the orbiting body acquires escape velocity. In that case, the orbital period would become effectively infinite, so it would definitely increase. Therefore, this statement is **false**.

### Wzrost prędkości orbitalnej (1)

Intuicja podpowiada nam, że ze wzrostem prędkości orbitalnej okres orbitalny powinien się zmniejszyć. Nie możemy jednak zapominać, że zmiana prędkości orbitalnej powoduje zmianę kształtu orbity. Aby zbadać prawdziwość powyższego stwierdzenia możemy przyjąć, że zwiększamy prędkość orbitującego ciała tak bardzo, że uzyskuje ono prędkość ucieczki. Wówczas okres orbitalny stanie się nieskończony, zatem na pewno się zwiększy. Dlatego powyższe stwierdzenie jest **fałszywe**.

### Orbital speed in perihelion (2)

It follows directly from the second Kepler's law of planetary motion that the closer the Earth is to the Sun, the faster it travels. Therefore, this statement is **true**.

### Prędkość orbitalna w peryhelium (2)

Z drugiego prawa ruchu planet Keplera wynika bezpośrednio, że im bliżej Słońca znajduje się Ziemia, tym szybciej się porusza. Dlatego stwierdzenie jest **prawdziwe**.

### Winter (4)

Let us realise that when winter occurs in the northern hemisphere, it is summer in the southern hemisphere. If this statement were true, winter would have to occur in both hemispheres at the same time. Therefore, this statement is **false**. In fact, when the Earth is in its closest point to the Sun in the beginning of January, there is freezing winter in the northern hemisphere. Or maybe not so freezing.

### Zima (4)

Musimy uświadomić sobie, że gdy na półkuli północnej panuje zima, na półkuli południowej jest lato. Gdyby powyższe stwierdzenie było prawdziwe, zima musiałaby występować jednocześnie na obu półkulach. Dlatego stwierdzenie to jest **fałszywe**. W rzeczywistości, gdy Ziemia na początku stycznia znajduje się najbliżej Słońca, na półkuli północnej panuje mroźna zima. No, może nie aż tak mroźna.

### Circular orbit and the first cosmic velocity (8)

The centripetal force causing a body to orbit at a circular orbit is the gravitational force, which depends on the radius  $r$  as  $\frac{1}{r^2}$ . However, the centripetal force is proportional to  $\frac{v^2}{r}$ , where  $v$  is the orbital velocity. This means that the circular velocity changes with height  $h$  above the Earth's surface as  $v \propto \frac{1}{R+h}$ . Therefore, this statement is **false**.

### Orbita kołowa i pierwsza prędkość kosmiczna (8)

Siłą dośrodkową powodującą poruszanie się ciała po orbicie kołowej jest siła grawitacji, która zależy od promienia  $r$  jak  $\frac{1}{r^2}$ . Jednak siła dośrodkowa jest proporcjonalna do  $\frac{v^2}{r}$ , gdzie  $v$  jest prędkością orbitalną. Oznacza to, że prędkość kołowa zmienia się wraz z wysokością  $h$  nad powierzchnią Ziemi jak  $v \propto \frac{1}{R+h}$ . Stwierdzenie to jest zatem **fałszywe**.

### Geostationary satellites (16)

Geostationary satellites are satellites that are orbiting the Earth, but they are always above the same point of the Earth's surface. This is achieved by putting the satellite in such height, so that its angular velocity at which it orbits the Earth is the same as the angular velocity of the Earth's rotation. If a satellite remains above the same point on the surface, it is orbiting in the direction of parallels. Should the satellite, however, orbit above any other parallel than the equator, the gravity acting towards the Earth's centre would attract it to the equator, making it impossible for the satellite to stay above its parallel. Hence the geostationary satellites can really exist only above the equator. Therefore, this statement is **true**.

### Satelity geostacjonarne (16)

Satelity geostacjonarne to satelity, które krążą wokół Ziemi, ale zawsze znajdują się nad tym samym punktem na jej powierzchni. Osiąga się to poprzez umieszczenie satelity na takiej wysokości, aby prędkość kątowna jego ruchu wokół Ziemi była taka sama jak prędkość kątowna ruchu obrotowego Ziemi. Jeśli satelita pozostaje nad tym samym punktem na powierzchni Ziemi, orbituje w kierunku równoleżników. Gdyby jednak satelita orbitował nad jakimkolwiek innym równoleżnikiem niż równik, grawitacja działająca w kierunku środka Ziemi przyciągałaby go do równika, uniemożliwiając satelicie pozostanie nad swoim równoleżnikiem. Dlatego satelity mogą być geostacjonarne jedynie powyżej równika. Stwierdzenie to jest zatem **prawdziwe**.

### Elliptic trajectories (32)

The lighter body is in an elliptic orbit if it is gravitationally bound to the much heavier body (and by chance does not have a circular velocity). However, if its speed is too high, it can escape to infinity, and in that case it is travelling on a hyperbolic or parabolic orbit. Therefore, this statement is **false**.

### Trajektorie eliptyczne (32)

Lżejsze ciało znajduje się na orbicie eliptycznej, jeśli jest grawitacyjnie związane ze znacznie cięższym ciałem (i przez przypadek nie ma prędkości kołowej). Jeśli jednak jego prędkość jest zbyt duża, może uciec do nieskończoności, a w takim przypadku porusza się po orbicie hiperbolicznej lub parabolicznej. Dlatego stwierdzenie to jest **fałszywe**.

Sumując liczby związane z prawdziwymi stwierdzeniami, otrzymamy odpowiedź 18.

**19** A good first step is to note that all edges and all pairs of vertices in a regular tetrahedron are equivalent. It therefore does not matter how we rotate it or which two vertices we connect the ohmmeter at the beginning to, the result will not change; we will measure different resistances only after removing the resistor.

Therefore, we can solve an equivalent but slightly simpler task: first, we remove any resistor and only then connect the ohmmeter terminals to any two vertices.

We should immediately see that we need to solve<sup>3</sup> only three different cases from Figure 19.1:

<sup>3</sup>We will use the abbreviated notation for the resistance of two parallel branches,  $a \parallel b \equiv \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ .

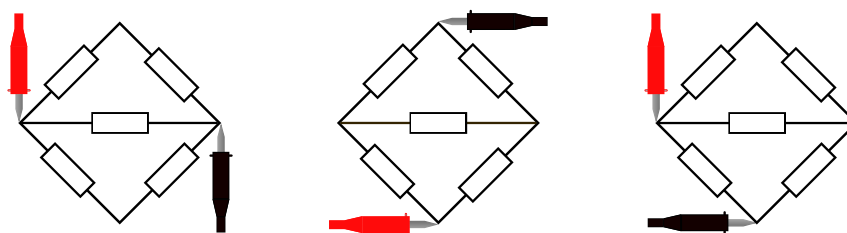


Figura 19.1: Three possible resistance measurements on a tetrahedron without one resistor

- If we connect it to two vertices to which the removed resistor was not connected, we are left with three parallel branches with one, two, and two resistors, for which we can calculate the total resistance directly as

$$R_1 = R \parallel (R + R) \parallel (R + R) = R \parallel 2R \parallel 2R = \frac{1}{2}R. \quad (19.1)$$

- If we connect the terminals to two vertices between which there is no longer any resistor, we get a pleasantly simple connection with two parallel branches with two resistors. Since the connection is now completely symmetrical, there can be no voltage between the ends of the last resistor, and where is no voltage, there is no current. Therefore, its resistance is

$$R_2 = (R + R) \parallel (R + R) = 2R \parallel 2R = R. \quad (19.2)$$

- Finally, if we connect the terminals to one untouched vertex and one vertex without a resistor, we are left with a series-parallel connection with a resistance of

$$R_3 = R \parallel (R + (R \parallel 2R)) = R \parallel \left(R + \frac{2}{3}R\right) = R \parallel \frac{5}{3}R = \frac{5}{8}R. \quad (19.3)$$

These three values are unique, so the answer is the set  $\left\{\frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R\right\}$ .

**20** To make the sorting easier, we will divide the letters into several groups. We should immediately suspect that many letters will not stand on their own.

For example, j and c stand on a single point, but their centre of gravity is not directly above this point, so they will immediately tip over. Similarly, p will also immediately tip over. Although it stands on a base of finite length, its centre of gravity is also definitely further to the right, so it will tip over the edge.

The second group includes the letters o and s. These will not fall on their own, because their centres of gravity are directly above the points where they touch the base; however, it is enough to tap them with any small impulse, and they will tip over.

