

Дорогі друзі,

ви тримаєте у руках збірник задач 28 випуску Physics Náboj. У збірнику містяться усі задачі, які ви могли бачити в цьому році на нашому турнірі. До задач додаємо і типові розв'язки, котрі, сподіваємося, будуть для вас корисними. Якщо якийсь із розв'язків є незрозумілим, звертайтеся до нас не вагаючись, будемо раді усе пояснити.

Цей збірник був складений та виданий завдяки суттєвій допомозі багатьох людей, які брали участь у розвитку турніру Náboj Physics. Більшість із нас є студентами факультету математики, фізики та інформатики Університету Коменського в Братиславі, а деякі також активно беруть участь в організації Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

Сподіваємось, що Náboj Physics продовжуватиметься у міжнародному вимірі і наступного року. За міжнародну співпрацю дякуємо локальним організаторам: Katarína Nedelková (Братислава), Marián Kireš (Кошице), Jakub Kliment (Прага), Lenka Plachtová (Острава), Ágnes Kis-Tóth (Будапешт), Urszula Goławska (Гданськ), Andrzej Karbowski (Торунь), Maciej Matyka (Вроцлав), José Francisco Romero García (Мадрид), Dmytro Rzhemovskyi (Відень), Vasyl Rizak (Ужгород) а João Rico (Лисабон). Результати турніру ви можете переглянути на нашому сайті.

FKS – це заочний вид олімпіади з фізики. Приблизно раз на місяць ми публікуємо різні цікаві фізичні задачі, розв'язки яких ви можете надіслати нам у встановлені терміни. Ми нараховуємо за це відповідну кількість балів і запрошуємо найкращих до тижневого навчального табору наприкінці кожного семестру. Більше інформації можна знайти на сторінці <https://fks.sk/>.

Від імені всієї команди організаторів ми сподіваємося, що вам сподобався Náboj Physics 2025 і щиро переконані, що побачимося на турнірі і наступного року в якості учасників чи організаторів.

Jaroslav Valovčan
головний організатор

Результати турніру, архів задач та іншу корисну інформацію розміщено на <https://physics.naboj.org/>.

Завдання

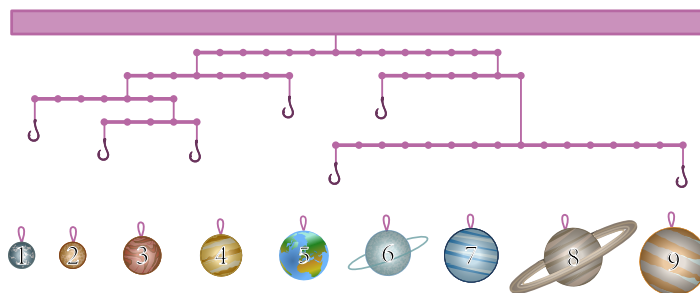
1 Аня любить розв'язувати sudoku з недільної газети. Але ті завдання здаються їй недостатньо складними. Тому вона придумала власну цікаву модифікацію: вона уявляє, що кожна сторона клітинки sudoku має довжину 1 см, а кожна клітинка важить стільки грамів, яке число в ній записане. Якою буде відстань між центром мас такого заповненого sudoku та його геометричним центром, після того як Аня розв'яже головоломку?

8	7	9		3		4		6
		6		7	9		1	
1			2	4	6	7		9
9		7	3			5	6	4
	2		6		4		9	7
	5			8		2		1
5	6	3	7		8	1	4	
7			4	1	2	6		
4	1		5	6			7	8

2 Сашко сидить у купе поїзда й насолоджується поїздом з Тренчина до Кошице. Він сидить спиною до напрямку руху, і в дзеркалі, прикріпленому на протилежній стіні купе, бачить у відображенні, як до нього наближається світлофор, що стоїть безпосередньо біля колії. З якою уявною швидкістю наближається до Сашка зображення світлофора в дзеркалі, якщо поїзд рухається вперед зі швидкістю v ?

3 Геленка отримала від Квіка на свої перші іменини музичний мобіль з іграшками над ліжечком. І не якийсь звичайний, а астрономічний: на легких паличках різної довжини може висіти до семи м'яких планеток. Квік пам'ятає, що колись планет було дев'ять, тому саме стільки він і замовив до мобіля. Планетки мають маси від 1 до 9 г (див. рис.) і можуть бути підвішені на гачки.

Квік має підвісити на кожен гачок лише одну планетку так, щоб усі важелі перебували в рівновазі. Які планетки (вказіть їх маси) він при цьому **не використає**?

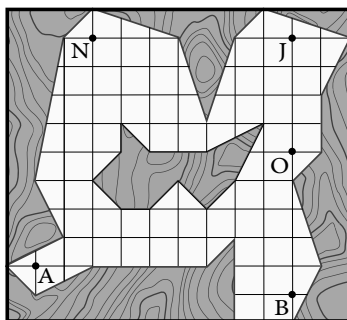


4 Юрко нещодавно був у Карпатах і піднявся з туристичною групою на Бребенескул. На його подив, виявилося, що це не гора, а найвисокогірніше озеро України (1801 м над рівнем моря) і вода там була холодна. Тож він вирішив, що краще скупатися вдома. Оскільки він досить кмітливий, то швидко знайшов у ванній кімнаті змішувач з двома вентилями, які регулюють подачу гарячої та холодної води.

Гаряча вода має температуру $68\text{ }^{\circ}\text{C}$. Проте Юрко хоче, щоб температура води після змішування була $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ і текла з швидкістю 600 мл/с . З якою швидкістю (у мл/с) має надходити холодна вода температурою $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ у змішувач, щоб Юрко був задоволений?

5 У темній печері стоять Нінка (N), Адам (A), Барбара (B), Олександр (O) та Яна (J). Нінка, керівниця пригодницької експедиції, хоче з'ясувати, де знаходяться інші. Тому вона вигукує свою літеру – «N». Через пів секунди після того, як Адам її почує, він вигукує «A». Потім те саме робить Барбара після того, як почує вигук Адама, і так далі, поки Нінка не почує, як Яна вигукне свою літеру. Скільки часу від моменту вигуку Нінки пройде, перш ніж вона почує усе слово «NABOJ» і зрозуміє, що ніхто не загубився?

Сторона одного квадрата в сітці становить 10 метрів, а час реакції між «вухами» і «вустами» всіх учасників однаковий – $0,5\text{ с}$. Звукові хвилі не поширюються крізь стіни.



6 Патрік зазвичай бігає на стадіоні по колу. Відтоді, як отримав розумний годинник, він завжди вимірює свій середній темп. Під час останнього тренування він з'ясував, що між третім і четвертим колом його середній час на коло покращився рівно на дві секунди — з $01:20$ до $01:18$.

Скільки часу йому знадобилося, щоб пробігти четверте коло?

7 Сучасні навігатори мають безліч корисних функцій. Вони, наприклад, можуть показувати, з якою швидкістю потрібно їхати, щоб встигнути до пункту призначення вчасно. Марсель їде до аеропорту з постійною швидкістю. Він налаштував у навігаторі, що йому потрібно прибути о $22:00$. О $21:00$ навігатор показував, що він має їхати зі швидкістю 120 км/год , щоб устигнути. А вже о $21:30$ навігатор оновив прогноз — тепер, щоб прибути в аеропорт вчасно слід їхати зі швидкістю 150 км/год .

Коли насправді Марсель прибуде до аеропорту, якщо рухатиметься зі своєю постійною швидкістю?

8 Соня купила нову скляну лампу у формі прозорого куба. Матеріал, з якого зроблений куб, має показник заломлення 1,5 а джерело світла розміщено в центрі куба. Соня вирішила одразу випробувати свою лампу й повісила її точно посеред своєї кубічної кімнати. Яка частина кімнати Соні буде освітлена цією лампою?

9 Шимон подорожує швидкісним потягом Сінкансеном у своїй омріяній поїздці в/ Японії. Потяг, у якому він сидить, від станції рушає з прискоренням $2,6 \text{ км/год/с}$, а його максимальна швидкість становить 320 км/год . На якій відстані від станції потяг разом із Шимоном досягне своєї максимальної швидкості?

10 Наталочка взяла з собою в подорож шоколадне яйце з іграшкою всередині. Але з'ївши яйце вона залишилася розчарованою, бо іграшкою виявилася звичайна дерев'яна кулька радіусом 2 см і густиною 750 кг/м^3 . Тому вона кинула її в озеро. Кульку відразу побачив підводник Мірко, схопив і потягнув на самісіньке дно. Яку роботу він при цьому виконав над кулькою, якщо глибина озера становить 30 м ?

Знехтуйте роботою, що необхідна для занурення кульки безпосередньо під поверхню води.

11 Машиніст електропоїзда наближається до залізничного переїзду зі швидкістю v . Раптом він помічає, що на переїзді стоїть автомобіль. У відчайдушній спробі уникнути зіткнення він починає сигналізувати, оскільки сподівається на те, що коли водій автомобіля почує сигнал, то він встигне з'їхати з рейок за час t .

На якій мінімальній відстані перед переїздом повинен подати сигнал машиніст, якщо швидкість звуку дорівнює c ?

12 Патрік під час підготовки до підсумкової атестації робив нотатки на одному великому аркуші, щоб усе було зручно зібрано в одному місці. Цей аркуш був настільки великим, що покривав усю підлогу Патрікової кімнати. Після іспитів Патрік відчув велике полегшення, адже якби він продовжував писати далі й далі, то зрештою заповнив би аркуш, яким можна було б обгорнути всю Землю. Який А-формат аркушу потрібно використати Патріку, щоб одного аркуша вистачило для обгортання цілої земної кулі?

Аркуш формату А0 має площу 1 м^2 . Аркуш формату А1 отримаємо, якщо аркуш формату А0 розріжемо навпіл уздовж коротшої сторони, і так далі. Під час пакування Патрік може розрізати/склеювати аркуші.

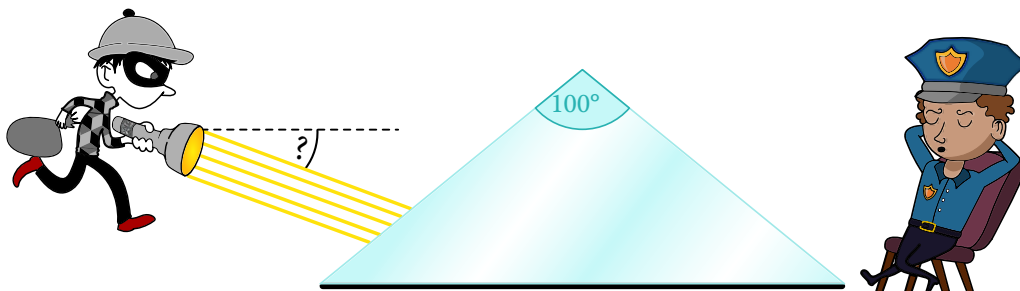
13 Недавно Сабінка відвідала авіашоу. Там було доволі прохолодно, бо увесь час їй зліва в лице дув вітер швидкістю v . Наприкінці шоу перед Сабінкою пролетів літак справа наліво зі швидкістю u відносно землі. Увесь час польоту повз трибуни він випускав кольоровий дим, який відносно повітря дуже швидко перестав рухатися.

Яку довжину мав димовий слід, якщо довжина трибуни була s ?

14 Роберта збирається викрасти з музею кришталеву тригранну призму з показником заломлення 2,4. Поперечним перерізом цієї призми є рівнобедрений трикутник із кутом при вершині 100° , який

показано на малюнку. Роберта мусить освітити її паралельним пучком світла, однак не хоче, щоб це помітив охоронець музею з протилежного боку призми. На який мінімальний кут вона повинна нахилити ліхтарик униз відносно горизонталі, щоб на інший бік призми гарантовано не пройшов жоден промінь, незалежно від того, на яку частину бічної поверхні вона світитиме?

Нижня грань призми є абсолютно чорною і поглинає всі промені, що на неї падають.



15 Кай облаштовує вдома спортзал. Саме зараз він у ліфті масою 250 кг піднімає до квартири нову гантелю масою 20 кг. Оскільки до спортзалу він ходив не часто, Кай важить лише 60 кг. Ліфт рухається вгору з постійною швидкістю 4 м/с, але Кай не хоче гаяти часу й одразу починає тренуватися з гантелею.

З якою силою натягується трос, що утримує ліфт у момент, коли Кай опускає гантелю вниз із прискоренням 5 м/с²?

16 О пів на третю ночі Само кидає з вікна яйця в невідомого музиканта, який ховається десь у тіні під гуртожитком і віртуозно грає на губній гармошці. Якщо Само кине яйце вертикально вгору, то воно впаде на землю через чотири секунди. Якщо ж кине його вниз із тією ж швидкістю — достатньо двох секунд.

Скільки часу падатиме яйце, якщо Само просто впустить його?

17 Оленка хотіла хоч на якийсь час зайняти свого галасливого племінника. Коли вже не допомагали іграшки, конструктор чи навіть погрози дерев'яною ложкою, вона дістала з шафи невагомий блок з невагомою мотузкою і підвісила на його кінцях два тягарці — один масою m , а другий масою $\frac{m}{2}$.