The letters i and v form another category. Since the thickness of the rods is non-zero, they stand stably; however it is much smaller than the other dimensions of the sticks, and a small (but unlike o and s, *finitely* small) impulse is enough to knock them over. Of the two, v has significantly more mass, but its centre of gravity is slightly higher. Let's calculate which of these two letters is more stable.

Consider a letter with mass  $m$ , whose centre of gravity is at height  $H$  and for which the edge over which it wants to fall is  $\epsilon$  away from the centre of gravity in the horizontal direction. When the letter is tipped over the edge, its potential energy increases by

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg(\sqrt{H^2 + \epsilon^2} - H). \quad (20.1)$$

This is the work by which we quantify the stability of the letter. For  $\epsilon \ll H$ , the following applies

$$\sqrt{H^2 + \epsilon^2} \approx H \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2H^2}\right) \Rightarrow W \approx \frac{mg\epsilon^2}{2H}. \quad (20.2)$$

The ratio  $\frac{m\epsilon^2}{H}$  is therefore essential for stability. A letter with a higher ratio is more stable, and the weight of the letter is proportional to its size.

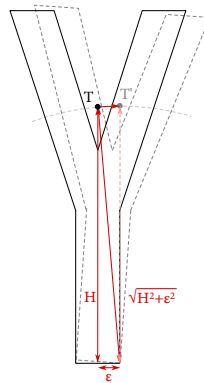


Figura 20.1: *Tipping the ypsilon.* To tip the ypsilon, it must be lifted to the dotted position. We can see that its centre of gravity  $T'$  is higher in this position than  $T$  in the original position.

The letters I and Y have the same  $\epsilon$ . The decisive factor is therefore the ratio  $\frac{m}{H}$ . Let one square of the square grid have a side of unit length and the bar of the letter of this length have unit mass. Then for I the height of the centre of gravity is 4 and its mass is 8, so the ratio  $\frac{m}{H}$  is 2. For Y,  $H$  is approximately 4,76 and the mass is approximately 12,9, so the ratio determining stability is approximately 2,7. Y is therefore more stable than I.

Let's move on. The letters N, A, and H all have their centre of gravity exactly in the middle of the rectangle they describe and rotate around a point on the edge, which in all cases is located two squares from the centre horizontally and four squares vertically. Stability is therefore determined solely by their weight. By simply adding up the lengths of the sticks, we find that N has the greatest weight, followed by H and finally A.

There remains one last problematic solitaire – B. It rests at the bottom on a straight stick of length 2, which is connected to a semicircle with radius 2. If its centre of gravity were more than two squares away from its vertical stick, we would be done. However, an approximate calculation shows that its centre of gravity is

slightly more than<sup>4</sup>

$$x = \frac{8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4\pi \cdot 3}{14 + 4\pi} \doteq 1,645. \quad (20.3)$$

This means that the centre of gravity of B is less than 0,355 horizontally away from the edge over which we want to tip it, which is definitely less than in the case of the letters from the previous group, but more than for I and Y, so it will lie between them in the stability series.<sup>^</sup>[For B,  $\varepsilon$  is sufficiently smaller than the height of the centre of gravity, so the same strategy can be used to examine stability as for I and Y. However, we do not need to calculate it accurately, because B has a much larger  $\varepsilon$ , which moreover appears squared in the stability ratio, thus B will definitely be more stable.

The answer is therefore N, H, A, B, Y, I. The remaining letters will either fall down on their own, or very little effort is needed to knock them over.

**21** We know that the inflow into the tank Q is constant. However, the speed of outflow through a small hole at the bottom of the tank will also depend on the hydrostatic pressure, which in turn depends on the height of the level in the tank  $h$ . Finding the height of the water column as a function of time is probably too difficult for us.<sup>5</sup> Fortunately, we do not need to, because the question in the problem statement is about a single parameter.

The asymptote at  $t \rightarrow \infty$  determines the maximum water level in the tank  $h_{\max} = 80$  cm – that is, the height at which the hydrostatic pressure at the bottom is sufficient for the water to flow out as fast as it flows in.

Then we can see the dotted tangent at  $t = 0$ . At that point, the water level is still zero, so the hydrostatic pressure is also zero and the water does not flow out at all, as if there were no hole in the bottom. Then the tank would obviously fill up in time  $\tau = 1$  h. We can therefore express the inflow as

$$Q = \frac{h_{\max} \cdot S}{\tau}. \quad (21.1)$$

From Bernoulli's equation, we can quickly determine the outflow velocity as a function of the height of the water surface in the tank,

$$\rho \frac{v(h)^2}{2} = \rho gh \quad \Rightarrow \quad v(h) = \sqrt{2gh}. \quad (21.2)$$

We know that at a level  $h_{\max} = 80$  cm, the inflow will be equal to the outflow, which is given by the product of the outflow velocity and the unknown area of the hole A. Then

$$Av = A\sqrt{2gh_{\max}} = Q, \quad (21.3)$$

and after substituting for Q from equation 21.1, we get the result

$$A = \frac{Q}{\sqrt{2gh_{\max}}} = \frac{S}{\tau} \sqrt{\frac{h_{\max}}{2g}} = 56 \text{ mm}^2. \quad (21.4)$$

<sup>4</sup>This is only a lower estimate, because the centre of gravity of the semicircle is a little closer to its edge, so its coordinate is slightly greater than 3.

<sup>5</sup>It leads to a Chini differential equation  $\frac{dh}{dt} = \alpha + \beta\sqrt{h}$ , which is formulated in terms of Lambert W function, and which we certainly do not want to solve.

**22** We can immediately calculate that there is exactly 100 ml of yogurt in the milk, since this is 10 % of 1 l.

When the milk settles, there is only water at the top, hence the concentration of yogurt is 0 % up there. For the average concentration to be 10 %, the concentration at the bottom must be 20 %, and thus increases by 2 % for every 100 ml. The top 200 ml therefore has an average concentration of 2 %, which is a total of 4 ml of yogurt.

The remaining volume in the bottle is 800 ml and the remaining volume of yogurt is 96 ml. When shaken, the concentration homogenizes, so it will be  $\frac{96 \text{ ml}}{800 \text{ ml}} = 12 \%$ . From this, Mike poured 200 ml, hence 24 ml of yogurt.

Finally, we just add up the volume of yogurt in the glass,

$$4 \text{ ml} + 24 \text{ ml} = 28 \text{ ml}, \quad (22.1)$$

and calculate the total concentration as the ratio of the volume of the yogurt component to the total volume, i.e.

$$\frac{28 \text{ ml}}{400 \text{ ml}} = 7 \%. \quad (22.2)$$

Możemy natychmiast obliczyć, że w napoju znajduje się dokładnie 100 ml mililitrów jogurtu, ponieważ jest to 10 % z 1 l.

Gdy napój rozdzieli się, w górnej części kartonu znajduje się jedynie woda, dlatego stężenie jogurtu wynosi tam około 0 %. Aby średnie stężenie jogurtu wynosiło 10 %, jego stężenie w dolnej części kartonu musi wynosić 20 %, a zatem powinno wzrastać o około 2 % na każde 100 ml. W objętości 200 ml napoju w górnej części kartonu średnie stężenie jogurtu wynosi zatem 2 %, co oznacza łącznie 4 ml jogurtu.

Pozostała objętość napoju w kartonie wynosi 800 ml, mililitrów, a pozostająca objętość jogurtu wynosi 96 ml. Po wstrząśnięciu kartonu stężenie jogurtu wyrównuje się i wynosi  $\frac{96 \text{ ml}}{800 \text{ ml}} = 12 \%$ . Wynika stąd, że Michał nalał 200 ml napoju, a więc 24 ml jogurtu.

Na koniec sumujemy objętość jogurtu w szklance:

$$4 \text{ ml} + 24 \text{ ml} = 28 \text{ ml}, \quad (22.3)$$

i obliczamy całkowite stężenie jogurtu jako stosunek objętości składnika jogurtowego do całkowitej objętości szklanki, tj:

$$\frac{28 \text{ ml}}{400 \text{ ml}} = 7 \%. \quad (22.4)$$

**23** Wording of the problem implies that the log is inclined with respect to the horizontal direction by an angle  $\alpha$ . Weight  $Mg$  acts vertically downwards at the centre of the log, Matthew acts perpendicular to its surface with a force  $F_M$  at its upper end, and Jacob acts with a force  $F_K$  at the lower end. This force can be broken down into a horizontal component  $F_{Kx}$  and a vertical component  $F_{Ky}$ .



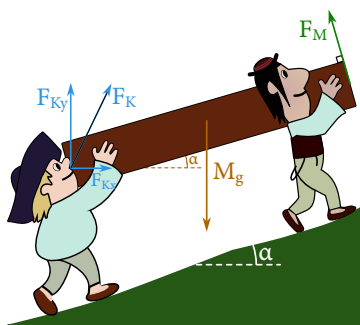


Figura 23.1: Breakdown of the forces exerted on the load by Matthew and Jacob

In the equilibrium position, we can write

- for forces in the vertical direction  $Mg = F_M \cos \alpha + F_{Ky}$ ;
- for forces in the horizontal direction  $F_M \sin \alpha = F_{Kx}$ ;
- for moments of forces relative to the lower end of the load  $Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = F_M L$ .

Solving this system of equations, we obtain

$$\begin{aligned} F_M &= \frac{1}{2} Mg \cos \alpha, \\ F_{Kx} &= \frac{1}{2} Mg \sin \alpha \cos \alpha, \\ F_{Ky} &= \frac{1}{2} Mg + \frac{1}{2} Mg \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (23.1)$$

The force exerted by Jacob is

$$F_K = \sqrt{F_{Kx}^2 + F_{Ky}^2} = \frac{1}{2} Mg \sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}, \quad (23.2)$$

and the desired ratio of forces is finally

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}}. \quad (23.3)$$

**24** We don't need to worry about longitude: a day is much shorter than a year, and the position of the Sun changes much faster in the east-west direction than in the north-south direction. During a single day, we can therefore consider the Sun's latitude to be constant and it is sufficient to look at the latitude.

The tilt of the Earth's axis determines how far north or south the Sun can travel during the year. These parallels are called the Tropic of Cancer (June solstice) and the Tropic of Capricorn (December solstice). At the same time, in December, when the Sun is furthest south, the northern polar region does not see the Sun at all. The southernmost parallel where this can occur is called the Arctic Circle. The same thing happens in the south,

only in reverse and six months later. The latitude of the tropics is  $\varepsilon_{\oplus} = \pm 23,44^{\circ}$  and the latitude of the polar circles is  $\pm(90^{\circ} - \varepsilon_{\oplus}) \approx \pm 66,56^{\circ}$ .

The whole situation can be seen in Figure 24.1.

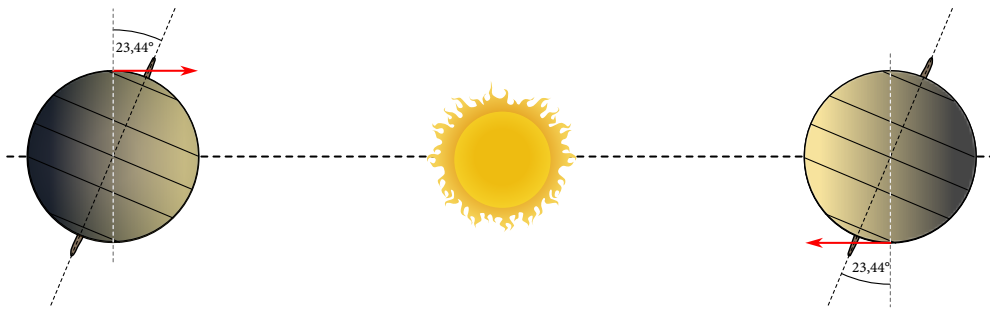


Figura 24.1: *Relative position of the Earth and Sun during the June and December solstices*

These circles divide the Earth's surface into five regions where the position of the Sun in the sky behaves differently throughout the year:

- In the southern polar region, at least once a year, there is a polar day when the Sun does not set at all. As it orbits around the horizon, it necessarily crosses the northern direction.
- Between the Tropic of Capricorn and the Antarctic Circle, we can see the Sun in the north every day, regardless of the season, at solar noon.
- In the tropics, i.e. between the tropics, the Sun can be at solar noon in the north or south depending on the season. We are interested in the June solstice, when the Sun reaches its northernmost position, and therefore will be in the north at noon.
- In the northern temperate zone, i.e. between the Tropic of Cancer and the Arctic Circle, we see the Sun at solar noon only in the south. At midnight, it is located to the north, but it is below the horizon, so we cannot see it.
- Finally, inside the Arctic Circle, the Sun does not set at all during the June solstice. Again, during its orbit, it necessarily crosses the north direction, but this does not happen at noon, but at midnight. The only exception is the North Pole itself, where all directions are „south”; however, this is only a single point and it does not contribute to the area.

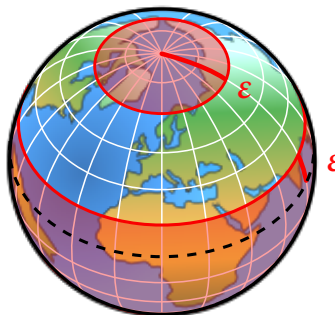


Figura 24.2: Earth with marked areas where the Sun can be seen in the north

It remains to find the sum of the areas of all regions south of the Tropic of Cancer  $S_{\downarrow}$  and the area north of the Arctic Circle  $S_{\uparrow}$ , which are marked in the figure 24.2. We can calculate this, for example, using the formula for the surface area of a spherical cap. For that, we will need the heights of both areas: for the polar cap, it is  $h_{\uparrow} = R(1 - \cos \varepsilon)$ , and for the area south of the Tropic of Cancer,  $h_{\downarrow} = R(1 + \sin \varepsilon)$ . Hence together

$$S = S_{\downarrow} + S_{\uparrow} = 2\pi R h_{\downarrow} + 2\pi R h_{\uparrow} = 2\pi R (h_{\downarrow} + h_{\uparrow}) = 2\pi R^2 (1 - \cos \varepsilon + 1 + \sin \varepsilon) = 2\pi R^2 (2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon), \quad (24.1)$$

and since we are interested in the ratio to the surface of the entire Earth  $S_{\oplus}$ , the answer is

$$\frac{S}{S_{\oplus}} = \frac{2\pi R^2 (2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon)}{4\pi R^2} = \frac{2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon}{2} \doteq 0,74 = 74 \%. \quad (24.2)$$

**25** Dan, like any good archer, thinks about where to aim. He knows the distance to the target  $d = 70$  m and the speed  $v_0 = 50$  m/s. To know where to aim, he draws a figure of the system right before shooting.

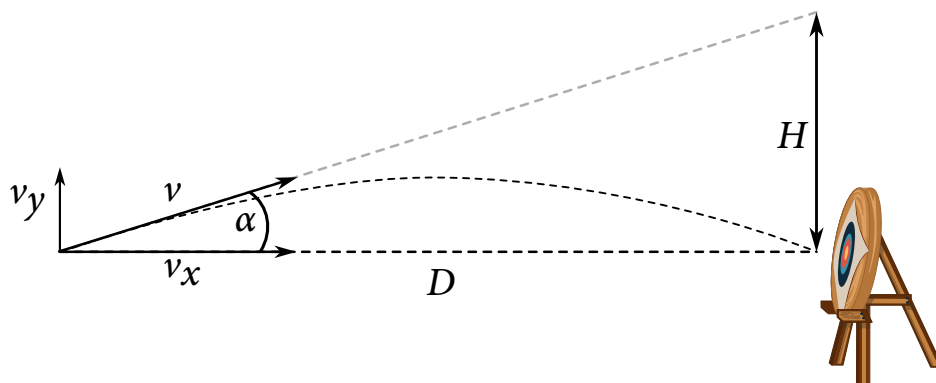


Figura 25.1: Shot at a target

First, he notices that the point he is aiming at is at a height  $H$  above the center of the target, and he can express the relationship for it as

$$\tan \alpha = \frac{H}{D}. \quad (25.1)$$

All that remains is to express  $\tan \alpha$ , which also appears in the decomposition of the initial velocity into the  $x$ - and  $y$ -directions

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \quad (25.2)$$

In the  $y$  direction, only the gravitational force acts on the arrow, so in this direction, we have

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (25.3)$$

where we are interested in the impact of the arrow on the target plane, i.e.  $y = 0$ . This occurs at time

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.4)$$

No force acts on the arrow in the  $x$  direction, so between time  $t$  and distance  $D$ , the following applies

$$D = v_x t = v \cos \alpha \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.5)$$

Since  $H$  and  $D$  are related through the tangent of the angle, we use trigonometric identities

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}. \quad (25.6)$$

After substituting into the equation for the range, we get

$$D = \frac{2v^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}. \quad (25.7)$$

We substitute  $H/D$  for  $\tan \alpha$  according to equation 25.1, and after manipulations, we get a quadratic equation

$$H^2 - \frac{2v^2}{g} H + D^2 = 0, \quad (25.8)$$

the solution of which is<sup>6</sup>

$$H = \frac{v^2}{g} - \sqrt{\frac{v^4}{g^2} - D^2} \approx 10 \text{ m}. \quad (25.9)$$

---

<sup>6</sup>We chose the smaller root.