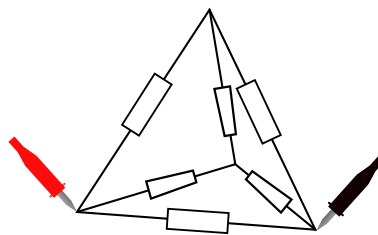
Племінник деякий час із зацікавленням спостерігав, як рухаються тягарці, але невдовзі знову вирушив на пошуки галасливих розваг. Однак Оленка цього навіть не помітила, оскільки замислилась: «А з яким прискоренням рухаються ці тягарці?»

Допоможіть Оленці знайти вираз для прискорення тягарців.

18 Вкажіть суму номерів правильних тверджень.

- 1 Тіло перебуває на коловій орбіті. Збільшення його лінійної швидкості завжди призводить до зменшення періоду обертання.
- 2 Коли Земля на своїй орбіті знаходиться ближче до Сонця, то вона рухається швидше.
- 4 Зима настає тому, що орбіта є еліптичною, і тоді Земля перебуває найдалі від Сонця.
- 8 Кожен супутник, який рухається по коловій орбіті Землі, має однакову швидкість.
- 16 Геостаціонарні супутники можуть розташовуватися лише над екватором.
- 32 У системі двох тіл легше тіло завжди рухається навколо спільного центра мас по еліпсу.

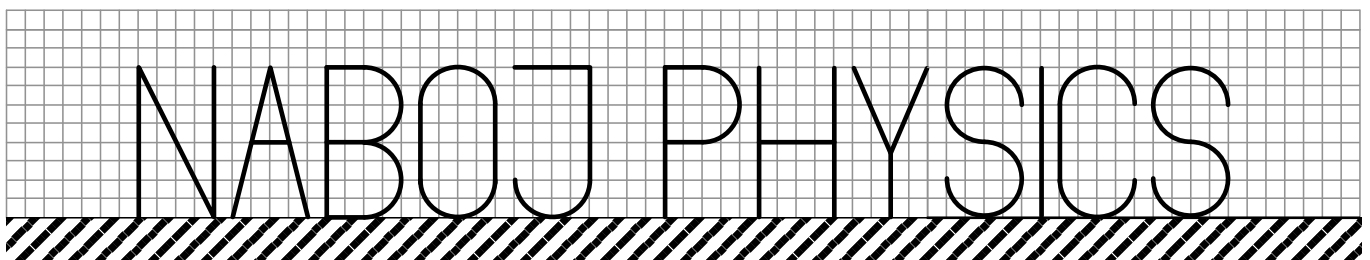
19 Ми склали правильний тетраедр з шести однакових резисторів опором R і до двох його вершин підключили омметр (див. рис.). Які значення загального опору між сусідніми вершинами тетраедра ми отримаємо, якщо одну сторону тетраедра з резистором повністю видалити?



20 Допоможіть нам упорядкувати літери в назві нашого змагання за їхньою стійкістю. Під стійкістю ми розуміємо кількість роботи яку необхідно виконати щоб перекинути літеру.

Літери виготовлені з однорідних твердих стрижнів у формі відрізків або частин кіл із сталою малою, але **ненульовою** товщиною, мають гострі краї, і під час перекидання повинні залишатися в площині паперу.

Літери впорядкуйте **у порядку спадання стійкості**. Ті, що не мають стійкого положення, до результату **не включайте**.

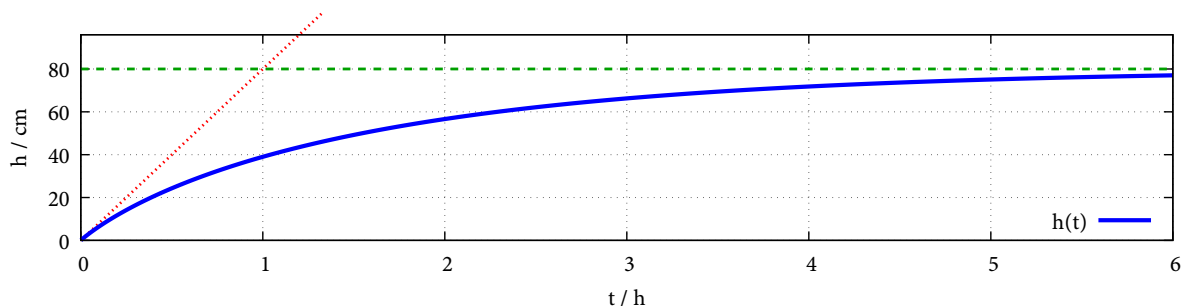


21 Садівник Адам купив на своє подвір'я велику водяну цистерну у формі циліндра з площею основи 1 м^2 . Під час попереднього тривалого посушливого періоду він використав усю воду. Коли нарешті пішов дощ, то резервуар почав наповнюватися.

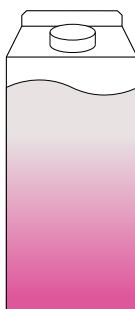
Адам має у баку сенсор і застосунок, який показує графік зміни висоти рівня води з часом. Спочатку він радів, що вода прибуває швидко (див. пунктирну лінію — дотичну до графіка в моменті часу 0).

Однак за кілька годин він помітив, що хоча дощ іде з тією ж інтенсивністю, але висота рівня води не перевищує 80 см (штрихова лінія). З'ясувалось, що у дні бака є невеликий отвір.

Яка площа цього отвору?



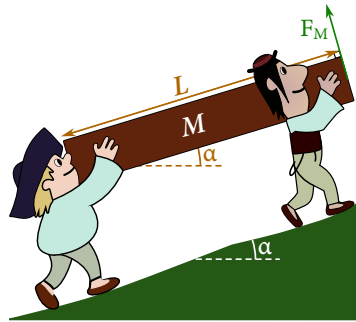
22 Богдан купив 1 літр полуничного йогуртового молока з 10 % об'єму йогурту (та 90 % об'єму води) і поставив його в холодильник. До ранку молоко розшарувалося так, що зверху залишилася чиста вода, а концентрація йогурту лінійно зростала до самого дна. Коли Богдан зранку наливає молоко у склянку об'ємом 400 мл, він забув струсити пляшку. Згадав про це лише тоді, коли вже налив 200 мл. Після цього він збовтав залишок молока й долив склянку доверху. Яку відсоткову концентрацію йогурту має тепер Богданове молоко в склянці?



23 Матвій і Кіндрат несуть вантаж угору схилом з кутом нахилу α . Вантаж має форму довгого тонкого циліндра з довжиною L та масою M . Оскільки вантаж важкий, його несуть обидва. Матвій тримає передній кінець, Кіндрат — задній. Проте Матвій полегшує собі роботу і прикладає силу не вгору, а перпендикулярно до осі вантажу.

Яке співвідношення сил, якими Матвій і Кіндрат піднімають вантаж?

Матвій і Кіндрат однакового зросту, тому несуть вантаж на однаковій висоті над поверхнею схилу.



24 На якій частині поверхні Землі (у відсотках) можна іноді побачити Сонце точно на півночі (на будь-якій висоті над горизонтом)?

Вважайте Землю ідеальною кулею, а сонячні промені — паралельними. Заломленням світла в атмосфері знехтуйте.

25 Стрілець Дано готується до чемпіонату світу зі стрільби з лука. Мішень розташована на відстані 70 м, а її центр знаходиться на тій самій висоті, що й лук. На яку висоту над центром мішені він повинен прицілитися, щоб стріла влучила точно в центр, якщо вона вилітає з лука зі швидкістю 50 м/с?

Існують два способи досягти цього теоретично. Однак під час змагань зі стрільби з лука стріляють прямо (пласка траєкторія), тому вкажіть менше із можливих отриманих значень.

26 Американці готові вимірювати що завгодно, тільки не в одиницях СІ. Наприклад, Джон Доу створив власну систему одиниць, засновану на одиницях glg–grg–mrk, визначених так:

- 1 glg — це об'єм, який він може проковтнути, причому напій об'ємом одна пінта він випиває за 20 glg-iv;
- 1 grg — це інтенсивність звуку, яку він створює своєю відрижкою, при цьому рівень звукової інтенсивності його відрижки становить 100 дБ
- 1 mrk — це час, який триває одне його моргання, а за секунду він може моргнути двічі.

Якою є його маса, виражена в його системі одиниць, якщо він важить 200 фунтів?

Рівню звукової інтенсивності 0 дБ відповідає інтенсивність 1 nWt/m^2 .

27 Працівник заводу поповнює запаси азоту. У нього є одна велика порожня ємність з об'ємом 10 л, яку потрібно заповнити. Як завжди, о пів на п'яту ранку приїхав постачальник і витяг із фургона п'ять менших балонів з об'ємом 2 л, які заповнені азотом під тиском 5 МПа.

Процедура наповнення така: постачальник з'єднує ємність і один із балонів трубою з вентилем, який потім відкриває — газ переміщується до вирівнювання тисків. Після вирівнювання температури газу з навколишнім середовищем труба від'єднується (ізотермічний процес).

Який найбільший тиск азоту у великій ємності зможе досягти постачальник, послідовно змінюючи балони?

28 Історія повторюється. Цього року Патрік знову знайшов у дідусевій шафі дивний чорний диск із зображенням на паперовій обкладинці. Перш ніж він устиг би подати на ньому бургер або використати його замість фрісбі, дідусь показав йому, що якщо покласти диск на програвач, розмістити голку на зовнішньому кінці спіральної доріжки на платівці й натиснути кілька кнопок, то з динаміків, окрім потріскування й шипіння, залунає якась прадавня музика.

Цього разу Патріка цікавить, скільки часу потрібно, щоб грамофонна платівка розкрутилася зі стану спокою до своєї звичайної швидкості $33\frac{1}{3}$ обертів за хвилину. Припустимо, що голку він встановлює на платівку лише після того, як вона досягне стандартної швидкості.

Платівка є суцільним диском із діаметром 30 см та масою 200 г. Вона лежить на обертовому столику (тарілці) такого ж діаметра й маси 2 кг, причому платівка і тарілка обертаються разом як єдине ціле. Електропривід тарілки під'єднано до джерела з вихідною напругою 5 В і постійним струмом 100 мА.

Знехтуйте будь-якими втратами енергії.

29 Rizzimus Prime грався із зарядженим скібіді-кубом. Куб мав по одному заряду величиною $q = 1$ Кл у кожній із своїх вершин. Rizzimus Prime створив дев'ятий заряд і розмістив його в центрі куба, щоб той «чілив» там. Як справжній sigma, він точно знає, яким має бути цей заряд, щоб жоден із зарядів не відхилився від рівноваги – не полетів у Огайо або врізався в центр куба. Погодьтеся, це було б досить крінжово :)

Яким має бути заряд у центрі куба, щоб система залишалася в рівновазі?

#elektrostatika #skibidi #naboj-physics #nocap

30 Космічна компанія FKS оголосила про великий успіх — приземлення на Місяці. Насправді, у них не вистачило фінансування, тож вони просто зняли відео на Землі. Причому зробили це звичайним телефоном, камера якого мала кадрову частоту запису 60 Гц. Для початку вони вирішили зняти рух тіла (розвідного ключа) кинутого під кутом до горизонту.

З якою частотою кадрів потрібно відтворювати відео, щоб воно виглядало правдоподібно? Прискорення вільного падіння на Місяці становить 16 % земного.

31 Садівник Адам і бабуса Юстина, відома травниця, є сусідами, а їх будинки мають спільну стіну. Адамові потрібно, щоб у його підвалі було прохолодно (овочі будуть довше зберігатися), а бабуса Юстина, навпаки, хоче, щоб у її підвалі було тепло (трави краще висихатимуть). Тому вони вирішили разом придбати тепловий насос. Насос працює від електрики й перекачує тепло з підвалу Адама до підвалу бабусі Юстини.

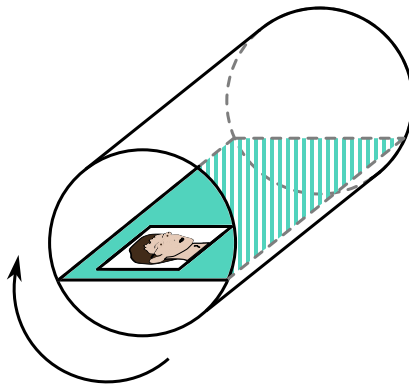
Обидвоє дуже задоволені своїм спільним винаходом. Бабуса Юстина помітила, що енергоефективність її теплового насоса, яка визначається відношенням кількості відданого тепла до затраченої електричної енергії, становить 1500 %.

Яку середню енергоефективність холодильної машини спостерігає Адам (у відсотках)?

32 Станко нещодавно читав про Міжнародну космічну станцію. Тому він знає, що її маса становить 400 т, а вона обертається навколо Землі по колу на висоті 400 км над поверхнею. Попри те, що станція рухається у небесних висотах, на неї все ж діє сила опору атмосфери, внаслідок чого щодня вона знижується на 100 м ближче до поверхні Землі.

З якою силою атмосфера гальмує Міжнародну космічну станцію?

33 Щоб час у WC минав швидше, Адам почав гратися рулоном туалетного паперу. Він витягнув зі свого гаманця студенську пластикову картку ISIC і вставив її всередину рулону, який тримав горизонтально, відповідно картка була у нижній частині рулону. Потім почав обертати рулон. На який найбільший кут він міг повернути рулон, щоб ISIC не зісковзнув? Ширина ISICa у $\sqrt{2}$ рази більша, ніж радіус рулону, а коефіцієнт тертя між ISICом і рулоном дорівнює 0,3.



34 Словак Квік із задоволенням згадує своє дитинство, роздивляючись фото — ті часи, коли веселка ще була чорно-білою, у магазині він розраховувався чехословацькою кроною і збирав картки із зображеннями коней. На кожній картці, окрім малюнка, було вказано, за який час даний кінь на рівній поверхні може розігнатися від швидкості 0 км/год до 100 км/год.

Тепер веселки вже кольорові, Квік платить євро і збирає картки із зображеннями автомобілів. Найціннішою у його колекції є картка з автомобілем Rimac Nevera, потужність якого становить 1888 hp, а розгін від 0 до 100 км/год триває 1,8 с. Головним обмеженням, яке заважає ще більшому прискоренню, тепер є не нестача потужності, а сила тертя коліс об дорогу.

За який найкоротший час Rimac Nevera може розігнатися від 0 до 100 км/год, рухаючись вниз з гори, якщо авто має необмежену потужність і може обрати будь-який кут схилу?

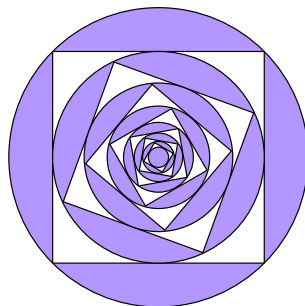
35 На західному узбережжі однієї тропічної країни з моря здіймається прямовисна скеля. У той момент, коли Сонце на березі вже зайшло, верхівка скелі ще деякий час залишається освітленою: оскільки Земля має форму кулі, горизонт для спостерігача на вершині розташований трохи далі, тож Сонце світить на скелю трохи довше. Край тіні при цьому рухається вгору по скелі майже рівноприскореним рухом. Яке значення має це прискорення?

Скеля розташована точно на екваторі, і саме зараз триває день весняного рівнодення.

36 Якуб під час літньої школи Trojstenu вирушив на екскурсію до Атомної електростанції. Під час екскурсії розповідали про природний уран, який містить 0,72 % ізотопу ^{235}U , а решту становить ^{238}U з періодами напіврозпаду $7 \cdot 10^8$ і $4,46 \cdot 10^9$ років. Однак у ядерних реакторах використовують лише уран збагачений до 3 % ізотопу ^{235}U .

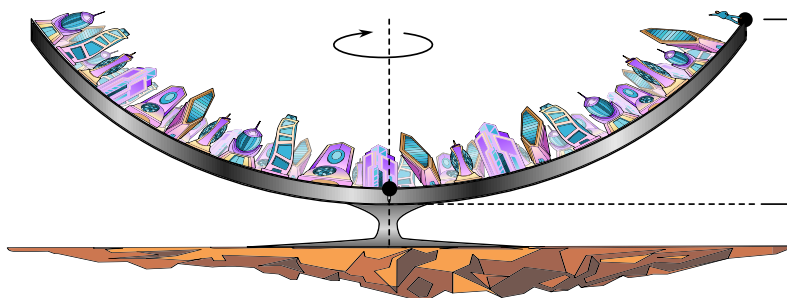
У голові Якуба миттєво спалахнула іскра цікавості: він хоче дізнатися, на скільки відсотків активність атомів збагаченого урану буде більшою порівняно з такою ж кількістю атомів природного урану. Допоможіть йому!

37 Мама подарувала Соні гармонізуючий талісман — намисто з амулетом, як на рисунку. Йдеться про круг з однорідного матеріалу радіуса r , з якого вирізано вписаний квадрат. Потім у нього вставлений круг, вписаний в той квадрат. З нього знову вирізано вписаний квадрат, і так далі до нескінченності. Щоб амулет краще «гармонізував», кожен вирізаний вписаний квадрат додатково повернуто на кут 20° . Соня добре знає, що ефективність амулета визначається його часом обертання навколо своєї осі. Яким є гармонізаційний потенціал момент інерції її амулета щодо осі, яка проходить через центр амулета і перпендикулярна до площини, в якій він знаходиться? Маса цілого амулета m .



38 У далекому майбутньому ми плануємо колонізувати Марс. Але прискорення вільного падіння на Марсі становить лише 36 % від земного, і багато людей погано почуваються за таких умов. Тому ми збудували Гірополіс — велетенське місто у формі обертального параболоїда радіусом 1000 м, яке повільно обертається навколо вертикальної осі, створюючи штучну гравітацію. Коли поселенець прибуває на Марс, він спочатку отримує кімнату на самому краю міста, де штучно створена сила тяжіння дорівнює земній, а потім поступово переселяється нижче, доки не звикне до меншої сили тяжіння. У кожній точці міста напрямок дії сили тяжіння є перпендикулярним до поверхні.

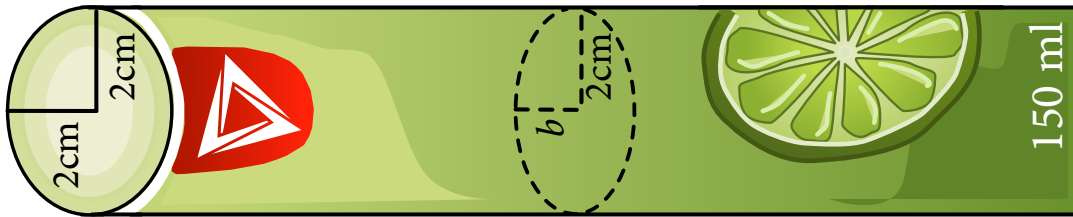
Яка різниця у висоті між центром і краєм міста?



39 Ярослав захотів освіжитися після довгого спекотного дня на велосипеді. У найближчому магазині він купив морозиво в упаковці, що має форму «деформованого конуса». Об'єм упаковки дорівнює 150 мл, а її горизонтальний переріз на будь-якій висоті має форму еліпса. Велика піввісь залишається постійною $a = 2$ см, а мала піввісь змінюється лінійно з висотою: нагорі $b = a$, а внизу $b = 0$.

Яро тримає морозиво вертикально і поступово виштовхує його з упаковки, відкушуючи зверху. Яку роботу він виконає, піднімаючи морозиво, коли з'їсть рівно половину його об'єму? Густина морозива дорівнює 1000 кг/м^3 .

Рисунок повернуто під час друку, проте Яро тримає морозиво вертикально.



40 Томаш обожнює швидкі автомобілі і займається дрег-рейсингом. Під час свого останнього заїзду вздовж траси довжиною s рівномірно розташувалися натовпи вболівальників. Томаш натиснув на педаль газу і проїхав усю трасу з постійним прискоренням a . Кожен із уболівальників занотував миттєву швидкість, з якою Томаш проїжджав повз нього. Після перегонів вони зустрілися для дружньої розмови і, використавши свої записи швидкостей, обчислили їх середнє значення.

У скільки разів відрізняється отримане значення від справжньої середньої швидкості руху Томаша?

Типові розв'язки

1 Щоб розв'язати цю задачу, sudoku взагалі не потрібно завершувати.

Оскільки за правилами в кожному стовпці кожне число від 1 до 9 має з'явитися рівно один раз, усі стовпці мають однакову масу (45 г), а отже, горизонтальна координата центра мас повинна збігатися з координатою центру.

Той самий аргумент справедливий і для рядків та вертикальної координати, тому центр мас розташований точно посередині, і шуканою відповіддю є 0 см.

2 Для розв'язання можемо уявити, що потяг (а отже, й Сашко із дзеркалом) стоїть нерухомо, а світлофор рухається до нього зі швидкістю v . Дзеркало «перетворює» пейзаж позаду Сашка таким чином, що об'єкти, які розташовані на відстані d від дзеркала, Сашко бачитиме як розташовані на відстані d за дзеркалом. І якщо світлофор рухається до нього зі швидкістю v , то й його відображення в дзеркалі рухатиметься до Сашка зі швидкістю v .

3 Позначимо гачки зліва направо літерами A до G . Відношення відстаней гачків E і G від осі обертання дорівнює $\frac{8}{7}$. Єдині дві запропоновані планетки, маси яких перебувають у відношенні 7 : 8, це 7- та 8-грамові. Отже, на гачки E і G потрібно підвісити саме їх. Разом на цих терезах маємо масу $7\text{ г} + 8\text{ г} = 15\text{ г}$.

Момент сили, з яким вони діють на стрижень, буде $15\text{ г} \cdot g \cdot d$, де d — довжина одного поділка на плечах. Щоб урівноважити цей момент сили гачком F , який знаходиться на відстані $5d$ від осі обертання, тут обов'язково повинна висіти планетка з масою 3 г.

Тепер звернімо увагу, що відношення відстаней гачків B і C від осі обертання їх плеча становить 3 : 1. Із тих що залишилися, цьому співвідношенню мас відповідають планетки з масами 2 г та 6 г. Разом вони створюють момент сили $8\text{ г} \cdot g \cdot d$, тому на гачку A має висіти планетка з масою 4 г. Маса планеток на гачках A , B і C разом становлять 12 г, тож вони діють на свої терези моментом сили $12\text{ г} \cdot g \cdot d$. Планетка на гачку D має це врівноважити, отже сюди потрібно підвісити ту, що має масу 9 г.

Зліва направо на стрижнях висять планетки з масами 4, 2, 6, 9, 7, 3 і 8 г, а Квік не використовує дві планетки з масами 1 г і 5 г - тобто Плутон і Землю. І це цілком логічно: Плутон уже й так не є планетою, а Земля в них удома під ліжечком.

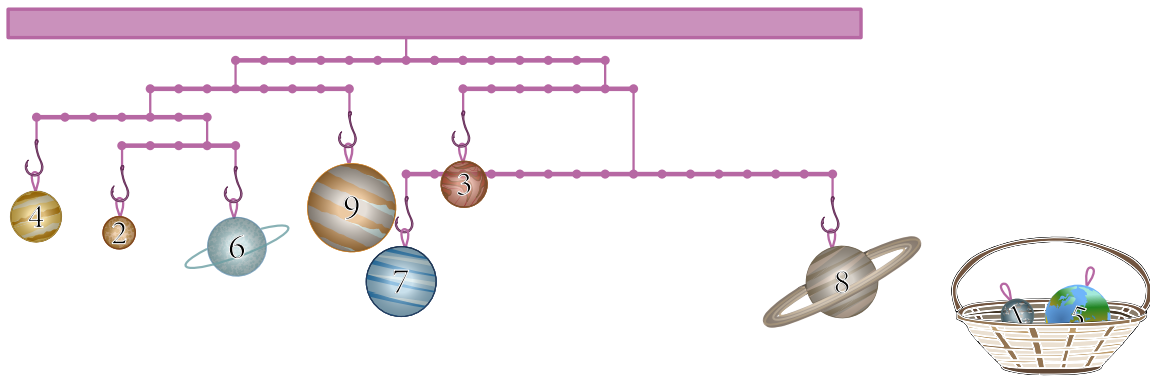


Рис. 3.1: Збалансовані терези

4 Гаряча вода віддає тепло холодній поки не встановиться теплова рівновага, яка, згідно з умовою задачі, має настати при температурі $34\text{ }^{\circ}\text{C}$. Запишемо рівняння теплового балансу:

$$Q_{\text{прийняте}} = Q_{\text{віддане}},$$

$$m_{\text{хол.}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t - t_{\text{хол.}}) = m_{\text{гар.}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (t_{\text{гар.}} - t).$$
(4.1)

Усе рівняння можна поділити на питому теплоємність води $c_{\text{H}_2\text{O}}$. Позначимо об'єм холодної води, що надходить у ванну за секунду, як x . Загальний потік дорівнює 600 мл/с , тож об'єм гарячої води за секунду буде $600\text{ мл/с} - x$. Підставимо ці значення у рівняння і спростимо:

$$x \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (34\text{ }^{\circ}\text{C} - 17\text{ }^{\circ}\text{C}) = (600\text{ мл/с} - x) \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (68\text{ }^{\circ}\text{C} - 34\text{ }^{\circ}\text{C}),$$

$$x \cdot 17\text{ }^{\circ}\text{C} = (600\text{ мл/с} - x) \cdot 34\text{ }^{\circ}\text{C},$$
(4.2)

Звідси знаходимо:

$$x = \frac{600\text{ мл/с} \cdot 34\text{ }^{\circ}\text{C}}{17\text{ }^{\circ}\text{C} + 34\text{ }^{\circ}\text{C}} = 400\text{ мл/с}.$$
(4.3)

5 На рисунку 5.1 показано найкоротший шлях, яким звук поширюється між кожними двома послідовними друзями. Однак у деяких точках прямого шляху є кам'яна стіна, яку звук повинен обігнути.

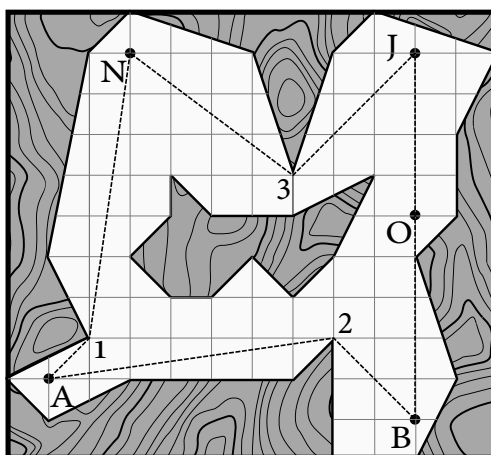


Рис. 5.1: Шлях звукової хвилі в печері

Першу частину шляху між точками N та A потрібно розділити на два коротші відрізки: від точки N до точки 1 , і від точки 1 до точки A . На щастя, на квадратній сітці всі відрізки є або сторонами або гіпотенузами прямокутних трикутників. Отже, достатньо скористатися теоремою Піфагора.