**26** Let's start by quantifying the defining units of the gulp-belch-wink system. We won't have much trouble with volume and time. We know that

$$V = 1 \text{ gulp} = \frac{1 \text{ pt}}{20} \approx \frac{473 \text{ ml}}{20} = 23,65 \text{ ml}, \quad (26.1)$$

and  $t = 1 \text{ wink} = 0,5 \text{ s}$ . Determining the sound intensity will be slightly more difficult. Let  $I$  be the sound intensity 1 belch. We know that it is defined as the sound intensity corresponding to the sound intensity level 100 dB, i.e. 10 B. Based on the definition of sound intensity level  $L = \log \frac{I}{I_0}$ , where  $I_0 = 1 \text{ pW/m}^2$ , we can write  $10 \text{ B} = \log \frac{I}{I_0}$ , from which

$$I = 10^{10} I_0 = 10^{10} \cdot 1 \text{ pW/m}^2 = 10^{-2} \text{ W/m}^2. \quad (26.2)$$

Now we need to combine the quantities  $V$ ,  $t$  and  $I$  to obtain something with the dimension kg. So we are looking for an expression of the form  $m = V^\alpha \cdot t^\beta \cdot I^\gamma$ . It should be true that  $[V]^\alpha \cdot [t]^\beta \cdot [I]^\gamma$ , where  $[A]$  denotes the dimension (i.e., unit) of the quantity  $A$ , gives the dimension of mass. We obtain

$$[m] = (\text{m}^3)^\alpha \cdot \text{s}^\beta \cdot (\text{kg/s}^3)^\gamma = \text{m}^{3\alpha} \cdot \text{kg}^\gamma \cdot \text{s}^{\beta-3\gamma} \stackrel{!}{=} \text{m}^0 \cdot \text{kg}^1 \cdot \text{s}^0. \quad (26.3)$$

From this, we can immediately see that  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 1$  and  $\beta = 3$ , thus

$$m = t^3 I = (0,5 \text{ s})^3 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2 = \frac{1}{800} \text{ kg} = 1,25 \text{ g}. \quad (26.4)$$

Now nothing prevents us from calculating John's weight in his natural units,

$$M = 200 \text{ lb} \approx 90\,718 \text{ g} = 72\,575 \text{ belch} \cdot \text{wink}^3. \quad (26.5)$$

**27** The greatest pressure in the large container can be achieved by gradually connecting all five smaller containers to it, because we need to maximize the difference between the pressure in the large container and the small connected container, as that is when the amount of gas transferred from the smaller container to the larger one is maximized. Let's look at a situation if the nitrogen man had only two small containers, labeled 1 and 2. The normal procedure is to gradually connect the small bottles 1 and 2 one after other to the large container. This leaves pressures  $p_1$  and  $p_2$  in the small bottles, while pressure  $p_2$  remains in the large container. An alternative procedure is to connect the small container 1, then equalize the pressures between containers 1 and 2, and then gradually connect containers 1 and 2. In this way, we connect the small containers to the large one several times, leaving pressure  $p'_1$  in container 1, which is greater than  $p_1$ , and thus the resulting pressure  $p'_2$  in the large container (and also in the small container 2) is less than  $p_2$ . Therefore, it is not worthwhile to equalize the pressures between the small containers.

From the equation of state of an ideal gas, we know that the amount of gas in both the small and large containers before we connect them can be determined from the state equation of the gas as  $n = \frac{pV}{RT}$ . We know that the total amount of substance  $n$  before and after we connect the bottles must be the same, i.e., the sum of  $n$  in the large and small bottles before connection must be equal to the total  $n$  after connection. If we denote the quantities describing the small bottle by the subscripts  $s$ , the large container by  $l$ , and the total state after connection by  $t$ , then

$$\frac{p_l V_l}{RT} + \frac{p_s V_s}{RT} = \frac{p_t V_t}{RT}. \quad (27.1)$$

Since the temperature and universal gas constant  $R$  remain constant throughout the process, we can express the total (equalized) pressure after connecting the cylinders as

$$p_t = \frac{p_l V_l + p_s V_s}{V_t}. \quad (27.2)$$

Before connecting the first small bottle, this pressure is zero, but after each subsequent connection, we increase this pressure – and the new resulting pressure in the connected bottles naturally depends on what the pressure in the large bottle was before.

We therefore perform the calculation for  $p_t$  five times; the first time we substitute 0 for  $p_l$ , and each subsequent time we substitute  $p_t$ , which we have obtained the most recently. As the last fifth  $p_t$ , we get exactly  $\frac{23255}{7776}$  MPa, or approximately 3 MPa.

**28** The plate with the platter must be spun at an angular velocity of

$$\omega = \frac{100}{3} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{9} \pi \text{ rad/s}.$$

The rotational energy that must be supplied will therefore be  $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$ . Since the moment of inertia of a solid disk is  $J = \frac{1}{2} (m + M) r^2$ , where  $r$  is the radius of the disk, we can substitute this for  $J$  and obtain the energy

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} (m + M) r^2 \omega^2. \quad (28.1)$$

We know what voltage and current the turntable requires, and we know that the power used to spin the record will be  $P = UI$ . We can now simply determine the time as the required energy divided by the power,

$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{P} = \frac{\frac{1}{4} m \left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2}{UI} = \frac{200 \text{ g} \cdot (15 \text{ cm})^2 \cdot \left(\frac{10}{9} \pi \text{ rad/s}\right)^2}{4 \cdot 5 \text{ V} \cdot 100 \text{ mA}} \approx 0,302 \text{ s}. \quad (28.2)$$

Płyta musi się obracać z prędkością kątową

$$\omega = \frac{100}{3} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{9} \pi \text{ rad/s}.$$

Energia ruchu obrotowego, którą trzeba dostarczyć płycie wyniesie zatem  $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$ . Ponieważ moment bezwładności jednorodnego dysku wynosi  $J = \frac{1}{2} m r^2$ , gdzie  $r$  jest promieniem dysku, możemy tym wyrażeniem zastąpić  $J$  i otrzymać energię

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \omega^2. \quad (28.3)$$

Wiemy jakiego napięcia i natężenia prądu wymaga gramofon i wiemy, że moc użyta do obracania płyty wynosi  $P = UI$ . Teraz możemy po prostu określić czas, dzieląc wymaganą energię przez moc,

$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{P} = \frac{\frac{1}{4}m\left(\frac{d}{2}\right)^2\omega^2}{UI} = \frac{200 \text{ g} \cdot (15 \text{ cm})^2 \cdot \left(\frac{10}{9}\pi \text{ rad/s}\right)^2}{4 \cdot 5 \text{ V} \cdot 100 \text{ mA}} \approx 0,302 \text{ s}. \quad (28.4)$$

**29** Before we start calculating, we need to translate the problem into understandable language. Once we understand what the problem is, we can start.

In order for the entire system to be in equilibrium, the net force on each charge must be zero. Thanks to symmetry, we only need to look at the forces acting on a single charge located at the vertex of the cube. The only attractive force acting on it comes from the charge in the centre, magnitude of which we are trying to find; the remaining charges act with repulsive forces – three charges at a distance equal to the cube's edge, three charges at a distance equal to the face diagonal, and finally one charge at a distance equal to the space diagonal. Let us denote the edge length of the cube as  $a$ . The face diagonal then has length  $\sqrt{2}a$  and the space diagonal  $\sqrt{3}a$ .

Each force acting on the chosen vertex charge can be decomposed into two components - one in the direction of the resultant force, i.e., along the space diagonal, and the other perpendicular to it. The components perpendicular to the space diagonal cancel each other out due to symmetry, and the components along the space diagonal add up to form the resultant force. Therefore, we are interested in the cosine of the angle between the space diagonal and the cube's edge, and between the space diagonal and the face diagonal.

Stop reading for a moment, this is a mandatory vibe check.