Для першого відрізка маємо, що його довжина дорівнює сумі

$$d_{NA} = d_{N1} + d_{1A} = \sqrt{(70 \text{ м})^2 + (10 \text{ м})^2} + \sqrt{(10 \text{ м})^2 + (10 \text{ м})^2} = \sqrt{5000} \text{ м} + \sqrt{200} \text{ м} = 50\sqrt{2} \text{ м} + 10\sqrt{2} \text{ м} = 60\sqrt{2} \text{ м}. \quad (5.1)$$

Аналогічно проходимо всі відрізки й отримуємо послідовно такі довжини:

$$d_{A2} = 50\sqrt{2} \text{ м}, \quad d_{2B} = 20\sqrt{2} \text{ м}, \quad d_{BO} = 50 \text{ м}, \quad d_{OJ} = 40 \text{ м}, \quad d_{J3} = 30\sqrt{2} \text{ м}, \quad d_{3N} = 50 \text{ м}. \quad (5.2)$$

Якщо всі відстані підсумувати, отримаємо загальний шлях $(140 + 160\sqrt{2})$ м. Звук поширюється зі швидкістю приблизно $c_s = 343$ м/с, тож проходження цього шляху займе

$$t_s = \frac{(140 + 160\sqrt{2}) \text{ м}}{343 \text{ м/с}} \doteq 1,07 \text{ с}. \quad (5.3)$$

Ми також знаємо, що час реакції членів експедиції для всіх становить пів секунди. Оскільки крик таким чином проходить через чотирьох членів експедиції (Нінка вже далі кричати не повинна), їхній сумарний реакційний час дорівнює $t_r = 4 \cdot 0,5 \text{ с} = 2 \text{ с}$, тож Нінка почує все слово NABOJ через $t_s + t_r \approx 3,07 \text{ с}$.

6 Якщо середній час, за який Патрік пробіг одне коло під час перших трьох кіл, становив 80 с , то загальний час, за який він подолав три кола, дорівнює $3 \cdot 80 \text{ с} = 240 \text{ с}$. Середній час, за який Патрік

пробігає одне коло після третього кола, становить 78 с, тому загальний час для чотирьох кіл дорівнює $4 \cdot 78 \text{ с} = 312 \text{ с}$.

Отже, четверте коло він пробіг за $312 \text{ с} - 240 \text{ с} = 72 \text{ с}$ або 01:12.

7 Вперше навігатор рекомендує Марселю, що він має їхати зі швидкістю 120 км/год. Звідси ми можемо прямо обчислити відстань, на якій перебуває Марсель від аеропорту о 21:00,

$$s = v \cdot t = 120 \text{ км/год} \cdot 1 \text{ год} = 120 \text{ км}. \quad (7.1)$$

Аналогічно обчислюємо відстань від Марселя до аеропорту о 21:30,

$$s = 150 \text{ км/год} \cdot 0,5 \text{ год} = 75 \text{ км}. \quad (7.2)$$

З цього маємо, що за перші півгодини поїздки він проїхав $120 \text{ км} - 75 \text{ км} = 45 \text{ км}$, тож постійна швидкість, з якою їде Марсель, дорівнює $\frac{45 \text{ км}}{0,5 \text{ год}} = 90 \text{ км/год}$. Таким чином, час руху Марселя становитиме:

$$\frac{120 \text{ км}}{90 \text{ км/год}} = 80 \text{ хв} \quad (7.3)$$

і до аеропорту він прибуде о 22:20.

8 Якби лампочка світила без того, щоб бути в кубі, вона б освітлювала всю кімнату. Якщо ж навколо лампочки розмістити куб із показником заломлення більшим за 1 (навіть іншим, ніж 1,5), то згідно із законом Снеліуса світло на межі між стінкою куба та повітрям буде заломлюватися від нормалі до поверхні. Якщо подивитися на якусь конкретну стінку куба, промені, падаючи на неї, будуть розсіюватися сильніше, ніж раніше, тобто освітять більшу частину простору, а не меншу. Отже, усе одно буде освітлено 100 % кімнати.

9 Найважливіше — звернути увагу на одиниці обох наведених величин. Швидкість $v_{\max} = 320 \text{ км/год}$ не сумісна з поданими одиницями прискорення $2,6 \text{ км/год/с}$. Проте їх можна перетворити до зручнішого вигляду: $\text{км}/(\text{год} \cdot \text{год}) \equiv \text{км/год}^2$. Якщо ми знаємо, що потяг збільшує швидкість на $2,6 \text{ км/год/с}$ щосекунди, то за годину (яка містить 3600 секунд) він збільшить її на $2,6 \text{ км/год/с} \cdot 1 \text{ год} = 9360 \text{ км/год}$.

Із рівняння $v = a \cdot t$ можна виразити час, за який потяг здатний розігнатися до своєї максимальної швидкості. Для рівноприскореного руху, який починається зі спокою, виконується

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} v_{\max} t. \quad (9.1)$$

Підставивши $t = \frac{v_{\max}}{a}$, отримаємо, що шлях, який потяг пройде, перш ніж досягне своєї максимальної швидкості, дорівнює

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_{\max} \cdot \frac{v_{\max}}{a} = \frac{v_{\max}^2}{2a}. \quad (9.2)$$

Підставивши значення обох величин у правильних одиницях, отримуємо шлях 5,47 км.

10 Сила F , що діє на повністю занурену кульку, є результатом дії сили Архімеда F_A та сили тяжіння F_m , тобто

$$F = F_A - F_m = V\rho_v g - V\rho_d g = (\rho_v - \rho_d) \frac{4}{3} \pi r^3 g. \quad (10.1)$$

Роботу, яку виконав підводник Мірко під час занурення, визначимо за формулою $A = F \cdot h$:

$$A = (\rho_v - \rho_d) \frac{4}{3} \pi r^3 g \cdot h \doteq 2,5 \text{ Дж}. \quad (10.2)$$

11 За час, поки трамвай доїде до переїзду, звук сигналу має встигнути дійти до водія, а автомобіль — встигнути від'їхати. Оскільки шукаємо мінімальну відстань, за якої це можливо, час, за який трамвай прибуде до переїзду (t_e), дорівнюватиме сумі часу, за який звук дійде до автомобіля ($t_{\text{звук}}$), і часу необхідного для того, щоб автомобіль від'їхав (t).

Позначимо шукану відстань між трамваем і переїздом через s . Часи можна виразити як

$$t_e = \frac{s}{v} \quad \text{і} \quad t_{\text{звук}} = \frac{s}{c}. \quad (11.1)$$

Підставимо ці вирази в рівняння для часу

$$t_e = t_{\text{звук}} + t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{v} = \frac{s}{c} + t, \quad (11.2)$$

і звідси просто виражаємо шукану відстань

$$s = \frac{c \cdot t \cdot v}{c - v}. \quad (11.3)$$

12 Насамперед визначимо, яку саме площу ми хочемо покрити. Землю наближено вважаємо кулею радіуса $R_{\oplus} = 6,378 \cdot 10^6$ м. Площу поверхні Землі можна виразити як

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ м}^2. \quad (12.1)$$

Із умови задачі відомо, що площа аркуша формату А0 дорівнює 1 м^2 , а з кожним збільшенням номера формат зменшується вдвічі. Наприклад, найпоширеніший аркуш формату А4 має площу $\frac{1}{2^4} \text{ м}^2 = \frac{1}{16} \text{ м}^2$.

Так само можна продовжити й у протилежному напрямку — до «від'ємних номерів» форматів. Аркуш формату А-1 матиме площу 2 м^2 , а кожен наступний — удвічі більшу... Площа зростатиме до тих пір, поки ми не перевищимо значення, наведене у рівнянні 12.1. Для таких випадків можна скористатися зручною функцією — логарифмом із основою 2. Її можна обчислити на калькуляторі¹.

¹Якщо калькулятор не підтримує цю функцію безпосередньо, можна скористатися співвідношенням $\log_y x = \frac{\log x}{\log y}$, тобто для $y = 2$ — $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$.

Не слід забувати, що ми маємо заокруглити значення вгору, оскільки нам потрібен *найменший достатньо великий* аркуш паперу. Отже, результатом буде

$$-[N] = -\lceil \log_2 (5,1 \cdot 10^{14}) \rceil = -49, \quad (12.2)$$

тобто шукаємо аркуш формату А-49.

13 Дим відносно повітря не рухається — це означає, що відносно землі він рухається разом із повітрям зі швидкістю вітру v . За час, поки літак пролетить до кінця трибуни, початок димового сліду знесить у протилежний бік і він пройде деяку відстань. Цей час дорівнює

$$t = \frac{s}{u} \quad (13.1)$$

а за цей час початок диму пройде

$$s_d = vt = v \frac{s}{u}, \quad (13.2)$$

тому довжина димового сліду буде

$$s + s_d = s + v \frac{s}{u} = s \left(1 + \frac{v}{u} \right). \quad (13.3)$$

14 Оскільки призма має більший показник заломлення, ніж повітря, промені, падаючи на неї, відхиляються у напрямку до нормалі. Щоб на інший бік призми, де сидить охоронець, не пройшло жодного променя, потрібно, щоб після заломлення вони йшли принаймні паралельно до стінки призми, за якою він знаходиться, або ще різкіше вниз — до нижньої основи. З малюнка видно, що для цього потрібно, аби вони заломилися під кутом не більше ніж 10° до нормалі.

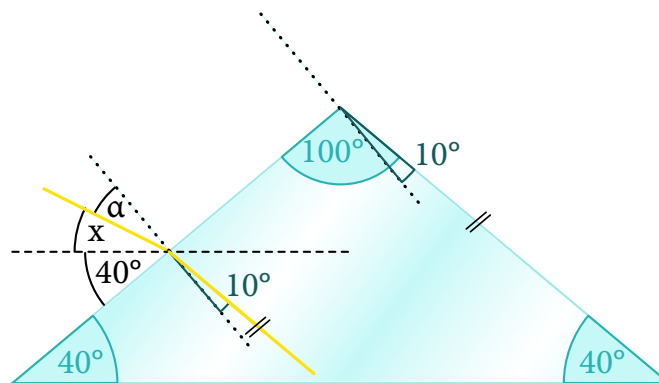


Рис. 14.1: Огляд відповідних кутів у призмі

З цього за законом Снеліуса можна визначити, під яким кутом промені мають падати:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ). \quad (14.1)$$

Оскільки призма рівнобедрена, її стінки нахилені відносно горизонталі під кутом 40° . Якщо глянути на кути біля нормалі до межі, бачимо, що $40^\circ + \gamma + \alpha = 90^\circ$, де γ — це кут, під яким Роберта має нахилити ліхтарик. Отже,

$$\gamma = 50^\circ - \alpha = 50^\circ - \arcsin(2,4 \cdot \sin 10^\circ) \doteq 25,4^\circ. \quad (14.2)$$

15 Насамперед зауважимо, що швидкість ліфта не відіграє жодної ролі. Якби Кай тримав гантель нерухомо, то вона діяла б на нього силою $m_{\text{г}}g$. Однак він опускає її з прискоренням a , тож йому достатньо прикласти силу $m_{\text{г}}(g - a)$. Крім цього, трос ліфта утримує також вагу Кая $m_{\text{к}}g$ та самого ліфта $m_{\text{л}}g$. Отже, сила натягу тросу ліфта визначається виразом:

$$\begin{aligned} F &= m_{\text{к}}g + m_{\text{л}}g + m_{\text{г}}(g - a) \\ &= 60 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 + 250 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 + 20 \text{ кг} \cdot (10 \text{ м/с}^2 - 5 \text{ м/с}^2) \\ &= 3200 \text{ Н} \doteq 3,2 \text{ кН}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

16 У всіх трьох випадках йдеться про рух тіла під дією сили тяжіння, відрізняються лише початкові умови. Тож нам достатньо знати формули для шляху і часу руху при вільному падінні,

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \quad (16.1)$$

Зауважимо, що друга половина польоту при киданні яйця вгору повністю повторює рух яйця, кинутого з початковою швидкістю вертикально униз: на рівні вікна яйце неодмінно досягне тієї самої швидкості v_0 , з якою Само його кинув. Отже, після кидання вгору яйце протягом 1 с піднімається до максимальної висоти і протягом 1 с звідти падає до висоти вікна. За першу секунду польоту вгору швидкість зменшилася до 0, отже, початкова швидкість рівна 10 м/с:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 - gt, \\ v_0 &= gt = 10 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Після кидання з такою ж швидкістю вертикально вниз шлях, який пролетіло яйце, буде дорівнювати

$$h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 = 40 \text{ м}.$$

Отже, за відомою формулою можемо визначити час падіння яйця, яке Само впустив з вікна на висоті 40 м над землею (без початкової швидкості):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \text{ м}}{10 \text{ м/с}^2}} = \sqrt{8} \text{ с} \doteq 2,83 \text{ с}.$$

17 Почнемо з того що наємо вантажі та позначимо всі сили, що в даній системі діють. Для опису нам повністю вистачить другого закону Ньютона $F = ma$.