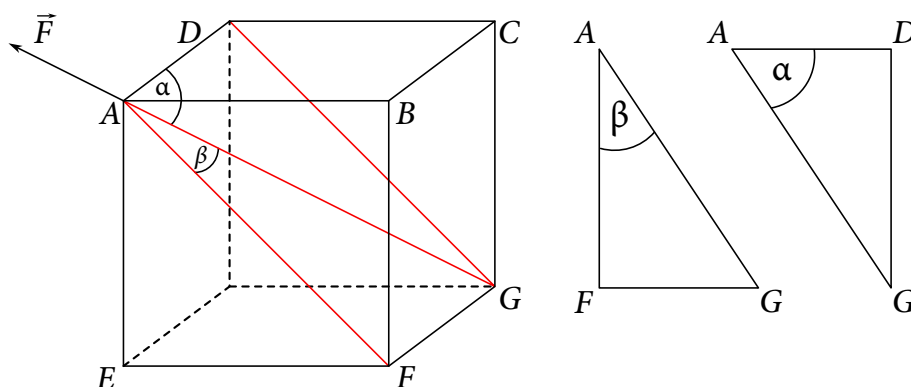


Figura 29.1: Skibidikocka

Ok, vibe check passed. Next, let us calculate the force from the charge located at a distance equal to the cube's edge. The cosine of the required angle can be found from the right triangle  $ADG$  as

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (29.1)$$

The force will therefore be

$$F_h = -k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2}. \quad (29.2)$$

Next, let us look at the force from the charge located at a distance equal to the face diagonal. The cosine of the required angle can be found from the right triangle  $AFG$  as

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad (29.3)$$

The force will therefore be

$$F_s = -k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2}. \quad (29.4)$$

For the force from the charge located at a distance equal to the space diagonal, we don't need to deal with any angle, hence the force will be simply

$$F_t = -k \frac{q^2}{3a^2}. \quad (29.5)$$

Lastly, we need to calculate the force from the charge in the center. This is the same situation as with the space diagonal, except the distance is halved. Therefore, the force will be

$$F_{\text{stred}} = 4k \frac{qQ}{3a^2}. \quad (29.6)$$

The net force will therefore be

$$F = F_{\text{stred}} - 3F_h - 3F_s - F_t = 0. \quad (29.7)$$

Substituting in, we get

$$\begin{aligned} 4k \frac{qQ}{3a^2} &= -3k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2} - 3k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2} - k \frac{q^2}{3a^2}, \\ 4 \frac{Q}{3} &= -3 \frac{q}{\sqrt{3}} - 3 \frac{\sqrt{2}q}{2\sqrt{3}} + \frac{q}{3}, \\ Q &= -\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8}q. \end{aligned} \quad (29.8)$$

The charge in the center must therefore be  $Q \doteq -2,47 \text{ C}$ . GG EZ.

**30** Let's write down the equations that describe projectile motion

$$\begin{aligned} y &= v \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}at^2, \\ x &= v \cos(\alpha)t. \end{aligned} \quad (30.1)$$



On the Moon, the equations will stand, only the gravitational acceleration is different: if we substitute  $a = 0,16g$ , it should be

$$\begin{aligned} y_{\zeta} &= v_{\zeta} \sin(\alpha) t_{\zeta} - \frac{1}{2} 0,16g t_{\zeta}^2, \\ x_{\zeta} &= v_{\zeta} \cos(\alpha) t_{\zeta}. \end{aligned} \quad (30.2)$$

We cannot fake the position in the video. For the equations for  $x$  and  $y$  to remain the same, we need to adjust time and velocity. We know that

$$0,16t_{\zeta}^2 = t_{\oplus}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{0,16}} t_{\oplus} = \frac{1}{0,4} t_{\oplus} = 2,5t_{\oplus}. \quad (30.3)$$

From the equation for  $x_{\zeta}$ , we now see that

$$x_{\zeta} = v_{\zeta} \cos(\alpha) 2,5t_{\oplus}, \quad (30.4)$$

thus  $v_{\zeta} = 0,4v_0$  in order for equation 30.4 to equal the expression for  $x$  in equation 30.1. On the Moon, therefore, this whole projectile motion would last 2,5 times longer, which means that the Earth video must be played at a frame rate 2,5 times lower, i.e. 24 Hz. That means we simply move from the television frame rate to the movie frame rate.

Coincidence? We do not think so.

**31** Let's consider a heat pump as a heat engine that draws energy from the electrical grid and transfers heat from Adam's cellar to Justine's cellar. The key to solving the problem is to understand how efficiency is defined.

In general, efficiency can be said to be the ratio of what we want to achieve to what we have to invest in it. In Justine's case, what we want to achieve is the amount of heat that the heat pump transfers to her cellar,  $Q_{\text{out}}$ , and what we have to invest is the amount of electrical energy supplied from the grid, which is equal to the work done on the working gas in the pump,  $W$ . The efficiency she observes is therefore  $\eta_J = \frac{Q_{\text{out}}}{W} = 1500\%$ .

In Adam's case, what we want to achieve is the amount of heat extracted by the heat pump from his cellar,  $Q_{\text{in}}$ , and what we have to invest is again the amount of electrical energy supplied,  $W$ , so the efficiency he observes is  $\eta_G = \frac{Q_{\text{in}}}{W}$ .

The heat pump extracts heat  $Q_{\text{in}}$  from Adam's cellar, and we supply it with energy  $W$  from the grid, and it transfers heat  $Q_{\text{out}}$  to Justina's cellar. The energy balance written for the heat pump is therefore  $Q_{\text{in}} + W = Q_{\text{out}}$ .

Using this relationship, the efficiency observed by Adam can be expressed as  $\eta_G = \frac{Q_{\text{out}} - W}{W} = \eta_J - 1 = 1400\%$ .

**32** Let us look at the situation in the problem statement from the energy point of view. At the beginning of the day, the ISS has energy which is the sum of its potential and kinetic energy. After one day of experiencing the drag force, the ISS has lower energy because drag is acting against the direction of motion.

Let us denote energies at the beginning and at the end by 1 and 2 respectively. Then from the law of energy conservation follows that

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} + W, \quad (32.1)$$

where  $E_p$  are potential energies,  $E_k$  are kinetic energies, and  $W$  is work which was done by drag force on the ISS.

The ISS is orbiting the Earth on a circular orbit, so we can easily express its orbital speed using the equality between the gravitational and centripetal force. For our purposes, it is handy to write the square of the speed<sup>7</sup>

$$v^2 = \frac{GM_{\oplus}}{r}, \quad (32.2)$$

where  $M_{\oplus}$  is the Earth's mass,  $r = R_{\oplus} + 400$  km is the distance of the ISS from the centre of the Earth, and  $R_{\oplus}$  is self-explanatorily the radius of the Earth. Let us now denote the mass of the ISS  $m$  and its daily change in height  $\Delta r$ . Now we can rewrite the equation 32.1 as

$$-\frac{GM_{\oplus}m}{r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r} = -\frac{GM_{\oplus}m}{r - \Delta r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r} + W, \quad (32.3)$$

whence we express the work done by the drag force

$$W = \frac{GM_{\oplus}m}{2} \left( \frac{1}{r - \Delta r} - \frac{1}{r} \right). \quad (32.4)$$

The drag force  $F$  acts against the motion of the ISS, so after travelling the distance  $s$ , the work done by the drag force is  $W = Fs$ . What is the distance travelled by the ISS in one day? Since  $\Delta r$  is much smaller than the radius of the circular orbit, we do not have to calculate the length of the spiral, which is the true trajectory of the ISS. We can get a reasonably good result if we assume that the ISS is circulating all day at an altitude of  $r - \Delta r/2$  at the speed that corresponds to this altitude according to the equation 32.2, hence

$$s = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r/2}} T, \quad (32.5)$$

where  $T$  is one day.

Now we simply substitute equations 32.4 and 32.5 into

$$F = \frac{W}{s}, \quad (32.6)$$

and for the given numeric values, we obtain  $F \doteq 0,26$  N.

**33** Let us consider rolling the roll to the maximum possible angle. In this position, the angle between the normal on the ISIC and the vertical direction is  $\varphi$ .

<sup>7</sup>Because we will substitute it into the expression for kinetic energy.