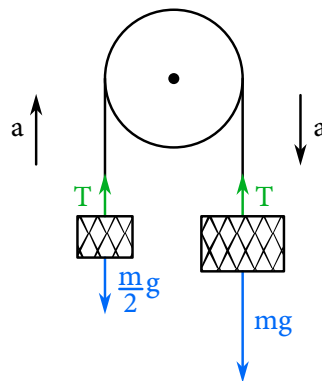


Рис. 17.1: Два вантажі на блокові

На рисунку бачимо, що на вантажі, очікувано, діє сила тяжіння $F_1 = mg$ та $F_2 = \frac{m}{2}g$. Водночас діє й сила натягу мотузки T_1 та T_2 , що виникає внаслідок дії сил на мотузку. Оскільки блок не має маси, потрібно, щоб праворуч і ліворуч мотузка діяла на нього силами однакової величини; інакше на нього діяв би ненульовий момент сили. Це призвело б до того, що невагомий блок мав би нескінченно велике кутове прискорення, що, як усі ми визнаємо, неможливо. З цієї причини $T_1 = T_2$, і далі позначатимемо їх як T .

Також ми знаємо, що вантажі рухатимуться з однаковим за модулем прискоренням a , і очікуємо, що важчий вантаж прискорюватиметься донизу. Після цих міркувань нам залишається лише записати окремі рівняння руху для обох вантажів

$$\frac{m}{2}a = -\frac{m}{2}g + T \quad \text{та} \quad ma = mg - T. \quad (17.1)$$

Звівши їх, можемо позбутися невідомого T і виразити прискорення a

$$a = \frac{m - \frac{m}{2}}{m + \frac{m}{2}}g = \frac{1}{3}g. \quad (17.2)$$

18

Збільшення швидкості на орбіті (1)

На перший погляд може здаватися, що збільшення швидкості обертання призводить до зменшення періоду обертання. Однак слід розуміти, що при зміні швидкості руху тіла на орбіті змінюється і форма його орбіти. Для оцінки істинності твердження достатньо припустити, що можна збільшити швидкість настільки, що воно досягне значення другої космічної швидкості (швидкості «втечі»). Тоді період стане нескінченно великим, тож він безумовно зростає. Отже, твердження **неправдиве**.

Швидкість руху в перигелії (2)

Із другого закону Кеплера безпосередньо випливає: чим ближче Земля до Сонця, тим швидше вона рухається. Твердження **правдиве**.

Зима (4)

Зважмо на те, що коли у Північній півкулі зима, у Південній — літо. Якби наведене обґрунтування було правильним, зима мала б наставати одночасно в обох півкулях. Отже, твердження **неправдиве**. Насправді Земля найближча до Сонця на початку січня, коли в Північній півкулі лютує зима. Або й не надто лютує.

Колова орбіта і перша космічна швидкість (8)

Доцентровою силою, що зумовлює рух тіла по колу, є гравітаційна сила, яка зменшується обернено пропорційно до квадрату відстані до центру кола. Доцентрове прискорення, у свою чергу, визначається як $\frac{v^2}{r}$. Це означає, що швидкість на коловій орбіті зі зростанням висоти h над поверхнею змінюється як $v \propto \frac{1}{R+h}$. Твердження **неправдиве**.

Геостационарні супутники (16)

Геостационарні супутники — це супутники, які весь час перебувають над однією точкою на поверхні Землі. Цього можна досягти, якщо розмістити супутник на такій висоті, де його кутова швидкість обертання навколо Землі буде рівною кутовій швидкості обертання самої Землі. Щоб бути весь час над тією самою місцевістю, вони можуть рухатися лише вздовж паралелей. Якби вони рухалися над будь-якою паралеллю, відмінною від екватора, сила тяжіння, спрямована до центра Землі, «тягнула» б їх до екватора, тож утриматися на цій паралелі було б неможливо. Отже, геостационарні супутники справді можуть перебувати лише над екватором. Твердження **правдиве**.

Рух по еліпсу (32)

Тіло рухається відносно центра мас системи по еліпсу лише тоді, коли воно гравітаційно зв'язане з важчим тілом (і не має лінійної швидкості). Якщо ж швидкість занадто висока, воно здатне втекти в нескінченність. Тоді траєкторія — гіпербола або парабола. Твердження **неправдиве**.

Додавши числа, що відповідають правдивим твердженням, отримаємо відповідь 18.

19 Насамперед зауважимо, що всі ребра і всі пари вершин у правильному тетраедрі є еквівалентними. Отже, зовсім неважливо, як його повернемо і до яких двох вершин спочатку під'єднаємо омметр — результат це не змінить; різні опори ми виміряємо лише після видалення одного з резисторів.

Тому можемо розв'язувати еквівалентну, але трохи простішу задачу: спочатку видаляємо довільний один резистор, а вже потім до деяких двох вершин під'єднуємо клема омметра.

Одразу видно, що потрібно розглянути² лише три різні випадки з рисунка 19.1:

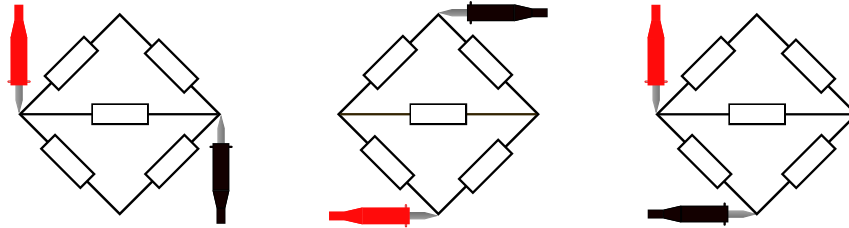


Рис. 19.1: Три можливі вимірювання опору в тетраедрі без одного резистора

- Якщо під'єднати омметр до двох вершин, між якими видаленого резистора не було, залишаться три паралельні гілки з одним, двома і двома резисторами, для яких загальний опір можна обчислити безпосередньо як

$$R_1 = R \parallel (R + R) \parallel (R + R) = R \parallel 2R \parallel 2R = \frac{1}{2}R. \quad (19.1)$$

- Якщо клема під'єднати до двох вершин, між якими тепер немає жодного резистора, отримаємо просте з'єднання з двома паралельними гілками по два резистори. Оскільки тепер схема повністю симетрична, між кінцями останнього резистора не може бути жодної напруги, а де немає напруги — немає й струму. Тому його опір

$$R_2 = (R + R) \parallel (R + R) = 2R \parallel 2R = R. \quad (19.2)$$

- І нарешті, якщо омметр під'єднати до однієї з вершин і до вершини без резистора, то залишиться нетривіальне послідовно-паралельне з'єднання з опором

$$R_3 = R \parallel (R + (R \parallel 2R)) = R \parallel \left(R + \frac{2}{3}R\right) = R \parallel \frac{5}{3}R = \frac{5}{8}R. \quad (19.3)$$

Ці три значення є різними, тож відповіддю є множина $\left\{\frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R\right\}$.

20 Щоб нам було легше впорядковувати літери, розділимо їх на кілька груп. Одразу можна запідозрити, що деякі літери самі по собі стояти не зможуть.

Наприклад, J і C стоять лише на одній точці, проте їхній центр мас не знаходиться прямо над цією точкою, тому вони відразу перекинуться. Подібним чином миттєво перекинуться й P. Воно хоч і стоїть на основі з малою, але скінченною довжиною, однак його центр маси також знаходиться дещо правіше.

До другої групи належать літери O та S. Вони самі по собі не падають, адже їхній центр мас розташований прямо над точками, якими вони торкаються опори. Проте достатньо штовхнути їх будь-яким малим імпульсом — і вони перекинуться.

²Скористаємося скороченим позначенням для опору двох паралельних гілок: $a \parallel b \equiv \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

До наступної категорії належать літери І і У. Оскільки товщина їхніх паличок ненульова, вони стоять стійко; однак вона значно менша за інші розміри, і достатньо штовхнути їх невеликим (але, на відміну від 0 і 5, *скінченно малим*) імпульсом — і вони перекинуться. З них двох У має помітно більшу масу, проте її центр мас розташований трохи вище. Підрахуємо, яка з цих двох літер є стійкішою.

Розглянемо літеру з масою m , центр маси якої знаходиться на висоті H , а ребро, через яке вона може перекинутися, розташоване на відстані ϵ у горизонтальному напрямку від центру мас. Під час перекидання літери через ребро її потенційна енергія збільшується на

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg(\sqrt{H^2 + \epsilon^2} - H). \quad (20.1)$$

Це є робота, якою ми кількісно визначаємо стійкість літери. Для $\epsilon \ll H$ маємо

$$\sqrt{H^2 + \epsilon^2} \approx H \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2H^2} \right) \Rightarrow W \approx \frac{mg\epsilon^2}{2H}. \quad (20.2)$$

Отже, для стійкості вирішальним є співвідношення $\frac{m\epsilon^2}{H}$. Літера, для якої це відношення більше, є стійкішою, причому маса літери пропорційна сумі довжин її паличок.

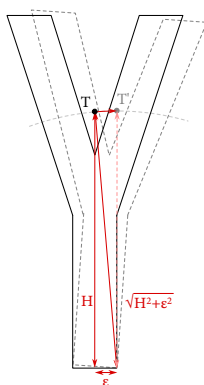


Рис. 20.1: Перекидання літери У. Щоб перекинути У, її потрібно нахилити в пунктирне положення. Видно, що центр мас T' у цьому положенні розташований вище, ніж T у початковому положенні.

Літери І і У мають однакове ϵ . Отже, вирішальним для їх стійкості є відношення $\frac{m}{H}$. Нехай один квадратик сітки має сторону одиничної довжини, а паличка літери цієї довжини має одиничну масу. Тоді для І висота центру мас дорівнює 4, а її маса 8, тобто відношення $\frac{m}{H}$ дорівнює 2. Для У H приблизно 4,76, а маса близько 12,9, тому відношення, що визначає стійкість, становить приблизно 2,7. Отже У стійкіша за І.

Рухаймося далі. Літери М, А та Н мають центри маси точно посередині описаного навколо них прямокутника, тобто на висоті чотирьох квадратиків, і перекидаються навколо точки на краю, яка в усіх випадках знаходиться на два квадратики від центру в горизонтальному напрямку. Отже, їхня

стійкість визначається лише масою. Простим додаванням довжин паличок бачимо, що найбільшу масу має N, потім H, а потім A.

Залишається ще остання проблемна літера — V. Вона стоїть на нижній паличці довжиною 2, до якої приєднане півколо з радіусом 2. Якби її центр маси знаходився більш ніж на два квадратики від вертикальної палички, усе було б просто. Однак приблизний розрахунок показує, що її центр маси віддалений від вертикальної палички лише трохи більше, ніж³

$$x = \frac{8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4\pi \cdot 3}{14 + 4\pi} \doteq 1,645. \quad (20.3)$$

Це означає, що центр мас V від ребра, через яке ми хочемо її перекинути, горизонтально віддалений менш ніж на 0,355, що значно менше, ніж у літер із попередньої групи, але більше, ніж у I та Y, тож у порядку стійкості вона буде між ними.⁴

Отже, відповідь така: послідовність N, H, A, V, Y, I. Решта літер або падають самі по собі, або для їх перекидання потрібна зовсім незначна робота.

21 Притік води у бак Q згідно з умовою задачі є сталим (інтенсивність дощу не змінювалась). Однак швидкість витікання через маленький отвір у дні бака залежить від гідростатичного тиску, а отже — від висоти рівня рідини в баку h . Розв'язати часовий перебіг такого процесу, ймовірно, понад наші сили.⁵ На щастя, цього й не потрібно, адже в умові задачі не вимагається опис часової залежності, а лише потрібно знайти один конкретний параметр, який можна визначити значно простіше.

Асимптота при $t \rightarrow \infty$ визначає максимальну висоту рівня води в баку $h_{\max} = 80$ см — тобто таку, за якої гідростатичний тиск на дні є достатнім, щоб вода витікала з тією ж швидкістю, з якою вона притікає. Із рівняння Бернуллі можна визначити швидкість витікання як функцію висоти рівня рідини в баку.

$$\rho \frac{v^2(h)}{2} = \rho gh \quad \Rightarrow \quad v(h) = \sqrt{2gh}. \quad (21.1)$$

Далі використаємо дані графіка, а саме нахил штрихованої дотичної при $t = 0$. У цей момент висота рівня рідини ще дорівнює нулю, тому гідростатичний тиск також рівний нулю, а вода на початку ще не витікає — ніби отвору взагалі не існувало. Без отвору бак, очевидно, наповниться б за час $\tau = 1$ год (див. рис.). Звідси можна визначити інтенсивність притоку як

$$Q = \frac{h_{\max} \cdot S}{\tau}. \quad (21.2)$$

³Це лише нижня оцінка, оскільки центр мас півкола розташований трохи ближче до її краю, тому його координата трохи більша за 3.

⁴Для V є достатньо менше за висоту центру мас, тож для оцінки стійкості можна використати той самий підхід, що й для I та Y. Проте точного обчислення не потребуємо, адже V має значно більшу ε , а вона в співвідношенні стійкості входить у квадрат, тому V безумовно буде стійкішою.

⁵Це приводить до диференціального рівняння Кіні $\frac{dh}{dt} = \alpha + \beta\sqrt{h}$, розв'язок якого містить функцію Ламберта W та експоненту, і яке ми, звісно, не прагнемо розв'язувати — навіть якщо, випадково, знаємо як.