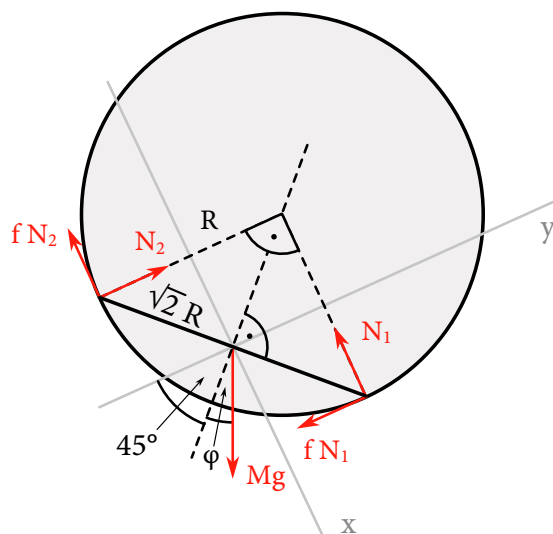


Figura 33.1: Roll with forces acting on it

Normal forces  $N_1$  and  $N_2$  act on the edges of the ISIC perpendicularly to the surface of the roll, and thus to the center of the roll. In the tangential direction, there are frictional forces, whose magnitudes in the limiting case are  $f N_1$  and  $f N_2$  respectively. The gravitational force  $Mg$  acts vertically downward at the centre of the ISIC.

The size of the ISIC is such that together with the lines of action of the normal forces, it forms a right-angled triangle with legs of length  $R$  and hypotenuse  $\sqrt{2}R$ . Among other things, this means that the forces  $N_1$  and  $f N_2$  have the same direction, that is perpendicular to the direction of the forces  $N_2$  and  $f N_1$ . This encourages us to choose a coordinate system such that the coordinate axes are oriented in these two directions, i.e., rotated by  $45^\circ$  relative to the ISIC. Then the gravitational force decompose into components  $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$  and  $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$ .

Now we can write the stability conditions:

- balance of forces in the  $x$  direction,

$$N_1 + f N_2 = Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right); \quad (33.1)$$

- balance of forces in the  $y$  direction,

$$N_2 = f N_1 + Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right); \quad (33.2)$$

- and equilibrium of torques with respect to the center of ISIC,

$$N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = f N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (33.3)$$

therefore we can write

$$N_1 = f N_1 + N_2 + f N_2. \quad (33.4)$$

By eliminating the normal forces, we obtain

$$\underbrace{\frac{1 + 2f - f^2}{1 - 2f - f^2}}_K = \frac{\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})}{\cos(\varphi + \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}, \quad (33.5)$$

and from there

$$\tan \varphi = \frac{K - 1}{K + 1} = \frac{2f}{1 - f^2}. \quad (33.6)$$

For  $f = 0,3$ , we obtain  $\varphi \approx 33,4^\circ$ .

**34** Let's start by writing the equation of motion of a car on a flat surface,

$$ma_- = fmg \Rightarrow f = \frac{a_-}{g}. \quad (34.1)$$

On an inclined plane, sloped at an angle  $\alpha$ , this changes slightly to

$$ma = mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha. \quad (34.2)$$

Compared to equation 34.1, there is one more term on the right-hand side – the acceleration of the car is still caused by the friction of the wheels on the road, but it diminishes with increasing the slope angle; and the motion is also affected by a component of the gravitational force parallel to the inclined plane. The acceleration is therefore

$$a = g \sin \alpha + f g \cos \alpha. \quad (34.3)$$

### Analytical solution

The shortest acceleration time is obtained by maximising  $a$ . We therefore need to differentiate  $a$  with respect to angle  $\alpha$  and find out when the derivative is equal to zero. We get

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} &= g \cos \alpha - f g \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0, \\ \cos \alpha &= f \sin \alpha, \\ \tan \alpha &= \frac{1}{f} = \frac{g}{a_-}. \end{aligned} \quad (34.4)$$

We will use trigonometric identities 25.6, substituting for  $\sin \alpha$  and  $\cos \alpha$  in 34.3. After minor rearrangement using 34.1, we get

$$a = \sqrt{a_-^2 + g^2}. \quad (34.5)$$

Now we just need to find the acceleration of the car on the flat surface and calculate the acceleration time downhill. We will use the fact that for uniformly accelerated motion,  $v = at$ , therefore

$$t = \frac{v}{\sqrt{a_-^2 + g^2}} = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{v}{t_-}\right)^2 + g^2}}, \quad (34.6)$$

where  $v$  is the maximum speed to which the car accelerates, and  $t_-$  is the acceleration time on the flat surface. We substitute the values and get  $t \doteq 1,51$  s.

### Numerical solution

If we do not want to differentiate, we can directly search for the maximum  $a$  from equation 34.3, for example, by a linear search within the interval using a calculator. If we draw the function from equation 34.3, it clearly has only one maximum, so it is sufficient to find the first decrease and, if necessary, refine the search step. This gives us the same intermediate result  $\alpha \approx 0,595$  rad  $\approx 34,1^\circ$ , from which we can calculate the acceleration and time.

**35** When we look at the Earth and its shadow from a distance, its shadow is an infinite cylinder with a circular base.<sup>8</sup> For every fixed point on Earth's surface, the Sun sets when the Earth's rotation carries that point across the shadow boundary.

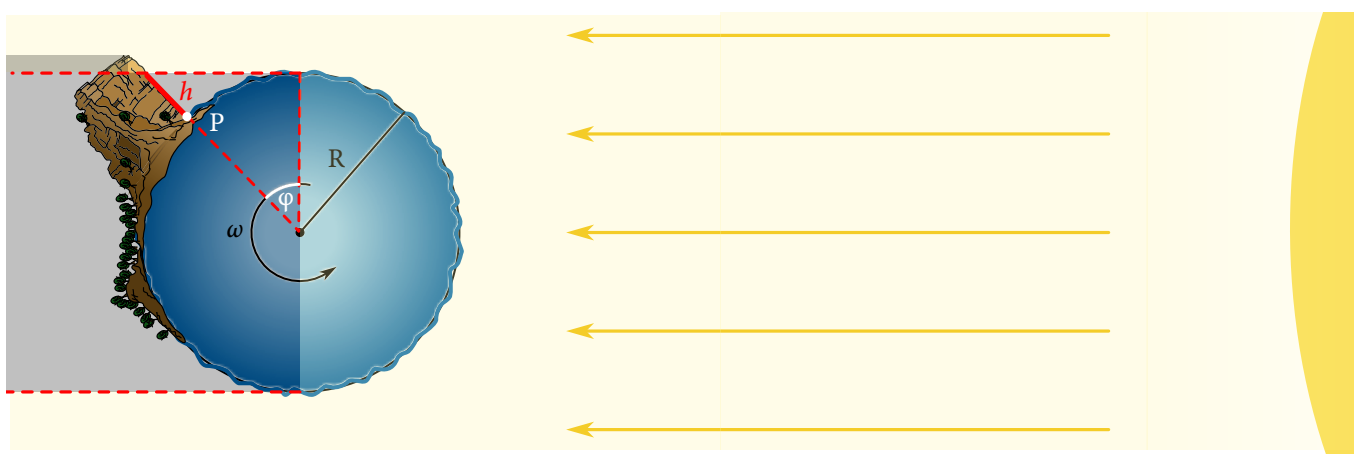


Figura 35.1: *Earth casting a shadow*

And not only on the surface – the same applies to points on the cliff. If the height of the cliff is negligible compared to the radius of the Earth – which it should be – then for any point on the cliff at height  $h$ , the Sun will set when point  $P$  reaches a depth of  $h$  inside the shadow, i.e., a distance of  $h$  from the cylinder's surface. The height of the shadow is therefore equal (in the case of a not very tall cliff) to the perpendicular distance of point  $P$  from the cylinder's surface.

<sup>8</sup>Considering its finite dimensions and distance from the Sun, it is actually a cone, but this is not important for our purposes.

And that's all. Point  $P$  moves along a circle with radius  $R_{\oplus}$  at an angular velocity  $\omega = \frac{2\pi}{1\text{d}} = \frac{2\pi}{86\,400\text{ s}}$ . The projection of such a motion onto a plane perpendicular to the sun's rays is harmonic motion with the same angular velocity, and its acceleration near the maximum deflection is given by

$$a = \omega^2 R_{\oplus} \approx \left( \frac{2\pi}{86\,400\text{ s}} \right)^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6\text{ m} \doteq 0,034\text{ m/s}^2. \quad (35.1)$$

### Lumberjack's solution

It is also possible to obtain the same result with brute force. Let's mark the central angle between the vertical cliff and the terminator  $\varphi$ . Then, from the right triangle containing this angle and enclosed by the shadow's envelope, we can write

$$R_{\oplus} + h(\varphi) = \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.2)$$

When the Earth rotates by an angle  $d\varphi$ , the height to which the shadow moves increases by

$$dh = \frac{R_{\oplus}}{\cos(\varphi + d\varphi)} - \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.3)$$

For a low cliff, the angle  $\varphi$  is very small, so we can use the approximations  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$  and  $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$ . Then we obtain

$$dh \approx R_{\oplus} \left[ \frac{1}{1 - \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} \right] \approx R_{\oplus} \left[ 1 + \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2} - \left( 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \approx R_{\oplus} \varphi d\varphi. \quad (35.4)$$

Since the Earth rotates with a constant angular speed  $\omega$ ,  $\varphi = \omega t$ , and therefore

$$dh \approx R_{\oplus} \omega t \omega dt. \quad (35.5)$$

From this, we can immediately write the speed of the shadow's ascent along the cliff

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \approx R_{\oplus} \omega^2 t \quad (35.6)$$

and therein we recognize the speed of uniformly accelerated motion with acceleration  $a = \omega^2 R_{\oplus}$ .