Відомо, що при висоті рівня рідини $h_{\max} = 80$ см інтенсивність притоку дорівнює відтоку, який, у свою чергу, визначається добутком швидкості витікання та невідомої площі отвору A . Тоді

$$Av = A\sqrt{2gh_{\max}} = Q, \quad (21.3)$$

а після підстановки Q з рівняння 21.2 отримаємо результат

$$A = \frac{Q}{\sqrt{2gh_{\max}}} = \frac{S}{\tau} \sqrt{\frac{h_{\max}}{2g}} = 56 \text{ мм}^2. \quad (21.4)$$

22 Одразу можемо порахувати, що в молоці міститься рівно 100 мл йогурту, адже за умовою це 10 % від 1 л. Коли молоко відстоялося, угорі залишається лише вода, тобто концентрація йогурту дорівнює 0 %. Щоб середня концентрація становила 10 %, у нижній частині вона має бути 20 %, тобто зростає на 2 % кожні 100 мл. Таким чином, верхні 200 мл мають середню концентрацію 2 %, тобто містять загалом 4 мл йогурту.

Залишковий об'єм у пляшці становить 800 мл, а кількість йогурту — 96 мл. Після струшування суміш знову стає однорідною, тобто концентрація становитиме $\frac{96 \text{ мл}}{800 \text{ мл}} = 12$ %. З цієї суміші Богдан відлив 200 мл, тобто 24 мл йогурту.

Залишилося лише підсумувати об'єм йогурту у склянці:

$$4 \text{ мл} + 24 \text{ мл} = 28 \text{ мл}, \quad (22.1)$$

і знайти загальну концентрацію як відношення об'єму йогурта до загального об'єму:

$$\frac{28 \text{ мл}}{400 \text{ мл}} = 7 \%. \quad (22.2)$$

23 Умова задачі передбачає, що вантаж нахилений відносно горизонталі на кут α . У центр вантажу діє сила тяжіння Mg , спрямована вертикально вниз. На верхній кінець вантажу Матвій діє перпендикулярно до його поверхні силою F_M , а на нижній кінець Кіндрат діє з силою F_K , орієнтованою під певним кутом. Цю силу можна розкласти на горизонтальну складову F_{Kx} та вертикальну складову F_{Ky} .

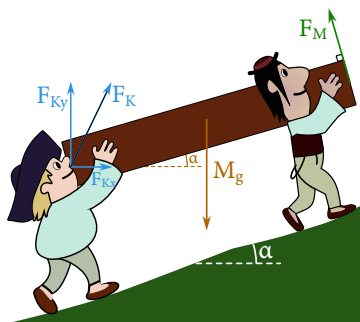


Рис. 23.1: Розклад сил, якими на вантаж діють Матвій і Кіндрат

У стані рівноваги можна записати такі рівняння:

- для сил у вертикальному напрямку: $Mg = F_M \cos \alpha + F_{Ky}$;
- для сил у горизонтальному напрямку: $F_M \sin \alpha = F_{Kx}$;
- для моментів сил відносно нижнього кінця вантажу: $Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = F_M L$.

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо

$$\begin{aligned} F_M &= \frac{1}{2} Mg \cos \alpha, \\ F_{Kx} &= \frac{1}{2} Mg \sin \alpha \cos \alpha, \\ F_{Ky} &= \frac{1}{2} Mg + \frac{1}{2} Mg \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (23.1)$$

Сила, з якою Кіндрат діє на вантаж, дорівнює

$$F_K = \sqrt{F_{Kx}^2 + F_{Ky}^2} = \frac{1}{2} Mg \sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}, \quad (23.2)$$

а шукане відношення сил має вигляд

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}}. \quad (23.3)$$

24 Одразу зауважимо, що доба значно коротша, ніж рік, а положення Сонця у напрямку схід—захід змінюється набагато швидше, ніж у напрямку північ—південь. Тому протягом одного дня географічну широту Сонця можна вважати сталою і достатньо розглядати лише зміну довготи.

Нахил земної осі визначає, наскільки далеко на північ або на південь Сонце може зміщуватися протягом року. Ці паралелі називаються тропіками — північний тропік або Тропік Рака (червневе сонцестояння) і південний тропік або Тропік Козерога (грудневе сонцестояння). Водночас у грудні, коли Сонце перебуває найбільше на південь, північна полярна область взагалі не бачить Сонця. Найпівденніша паралель, де це може статися, називається Північним полярним колом. Те саме відбувається і на півдні, лише навпаки й через півроку.

Географічна широта тропіків дорівнює $\varepsilon_{\oplus} = \pm 23,44^\circ$, а широта полярних кіл становить $\pm(90^\circ - \varepsilon_{\oplus}) \approx \pm 66,56^\circ$.

Усю ситуацію можна побачити на рисунку 24.1.

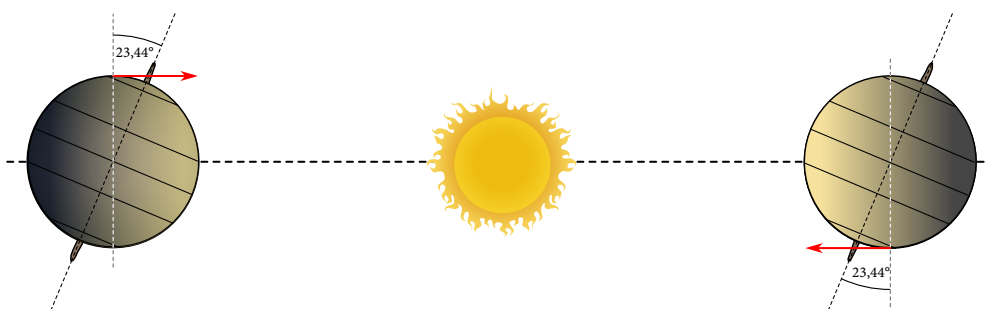


Рис. 24.1: Взаємне розташування Землі та Сонця під час червневого та грудневого сонцестоянь

Ці кола поділяють поверхню Землі на п'ять областей, у яких положення Сонця на небі протягом року поводитьсь по-різному:

- У південній полярній області принаймні раз на рік настає полярний день, коли Сонце не заходить зовсім. Під час свого руху навколо горизонту воно, отже, неминуче перетинає і північний напрям.
- Між тропіком Козерога та південним полярним колом можна спостерігати Сонце на півночі щодня, незалежно від пори року, саме опівдні.
- У тропіках, тобто між північним і південним тропіками, Сонце може бути опівдні на півночі або на півдні — залежно від пори року. Нас цікавить літнє сонцестояння, коли Сонце досягає свого найпівнічнішого положення, і, отже, опівдні перебуває на півночі.
- В областях північного помірної поясу, тобто між тропіком Рака та північним полярним колом, ми бачимо Сонце опівдні лише на півдні. Опівночі воно хоча й розташоване у північному напрямку, проте перебуває під горизонтом і, отже, невидиме.
- Нарешті, у межах північного полярного кола Сонце під час літнього сонцестояння не заходить зовсім. Знову ж, під час свого руху навколо горизонту воно неминуче перетинає і північний напрям, тільки це відбувається не опівдні, а опівночі. Єдиним винятком є сам Північний полюс, де всі сторони світу є «півднем»; однак це лише одна точка, яка не має площі.



Рис. 24.2: Земля з позначеними ділянками, де Сонце можна побачити точно на півночі

Залишається знайти суму площ усіх областей, що лежать південніше тропіка Рака $S_{\downarrow}$, та площі за Північним полярним кругом $S_{\uparrow}$, які позначені на рисунку 24.2. Цю суму можна обчислити, наприклад, за формулою для площі сферичного сегменту. У ній нам знадобляться висоти обох областей: для полярної «шапочки» це $h_{\uparrow} = R(1 - \cos \varepsilon)$, а для області південніше тропіка Рака — $h_{\downarrow} = R(1 + \sin \varepsilon)$. Отже, разом

$$S = S_{\downarrow} + S_{\uparrow} = 2\pi R h_{\downarrow} + 2\pi R h_{\uparrow} = 2\pi R(h_{\downarrow} + h_{\uparrow}) = 2\pi R^2(1 - \cos \varepsilon + 1 + \sin \varepsilon) = 2\pi R^2(2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon) \quad (24.1)$$

а оскільки нас цікавить відношення до площі поверхні всієї Землі $S_{\oplus}$, відповіддю є

$$\frac{S}{S_{\oplus}} = \frac{2\pi R^2(2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon)}{4\pi R^2} = \frac{2 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon}{2} \doteq 0,74 = 74 \%. \quad (24.2)$$

25 Дано, як справжній лучник, замислюється над тим, куди саме потрібно прицілитися. Він знає відстань до мішені $d = 70$ м і швидкість $v_0 = 50$ м/с. Щоб зрозуміти, у яку точку потрібно навести лук, він перед пострілом зобразив схему системи:

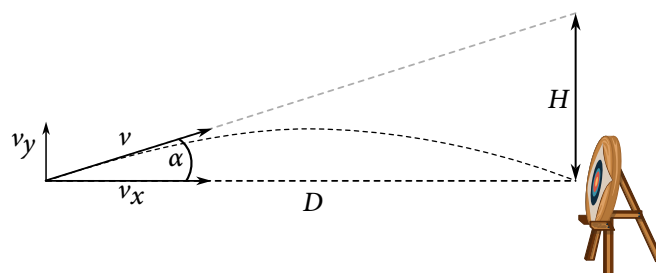


Рис. 25.1: Постріл з лука у мішень

Він помітив, що точка, у яку він цілиться, знаходиться на висоті H над центром мішені, тому для неї можна записати співвідношення:

$$\tan \alpha = \frac{H}{D}. \quad (25.1)$$

Зв'яжемо цей $\tan \alpha$ з початковою швидкістю через її x -ову та y -ову складові:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \quad (25.2)$$

У напрямку y на стрілу діє лише сила тяжіння, тому в цьому напрямку виконується

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (25.3)$$

де нас цікавить момент, коли стріла потрапляє у площину мішені, тобто $y = 0$. Це відбувається за час

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.4)$$

У напрямку x на стрілу не діють жодні сили, тому між часом t та відстанню D виконується співвідношення

$$D = v_x t = v \cos \alpha \frac{2v \sin \alpha}{g}. \quad (25.5)$$

Оскільки H і D пов'язані через тангенс кута, використаємо тригонометричні тотожності:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}. \quad (25.6)$$

Після підстановки у рівняння для дальності польоту отримаємо

$$D = \frac{2v^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}. \quad (25.7)$$

Підставимо $\tan \alpha = H/D$ відповідно до рівняння 25.1 і після спрощення отримаємо квадратне рівняння

$$H^2 - \frac{2v^2}{g} H + D^2 = 0, \quad (25.8)$$

розв'язком якого є⁶

$$H = \frac{v^2}{g} - \sqrt{\frac{v^4}{g^2} - D^2} \approx 10 \text{ м}. \quad (25.9)$$

26 Почнімо з кількісної оцінки базових одиниць системи glg-grg-mrk.

⁶Вибрано менший корінь.

З об'ємом і часом проблем не буде. Із умови маємо

$$V = 1 \text{ glg} = \frac{1 \text{ pt}}{20} \approx \frac{473 \text{ мл}}{20} = 23,65 \text{ мл} \quad (26.1)$$

а $t = 1 \text{ mrk} = 0,5 \text{ с}$.

Визначити інтенсивність звуку буде трохи складніше. Нехай I — інтенсивність звуку 1 grg . Відомо, що її визначено як інтенсивність, що відповідає рівню звукового тиску 100 дБ , тобто 10 Б . Виходячи з означення рівня інтенсивності звуку $L = \log \frac{I}{I_0}$, де $I_0 = 1 \text{ пВт/м}^2$, можемо записати $10 \text{ Б} = \log \frac{I}{I_0}$, звідки

$$I = 10^{10} I_0 = 10^{10} \cdot 1 \text{ пВт/м}^2 = 10^{-2} \text{ Вт/м}^2. \quad (26.2)$$

Тепер потрібно скомбінувати величини V , t та I , щоб отримати щось розмірності кг. Шукаємо вираз у вигляді $m = V^\alpha \cdot t^\beta \cdot I^\gamma$. Має виконуватися, що $[V]^\alpha \cdot [t]^\beta \cdot [I]^\gamma$, де $[A]$ позначає розмірність (тобто одиницю) величини A , дає розмірність маси. Отримуємо

$$[m] = (\text{м}^3)^\alpha \cdot \text{с}^\beta \cdot (\text{кг/с}^3)^\gamma = \text{м}^{3\alpha} \cdot \text{кг}^\gamma \cdot \text{с}^{\beta-3\gamma} \stackrel{!}{=} \text{м}^0 \cdot \text{кг}^1 \cdot \text{с}^0. \quad (26.3)$$

Звідси відразу бачимо, що $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ і $\beta = 3$, тобто

$$m = t^3 I = (0,5 \text{ с})^3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2 = \frac{1}{800} \text{ кг} = 1,25 \text{ г}. \quad (26.4)$$

Тепер ніщо не заважає обчислити масу Джона в його персональних одиницях,

$$M = 200 \text{ lb} \approx 90\,718 \text{ г} = 72\,575 \text{ grg} \cdot \text{mrk}^3. \quad (26.5)$$

27 Найбільший тиск у великій посудині досягнемо, якщо поступово приєднаємо до неї всі п'ять менших балонів, оскільки ми прагнемо максимізувати різницю між тиском у великій посудині та в приєднаному малому балоні. Тоді ми максимально збільшимо кількість газу, що переходить із малого балона до великого. Розгляньмо ситуацію, коли працівник має лише два малі балони, позначені 1 та 2. Звичайна процедура — послідовно приєднати малі балони 1 і 2 до великої посудини. У малих балонах тоді залишаться тиски p_1 і p_2 , причому у великій посудині залишиться тиск p_2 . Альтернативний спосіб — спочатку приєднати малий балон 1, потім вирівняти тиски між балонами 1 і 2, а тоді поступово приєднати балони 1 і 2. Такий підхід справді вимагає кількаразового під'єднання малих балонів до великої посудини; при цьому в балоні 1 залишиться тиск p'_1 , який більший за p_1 , тож кінцевий тиск p'_2 у великій посудині (а також у малому балоні 2) буде менший, ніж p_2 . Отже, вирівнювати тиски між малими балонами недоцільно.

Із рівняння стану ідеального газу знаємо, що кількість речовини в малому та великому балонах до їхнього з'єднання визначається як $n = \frac{pV}{RT}$. Загальна кількість речовини n до та після приєднання балонів має бути сталою, тобто сума n у великому й малому балоні до приєднання дорівнює загальному n після приєднання. Якщо величини для малого балона позначити нижнім індексом m , для великої посудини v , а для кінцевого стану після з'єднання c , маємо

$$\frac{p_v V_v}{RT} + \frac{p_m V_m}{RT} = \frac{p_c V_c}{RT}. \quad (27.1)$$

Оскільки температура та універсальна газова стала R протягом процесу не змінюються, загальний (вирівняний) тиск після приєднання балонів можна записати як

$$p_c = \frac{p_v V_v + p_m V_m}{V_c}. \quad (27.2)$$

Бачимо, що всі ці величини, окрім тиску у великому балоні p_v , відомі з умови задачі. Перед приєднанням першого малого балона цей тиск дорівнює нулю, але після кожного наступного приєднання він зростає — і новий результатний тиск у з'єднаних балонах, звісно, залежить від того, яким був тиск у великому балоні перед тим.

Отже, обчислення для p_c виконуємо п'ять разів: перший раз підставляємо $p_v = 0$, а кожного наступного разу замість p_v підставляємо p_c , отримане попереднього разу. Після п'ятого приєднання отримаємо остаточний тиск $\frac{23255}{7776}$ МПа, або приблизно 3 МПа.

28 Платівку з тарілкою слід розкрутити до кутової швидкості

$$\omega = \frac{100}{3} \cdot \frac{2\pi \text{ рад}}{60 \text{ с}} = \frac{10}{9} \pi \text{ рад/с}.$$

Обертальна енергія, яку потрібно їм надати, дорівнює $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$. Оскільки момент інерції суцільного диска $J = \frac{1}{2} (m + M) r^2$, де r — радіус диска, то можемо підставити його замість J і отримаємо енергію

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} (m + M) r^2 \omega^2. \quad (28.1)$$

Ми знаємо, яку напругу та струм потребує програвач, тому можемо обчислити потужність, якою розкручуватиметься платівка, $P = UI$. Щоб визначити необхідний час розділимо потрібну енергію на потужність електроприводу:

$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{P} = \frac{\frac{1}{4} (m + M) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2}{UI} = \frac{(200 \text{ г} + 2 \text{ кг}) \cdot (15 \text{ см})^2 \cdot \left(\frac{10}{9} \pi \text{ рад/с}\right)^2}{4 \cdot 5 \text{ В} \cdot 100 \text{ мА}} \approx 0,302 \text{ с}. \quad (28.2)$$

29 Перш ніж братися за обчислення, потрібно перекласти умову зрозумілою мовою.

Для того, щоб уся система була в рівновазі, рівнодійна сил на кожен заряд має дорівнювати нулю. Завдяки симетрії достатньо розглянути сили, що діють лише на один заряд у вершині куба. Як сила притягання на нього діє тільки заряд у центрі, величину якого шукаємо; решта зарядів діють відштовхувальними силами — три заряди на відстані ребра куба, три заряди на відстані діагоналі грані і, нарешті, один заряд на відстані просторової діагоналі. Позначимо довжину ребра куба через a . Діагональ грані тоді має довжину $\sqrt{2}a$, а просторова діагональ — $\sqrt{3}a$.

Кожну із сил, що діють на обраний вершинний заряд, можна розкласти на дві складові — у напрямку рівнодійної, тобто вздовж просторової діагоналі, та іншу, у деякому напрямку, перпендикулярному до рівнодійної. Складові, перпендикулярні до просторової діагоналі, взаємно погашаються завдяки симетрії, а складові вздовж просторової діагоналі додаються до рівнодійної. Тому нас цікавить

косинус кута між просторовою діагоналлю та ребром куба, а також між просторовою діагоналлю і діагоналлю грані.

Зроби коротку паузу: обов'язковий vibe check.

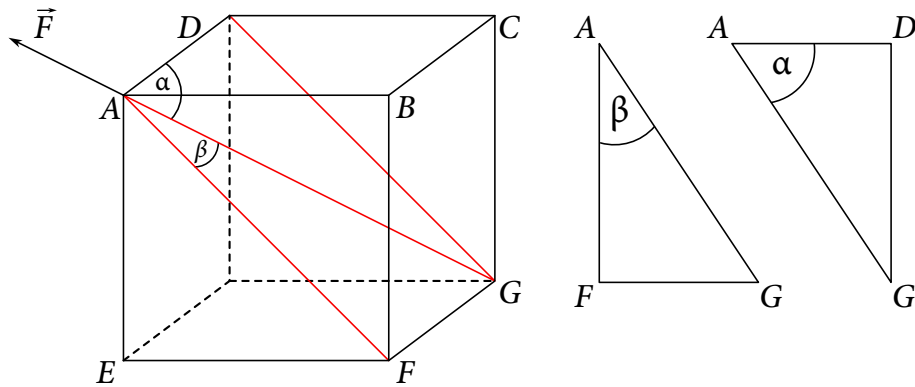


Рис. 29.1: Скібідук

Ок, vibe check пройдено. Далі обчислимо спочатку силу від заряду, розташованого на відстані одного ребра куба. Косинус потрібного кута знайдемо з прямокутного трикутника ADG як

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (29.1)$$

Отже, сила дорівнює

$$F_h = -k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2}. \quad (29.2)$$

Далі розгляньмо силу від заряду, що на відстані діагоналі грані. Косинус потрібного кута знайдемо з прямокутного трикутника AFG як

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad (29.3)$$

Отже, сила дорівнює

$$F_s = -k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2}. \quad (29.4)$$

Для сили від заряду, що на відстані просторової діагоналі, кут не потрібно враховувати, отже сила

$$F_t = -k \frac{q^2}{3a^2}. \quad (29.5)$$

Нарешті, слід знайти силу від заряду в центрі. Це та сама ситуація, що й для просторової діагоналі, тільки відстань удвічі менша. Тому сила

$$F_{\text{сред}} = 4k \frac{qQ}{3a^2}. \quad (29.6)$$

Рівнодійна сил тоді

$$F = F_{\text{сред}} - 3F_h - 3F_s - F_t = 0. \quad (29.7)$$

Після підстановки

$$\begin{aligned} 4k \frac{qQ}{3a^2} &= -3k \frac{q^2}{\sqrt{3}a^2} - 3k \frac{\sqrt{2}q^2}{2\sqrt{3}a^2} - k \frac{q^2}{3a^2}, \\ 4 \frac{Q}{3} &= -3 \frac{q}{\sqrt{3}} - 3 \frac{\sqrt{2}q}{2\sqrt{3}} + \frac{q}{3}, \\ Q &= -\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} q. \end{aligned} \quad (29.8)$$

У центрі, отже, має бути заряд $Q \doteq -2,47$ Кл. GG EZ.

30 Запишемо рівняння, які описують рух тіла під кутом до горизонту:

$$\begin{aligned} y &= v \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} a t^2, \\ x &= v \cos(\alpha) t. \end{aligned} \quad (30.1)$$

На Місяці вони повинні виконуватися так само, лише прискорення вільного падіння є іншим: якщо підставимо $a = 0,16g$, то має виконуватися

$$\begin{aligned} y_{\zeta} &= v_{\zeta} \sin(\alpha) t_{\zeta} - \frac{1}{2} 0,16 g t_{\zeta}^2, \\ x_{\zeta} &= v_{\zeta} \cos(\alpha) t_{\zeta}. \end{aligned} \quad (30.2)$$

Положення на відео неможливо підробити. Щоб рівняння для x і y залишалися однаковими, потрібно скоригувати час і швидкість. Бачимо, що

$$0,16 t_{\zeta}^2 = t_{\oplus}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{0,16}} t_{\oplus} = \frac{1}{0,4} t_{\oplus} = 2,5 t_{\oplus}. \quad (30.3)$$

З рівняння для x_{ζ} тепер бачимо, що

$$x_{\zeta} = v_{\zeta} \cos(\alpha) 2,5 t_{\oplus}, \quad (30.4)$$

Також $v_{\zeta} = 0,4 v_0$, щоб рівняння 30.4 співпадало з виразом для x у рівнянні 30.1. Таким чином, на Місяці весь похилий кидок тривав би в 2,5 разів довше. Це означає, що земне відео потрібно

відтворювати з частотою кадрів у 2,5 разів меншою, тобто 24 Гц. З іншого боку це означає, що ми просто переходимо від телевізійної частоти до кінематографічної.

Випадковість? Ми так не вважаємо.

31 Давайте розглянемо тепловий насос як теплову машину, що споживає енергію з електромережі й перекачує тепло з підвалу Адама до підвалу Юстини. Ключем до розв'язання задачі є усвідомлення поняття «енергоефективність».

Загалом можна сказати, що ефективність — це відношення того, чого ми прагнемо досягти, до того, що мусимо в це інвестувати. У випадку Юстини тим, чого ми хочемо досягти, є кількість тепла, яке тепловий насос передає до її підвалу, Q_{out} , а тим, що ми повинні інвестувати, є кількість підведеної з мережі електричної енергії (вона дорівнює роботі, виконаній над робочим газом у насосі, W). Отже, спостережувана нею енергоефективність визначається як $\eta_J = \frac{Q_{\text{out}}}{W} = 1500\%$.

У випадку Адама тим, чого ми хочемо досягти, є кількість тепла, відкачаного холодильною машиною з його підвалу, Q_{in} , а тим, що ми мусимо інвестувати, знову є кількість підведеної електричної енергії W , тож спостережувана ним енергоефективність є $\eta_G = \frac{Q_{\text{in}}}{W}$.

Тепловий насос відкачує тепло Q_{in} з підвалу Адама, ми підводимо до нього енергію W з мережі, і він передає тепло Q_{out} до підвалу Юстини. Енергетичний баланс, записаний для теплового насоса, має вигляд $Q_{\text{in}} + W = Q_{\text{out}}$.

Скориставшись цим співвідношенням, енергоефективність, яку спостерігає Адам, можна виразити як $\eta_G = \frac{Q_{\text{out}} - W}{W} = \eta_J - 1 = 1400\%$.

32 Розглянемо ситуацію в завданні з точки зору енергій. На початку дня МКС має певну енергію, що дорівнює сумі її потенціальної та кінетичної енергій. Після однієї доби дії гальмівної сили атмосфери енергія МКС дещо зменшується, оскільки ця сила діє проти напрямку її руху.

Позначимо індексом 1 енергії на початку, а індексом 2 — енергії наприкінці дня. Закон збереження енергії має вигляд

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} + W, \quad (32.1)$$

де E_p — потенціальні енергії, E_k — кінетичні енергії, а W — робота, яку виконує гальмівна сила над МКС.

МКС обертається по коловій орбіті, тож її швидкість легко виразити з рівності гравітаційної та відцентрової сил. Для наших цілей зручніше одразу записати її квадрат⁷

$$v^2 = \frac{GM_{\oplus}}{r}, \quad (32.2)$$

де $M_{\oplus}$ — маса Землі, а $r = R_{\oplus} + 400$ км — відстань МКС від центра Землі, причому $R_{\oplus}$ — це, зрозуміло, радіус Землі. Також позначимо масу МКС через m та добове зниження висоти через Δr .

⁷ Адже ми підставлятимемо його у вираз для кінетичної енергії.

З урахуванням цього рівняння 32.1 можна записати як

$$-\frac{GM_{\oplus}m}{r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r} = -\frac{GM_{\oplus}m}{r-\Delta r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_{\oplus}}{r-\Delta r} + W. \quad (32.3)$$

Звідси виразимо роботу гальмівної сили

$$W = \frac{GM_{\oplus}m}{2} \left(\frac{1}{r-\Delta r} - \frac{1}{r} \right). \quad (32.4)$$

Гальмівна сила F діє проти напрямку руху, тому, пройшовши шлях s , ця сила виконує роботу $W = Fs$. Який шлях проходить МКС за добу? Оскільки Δr набагато менше за радіус кола, немає потреби обчислювати довжину спіралі, якою МКС фактично рухається. Достатньо точний результат отримаємо, якщо вважатимемо, що МКС рухається протягом доби на висоті $r - \Delta r/2$ зі швидкістю, що відповідає цій висоті згідно з рівнянням 32.2, тобто

$$s = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r - \Delta r/2}} T, \quad (32.5)$$

де T — одна доба. Нарешті, з рівнянь 32.4 і 32.5 підставимо у

$$F = \frac{W}{s} \doteq 0,26 \text{ Н}. \quad (32.6)$$

33 Будемо вважати, що ми повернули рулон на максимально можливий кут. Тоді нормаль до ISIC утворює із вертикальним напрямком кут φ .