**36** Firstly, Jacob thought about what do they mean by activity of natural and enriched uranium. He remembered the formula which relates the number of decayed atoms  $\Delta N$  after time  $\Delta t$  and total number of atoms  $N$  in given time

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t, \quad (36.1)$$

where  $\lambda$  is the decay constant. This equation leads to

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (36.2)$$

known as exponential decay, where  $N_0$  is the number of atoms in time  $t = 0$ .

The last thing we need to express is the half-life, after which half of the atoms decay. That means, that the number of atoms decreases to half of the original amount,  $N = \frac{N_0}{2}$ , which, after substituting into the exponential decay formula, gives the decay constant

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (36.3)$$

Next, using the knowledge above, he can find the activity

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N. \quad (36.4)$$

In order to calculate how much higher is the activity of enriched uranium compared to natural uranium, he needs to find the ratio  $\frac{A_{\text{enriched}} - A_{\text{natural}}}{A_{\text{natural}}}$ , where he can utilise his knowledge of the ratio of number of  $^{235}\text{U}$  and  $^{238}\text{U}$  atoms in both uranium species, and he knows their half-lives  $T_{1/2}^{235} = 7 \cdot 10^8$  a a  $T_{1/2}^{238} = 4,46 \cdot 10^9$  a, too. From the half-lives and the formula for activity, he knows that the decay constant  $\lambda$  of  $^{235}\text{U}$  is  $k$ -times higher than the one of  $^{238}\text{U}$ . Precisely, it is

$$k = \frac{T_{1/2}^{238}}{T_{1/2}^{235}} \doteq 6,371. \quad (36.5)$$

Then, if he denotes the ratio of  $^{235}\text{U}$  in enriched uranium  $a$ , and  $b$  in natural uranium, he gets the expression for relative change of activity,

$$\frac{A_{\text{enriched}} - A_{\text{natural}}}{A_{\text{natural}}} = \frac{k\lambda a N + \lambda(1-a)N}{k\lambda b N + \lambda(1-b)N} - 1 = \frac{(a-b)(k-1)}{1+b(k-1)} \doteq \frac{(0,03 - 0,0072) \cdot (6,371 - 1)}{1 + 0,0072 \cdot (6,371 - 1)} \doteq 11,8 \%. \quad (36.6)$$

**37** First, let us note that if the axis of rotation is perpendicular to the plane of the amulet, the way in which the individual cut-out squares are rotated does not affect the moment of inertia of the amulet. Let us call the first circle from which we cut out a square the first iteration. Now, when we inscribe another circle and cut out the inscribed square, we will call this the second iteration, and so on. The moment of inertia of a circle with radius  $r$  is  $I_{\bigcirc} = \frac{1}{2}mr^2$  and that of a square is  $I_{\square} = \frac{1}{6}ma^2$ , where  $a$  is the side of the square.

Let's look at the first iteration of our problem. We have the radius of the circle of the first iteration  $r_1 = r$  and an inscribed square with a side length of  $a = \sqrt{2}r$ , which we can easily see. We know that the diagonal of the square is  $2r$ . From the right-angled triangle defined by two adjacent vertices of the square and the centre of the circle, we see that

$$\cos 45^\circ = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \sqrt{2}r. \quad (37.1)$$

The moment of inertia and the area of the first iteration are simply

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \frac{1}{2}\sigma S_{\bigcirc}^{(1)}r_1^2 - \frac{1}{6}\sigma S_{\square}^{(1)}a_1^2 = \frac{1}{2}\pi\sigma r_1^4 - \frac{4}{6}\sigma r_1^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r_1^4 \\ S^{(1)} &= S_{\bigcirc}^{(1)} - S_{\square}^{(1)} = \pi r_1^2 - a_1^2 = (\pi - 2)r_1^2. \end{aligned} \quad (37.2)$$

The moment of inertia  $I^{(n)}$  and the area  $S^{(n)}$  of the following iterations are calculated similarly, only for different values of  $r_n$ . All that remains is to determine the relationship  $r_n = r_n(r, n)$ . For the first iteration,  $r_1 = r$ . The second iteration is a circle inscribed in a square, and therefore

$$2r_2 = a_1 \Rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}r. \quad (37.3)$$

Similarly, the following applies

$$r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_2 = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad (37.4)$$

and thus, in general, for  $r_n$

$$r_n = \frac{\sqrt{2}}{2}r_{n-1} = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}. \quad (37.5)$$

All that remains is to calculate the infinite series that appear,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)} = (\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = r^2(\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} \\ &= r^2(\pi - 2) \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2r^2(\pi - 2), \end{aligned} \quad (37.6)$$

and for the moment of inertia

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right) \sigma r_n^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right) \sigma r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4n-4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right) \sigma r^4 \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right) \sigma r^4 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right) \frac{m}{S} r^4, \end{aligned} \quad (37.7)$$

where we used the fact that the sum of a geometric series with a common ratio  $0 < q < 1$  is  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

After substituting  $S$  into  $I$ , we get

$$I = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}}{\pi - 2} m r^2 = \frac{3\pi - 4}{9\pi - 18} m r^2. \quad (37.8)$$

**38** Let us start with the formula for the parabolic city,

$$h(r) = kr^2, \quad (38.1)$$

where  $r$  is the distance of a point on the paraboloid surface from the rotation axis, that is, from the city centre. We do not have to add a constant, since we are interested only in the height difference. For the highest point of the city, it holds that

$$H = kR^2, \quad (38.2)$$

where  $H$  is the sought height and  $R$  is given in the problem statement.



We still do not know the coefficient  $k$ . It can be found from the derivative of parabola in the point  $[R; H]$ . We know that the resulting apparent gravitational force must be perpendicular to the paraboloid surface. Derivative of the formula of parabola in the point  $[R; H]$ ,  $2kR$ , is the slope of tangent to the surface of parabola. The slope of a line is found as  $\tan \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , where  $\Delta y = a_c$  and  $\Delta x = g_\sigma$ , so

$$2kR = \frac{a_c}{g_\sigma} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{a_c}{2g_\sigma R}. \quad (38.3)$$

After substituting  $k$  into the equation 38.2, we have

$$H = \frac{a_c R}{2g_\sigma}. \quad (38.4)$$

We still need to express  $a_c$ . We find it using the Pythagorean theorem,

$$a_c = \sqrt{g^2 - g_\sigma^2}. \quad (38.5)$$

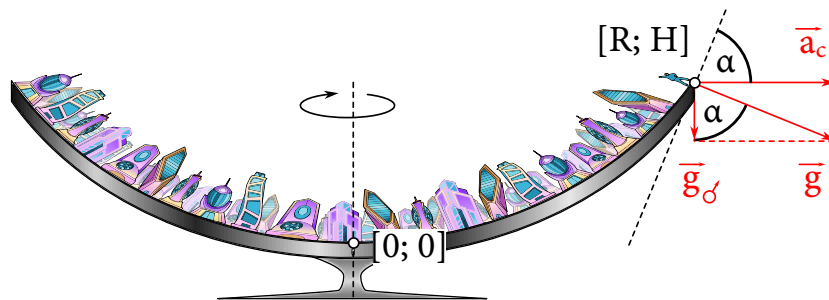


Figura 38.1: Vertical cross section of the parabolic city

The result is therefore

$$H = \frac{R\sqrt{g^2 - g_\sigma^2}}{2g_\sigma} \doteq 1296 \text{ m}. \quad (38.6)$$

**39** Let us denote the volume of the lollipop  $V$ . Its shape is such that at any height, the cross section is an ellipse with a constant semi-major axis  $a$  and a semi-minor axis that scales linearly with the depth, as shown in figura 39.1.

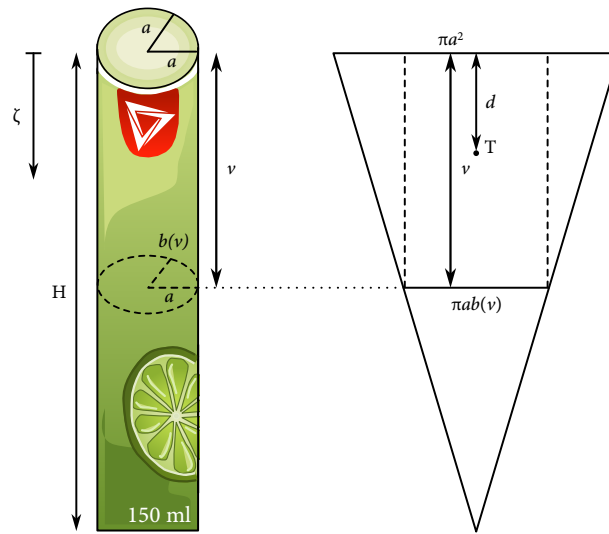


Figura 39.1: Geometry of the lollipop

If we define a coordinate  $\zeta$  with origin at the top and increasing downwards,  $b$  scales as

$$b(\zeta) = \frac{H - \zeta}{H} a, \quad (39.1)$$

and the area of the cross section at depth  $\zeta$  is

$$S(\zeta) = \pi ab(\zeta) = \pi a^2 \frac{H - \zeta}{H}. \quad (39.2)$$

Notice that the cross section area decreases linearly with  $\zeta$ . Therefore, a planar analogy to this „deformed cone” is a triangle, which has the same property. For calculating the centre of mass, it is therefore equivalent to a triangle with a base of length  $\ell = S(0) = \pi a^2$  and the same altitude  $H$ . The area of the triangle corresponds to the volume of the lollipop  $V$ , so

$$V = A = \frac{1}{2} \ell H = \frac{1}{2} \pi a^2 H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2V}{\pi a^2}. \quad (39.3)$$

Now we are interested in the situation after George has eaten half of the lollipop, so we need to find the height of the part whose volume is half the original volume  $V$ . Let us denote the volume of the lollipop inside  $[0; \zeta]$  as  $\Theta(\zeta)$ . This corresponds to the area of a trapezoid we can get by truncating the triangle at a distance of  $\zeta$  from the base,

$$\Theta(\zeta) = \frac{\pi a^2 + \pi ab(\zeta)}{2} \zeta = \pi a^2 \frac{1 + \frac{H - \zeta}{H}}{2} \zeta = \pi a^2 \zeta \left( 1 - \frac{\zeta}{2H} \right). \quad (39.4)$$

When the volume decreases to half its original value, we can write  $\zeta = v$ , and thus  $\Theta(v) \stackrel{!}{=} \frac{v}{2}$ . Therefore

$$\frac{1}{2}\pi a^2 H = \pi a^2 v \left(1 - \frac{v}{2H}\right) \Rightarrow v = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} H, \quad (39.5)$$

and George needs to push the lollipop that far out from its wrapper.

What work is required to do that? The centre of mass will have moved by  $v$  upwards, which is the same as if he had taken every part he eats to the top and then removed it – which effectively means he needs to bring the centre of mass of the missing part to the top. Hence we need to find out where the centre of mass was originally located.

Let's assume it was at depth  $d$ . In the two-dimensional case this corresponds to the location of the centre of mass of the trapezoid, which is a simple weighted mean of centres of masses of a rectangle and a triangle,

$$d = \frac{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v \cdot \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v \cdot \frac{v}{3}}{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} H. \quad (39.6)$$

The amount of work is equal to the change in potential energy, or

$$W = \frac{V}{2} \rho g d + \frac{V}{2} \rho g v = \frac{4 - \sqrt{2}}{6\pi} \frac{V^2}{a^2} \rho g \approx 76 \text{ mJ}. \quad (39.7)$$

**40** We are interested in an object moving over distance  $s$  with constant acceleration  $a$ . Distance grows with time as  $s = \frac{1}{2}at^2$  and speed as  $v = at$ . By combining these two functions we get

$$v(s) = \sqrt{2as}. \quad (40.1)$$

Now we want to determine the average measured speed along the drag strip, or the mean speed, except that it is averaged not over time but over distance. The function  $v(s) = \sqrt{2as}$  is increasing between  $v(0) = 0$  and  $v(s) = \sqrt{2as} = v_{\max}$ , and its shape is half of a parabola,  $y = \sqrt{x}$ . What we need to find is the mean height of this curve.

To do that, we need to know the area under this curve. If we are able to integrate, it is easy, we just evaluate

$$\langle v \rangle_x = \frac{1}{s} \int_0^s \sqrt{2ax} \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as}. \quad (40.2)$$

If we are not, or just do not want to, we can use an old Greek trick, a *quadrature of the parabola*<sup>9</sup>. Let us cut out the area between the line connecting the ends of the curve. The area of the triangle is trivial, and what remains is bounded by a parabola and a line. It is not difficult to show that the area of this shape is equal to  $\frac{4}{3}$  of the area of an inscribed triangle with the third vertex in the middle of the interval. After removing this triangle, we are left with two smaller areas, again bounded by a line and a parabola, and this leads to a geometric series with a common ratio  $\frac{1}{4}$ . The area is naturally the same as in equation 40.2.

<sup>9</sup>Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, Archimedes, 3rd century BC. Modern version available on [Wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrature_of_the_parabola).

Now we need to find the actual average speed of Tom's car, or the mean value over time. This is simply the ratio of the total distance and total time<sup>10</sup>

$$\langle v \rangle_t = \frac{s}{\sqrt{\frac{2s}{a}}} = \sqrt{\frac{as}{2}}. \quad (40.3)$$

The ratio of the average speed over distance to average speed over time is therefore

$$\frac{\langle v \rangle_x}{\langle v \rangle_t} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{as}}{\sqrt{\frac{as}{2}}} = \frac{4}{3}. \quad (40.4)$$

---

<sup>10</sup>Note that this definition is consistent with the previous definition of the mean. Average speed is

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T at \, dt = \frac{\frac{1}{2}aT^2}{T} = \frac{s}{T}.$$

# Odpowiedzi

1 0 cm

2  $v$

3 1 g i 5 g, czyli Ziemia i Pluton

4 400 ml/s

5  $\frac{826 + 160\sqrt{2}}{343} \text{ s} \doteq 3,07 \text{ s}$

6 72 s, zaakceptuj również 01:12.

7 22:20

8 100 %, czyli cała objętość pomieszczenia.

9 5,47 km

10 2,5 J, zaakceptuj wyniki w przedziale 2,4 J – 2,5 J.

11  $s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v} = \frac{v^2 t}{c - v} + vt$

12 A-49

13  $s \left( 1 + \frac{v}{u} \right)$

14 25,4°

15 3,20 kN, zaakceptuj również 3,14 kN.

16  $\sqrt{8} \text{ s} \doteq 2,83 \text{ s}$

17  $\frac{1}{3}g$

18

$\left\{ \frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R \right\}$

N, H, A, B, Y, I, w *tej* kolejności.

56 mm<sup>2</sup>

7 %

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{4 + \cot^2 \alpha}}$$

74 %

10 m, zaakceptuj również 9,8 m.

72 575 beknicie · mrugnicie<sup>3</sup>

$$\frac{23255}{7776} \text{ MPa} \doteq 3,0 \text{ MPa}$$

0,302 s

$$-\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} \text{ C} \doteq -2,47 \text{ C, zwróć uwagę na znak.}$$

24 Hz

1400 %

0,26 N

33,4°

1,51 s, zaakceptuj wyniki w przedziale 1,51 s – 1,52 s.

34 mm/s<sup>2</sup>

36 11,8 %

37  $\frac{3\pi - 4}{9\pi - 18}mr^2 \doteq 0,528mr^2$

38 1296 m

39 76 mJ, zaakceptuj wyniki w przedziale 76 mJ – 77 mJ.

40  $\frac{4}{3}$

### Autorzy

Martin ,Kvík‘ Baláž  
Šimon Borovský  
Jakub Hluško  
Lucia Kleščová

Katarína Magdolenová  
Miroslav Pajger  
Patrik ,pa3k‘ Rusnák  
Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga  
Jaroslav Valovčan  
Soňa Vasiľová  
Tomáš ,Mözög‘ Vörös

### Rysunki

Katarína Nedelková

Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga

### Edytorzy

Martin ,Kvík‘ Baláž

### Tłumaczenie

Piotr Grygiel  
Mirela Kaczmarek  
Andrzej Karbowski

Maciej Matyka  
Brygida Mielewska  
Michał Piłat

Mateusz Zawadzki  
Kamil Żmudziński