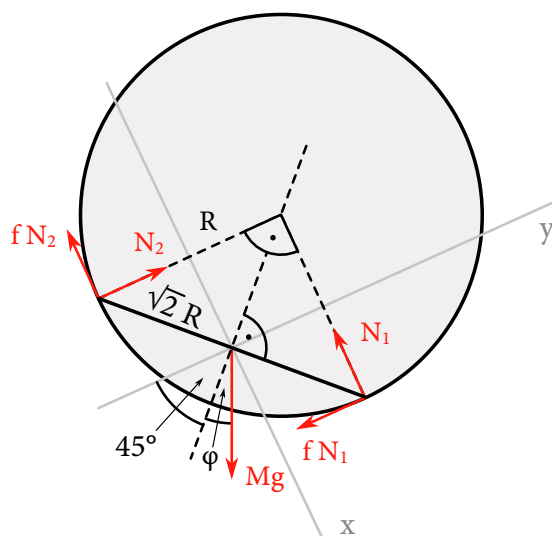


Рис. 33.1: Рулон із нанесеними діючими силами

На ребра ISIC діють нормальні сили N_1 і N_2 перпендикулярно до поверхні рулона, а отже — до його центра. У напрямку дотичної, своєю чергою, діють сили тертя, модулі яких у граничному випадку дорівнюють $f N_1$ та $f N_2$. На центр ISIC діє вертикально донизу сила тяжіння Mg .

Розмір ISIC саме такий, що разом із векторними прямими нормальних сил утворює прямокутний трикутник із катетами довжини R і гіпотенузою $\sqrt{2}R$. Це, зокрема, означає, що сили N_1 та $f N_2$ мають однаковий напрям, який є перпендикулярним до напрямку сил N_2 та $f N_1$. Це спонукає вибрати систему координат так, аби координатні осі були зорієнтовані в цих двох напрямках, тобто повернуті на 45° відносно ISIC. Тоді сила тяжіння розкладається на складові $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ і $Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$.

Тепер можемо записати умови стійкості:

- рівновага сил у x -напрямку,

$$N_1 + f N_2 = Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right); \quad (33.1)$$

- рівновага сил у y -напрямку,

$$N_2 = f N_1 + Mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right); \quad (33.2)$$

- і рівновага моментів сил відносно центра ISIC,

$$N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = f N_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + f N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (33.3)$$

звідки

$$N_1 = f N_1 + N_2 + f N_2. \quad (33.4)$$

Виключивши нормальні сили, отримаємо

$$\underbrace{\frac{1 + 2f - f^2}{1 - 2f - f^2}}_K = \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} \quad (33.5)$$

а звідси

$$\tan \varphi = \frac{K - 1}{K + 1} = \frac{2f}{1 - f^2}. \quad (33.6)$$

Для $f = 0,3$ отримуємо $\varphi \approx 33,4^\circ$.

34 Запишемо рівняння руху автомобіля на горизонтальній площині,

$$ma_- = fmg \Rightarrow f = \frac{a_-}{g}, \quad (34.1)$$

де f - коефіцієнт тертя. На площині, нахилений на кут α , рівняння зміниться:

$$ma = mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha. \quad (34.2)$$

Порівняно з рівнянням 34.1 праворуч з'явився ще один доданок. Прискорення авто як і раніше визначається тертям коліс об дорогу (що зменшується зі зростанням кута нахилу), але тепер на нього діє ще й складова сили тяжіння вздовж похилої площини. Отже, прискорення

$$a = g \sin \alpha + f g \cos \alpha. \quad (34.3)$$

Аналітичне розв'язання

Найкоротший час розгону отримаємо, максимально підвищивши a . Потрібно продиференціювати a за кутом α і з'ясувати, коли похідна дорівнює нулю. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} &= g \cos \alpha - f g \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0, \\ \cos \alpha &= f \sin \alpha, \\ \tan \alpha &= \frac{1}{f} = \frac{g}{a_-}. \end{aligned} \quad (34.4)$$

Скористаємося тригонометричними тотожностями 25.6 і підставимо $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$ у 34.3. Після перетворень із використанням 34.1 дістанемо

$$a = \sqrt{a_-^2 + g^2}. \quad (34.5)$$

Тепер нам залишається знайти прискорення авто на рівній поверхні та обчислити час розгону з гори. Скористаємося тим, що для рівноприскореного руху виконується $v = at$, тому

$$t = \frac{v}{\sqrt{a_-^2 + g^2}} = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{v}{t_-}\right)^2 + g^2}}, \quad (34.6)$$

де v — максимальна швидкість, до якої розганяється авто, а t_- — час розгону на рівній поверхні. Підставляємо значення й отримуємо $t \doteq 1,51$ с.

Числове розв'язання

Якщо не хочемо диференціювати, максимум a можна шукати безпосередньо з рівняння 34.3 чисельно, наприклад лінійним переглядом інтервалу за допомогою калькулятора. Якщо накреслити графік функції з рівняння 34.3 видно, що вона має лише один максимум, тож оцінюємо її в кількох точках і стежимо, коли вона вперше почне спадати. За потреби можна повернутися та зменшити крок, доки не знайдемо максимум із прийнятною точністю. Наприклад, нас влаштовує результат $\alpha \approx 0,595$ рад $\approx 34,1^\circ$, з якого знаходимо прискорення та час.

35 Якщо подивитися на Землю та її тінь здалеку, її тінь є нескінченним циліндром з основою у формі кола.⁸ Для будь-якої фіксованої точки на її поверхні Сонце заходить, коли обертання Землі переносить цю точку через межу тіні.

⁸Якщо врахувати скінченні розміри та відстань від Сонця, це радше конус, але в нашому випадку це не суттєво.

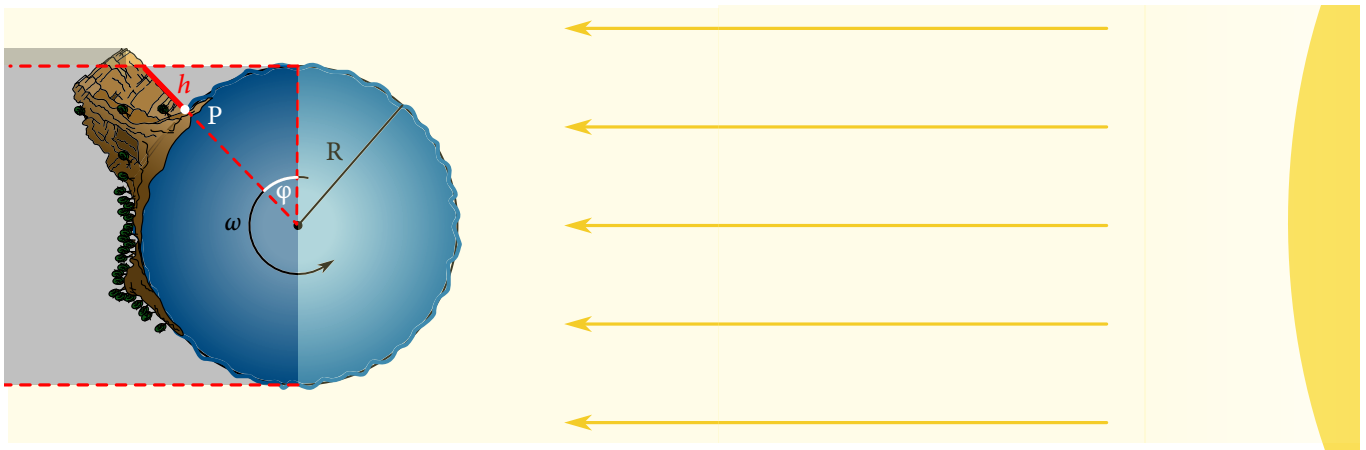


Рис. 35.1: Земля, що відкидає тінь

І не лише на поверхні — те саме стосується і точок на скелі. Якщо висота скелі настільки мала порівняно з радіусом Землі що нею можна знехтувати — а так і є насправді — то для будь-якої точки на скелі на висоті h Сонце зайде тоді, коли точка P опиниться на глибині h всередині тіні, тобто на відстані h від бічної поверхні циліндра. Отже, висота тіні (у випадку нехтовно малої висоти скелі) дорівнює перпендикулярній відстані точки P від бічної поверхні циліндра.

І це все. Точка P рухається по колу радіуса $R_{\oplus}$ з кутовою швидкістю $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ діб}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ с}}$. Проекція такого руху на площину, перпендикулярну до сонячних променів, є гармонічним рухом з тією самою кутовою швидкістю, і для його прискорення поблизу максимального відхилення маємо

$$a = \omega^2 R_{\oplus} \approx \left(\frac{2\pi}{86400 \text{ с}} \right)^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ м} \doteq 0,034 \text{ м/с}^2. \quad (35.1)$$

Рішення «в лоб»

Якщо під час змагання хитромудрого розв'язку не знайдеться, результат можна «вибити» грубою силою. Позначимо центральний кут між вертикаллю скелі та термінатором через φ . Тоді з прямокутного трикутника, що містить цей кут і обмежений бічною поверхнею тіні, можемо записати

$$R_{\oplus} + h(\varphi) = \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.2)$$

Коли Земля повертається на кут $d\varphi$, висота, на яку підіймається тінь, збільшується на

$$dh = \frac{R_{\oplus}}{\cos(\varphi + d\varphi)} - \frac{R_{\oplus}}{\cos \varphi}. \quad (35.3)$$

Для невисокої скелі кут φ дуже малий, тож можна використати наближення $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ та $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$. Послідовними перетвореннями дістаємо

$$dh \approx R_{\oplus} \left[\frac{1}{1 - \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} \right] \approx R_{\oplus} \left[1 + \frac{(\varphi + d\varphi)^2}{2} - \left(1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \approx R_{\oplus} \varphi d\varphi. \quad (35.4)$$

Оскільки Земля здійснює рівномірний обертальний рух, $\varphi = \omega t$, і тому

$$dh \approx R_{\oplus} \omega t \omega dt. \quad (35.5)$$

Звідси можемо одразу записати швидкість підйому тіні по скелі

$$v(t) = \frac{dh}{dt} \approx R_{\oplus} \omega^2 t. \quad (35.6)$$

і в цьому впізнаємо швидкість рівноприскореного руху з прискоренням $a = \omega^2 R_{\oplus}$.

36 Кубко спершу замислився, що маєтсья на увазі під активністю як збагаченого, так і природного урану. Він пам'ятав природну пропорційну залежність між числом розпадів атомів ΔN за час Δt та числом частинок N у даний момент часу

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t, \quad (36.1)$$

де коефіцієнт пропорційності λ , також званий *сталю радіоактивного розпаду*, характеризує швидкість розпаду. Подане рівняння приводить до часової еволюції

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (36.2)$$

що називається законом радіоактивного розпаду, де N_0 — кількість частинок у момент $t = 0$.

Останнє, що Кубко має виразити, — це період напіврозпаду, тобто час, за який кількість частинок цього радіоактивного матеріалу зменшиться удвічі. Це буде $N = \frac{N_0}{2}$, що після підстановки в закон радіоактивного розпаду дає для сталої радіоактивного розпаду

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (36.3)$$

Далі, з попередніх міркувань він може знайти вираз для активності, тобто швидкості радіоактивного перетворення

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N. \quad (36.4)$$

Щоб обчислити, наскільки активність збагаченого урану A_0 більша, ніж активність природного урану A_p , він розглядає відношення $\frac{A_0 - A_p}{A_p}$, де використовує відомі частки ^{235}U і ^{238}U в обох випадках та їхні періоди напіврозпаду $T_{1/2}^{235} = 7 \cdot 10^8$ а і $T_{1/2}^{238} = 4,46 \cdot 10^9$ а. З періодів напіврозпаду та співвідношення для активності випливає, що сталю радіоактивного розпаду λ для ^{235}U повинна бути у k разів

більшою, ніж для ^{238}U , а саме

$$k = \frac{T_{1/2}^{238}}{T_{1/2}^{235}} \doteq 6,371. \quad (36.5)$$

Далі, позначивши частку ^{235}U у збагаченому урані через a , а в природному — через b , для відносної зміни активності отримуємо вираз

$$\frac{A_o - A_p}{A_p} = \frac{k\lambda a N + \lambda(1-a)N}{k\lambda b N + \lambda(1-b)N} - 1 = \frac{(a-b)(k-1)}{1+b(k-1)} \doteq \frac{(0,03 - 0,0072) \cdot (6,371 - 1)}{1 + 0,0072 \cdot (6,371 - 1)} \doteq 11,8 \%. \quad (36.6)$$

37 Насамперед зауважимо, оскільки вісь обертання перпендикулярна до площини амулета, то поворот окремих вирізаних квадратів, жодним чином не вплине на момент інерції амулета. Назвемо перший круг, з якого вирізано квадрат першою ітерацією. Коли знову впишемо круг й виріжемо з нього вписаний квадрат, називатимемо це другою ітерацією, і так далі. Момент інерції кола радіуса r дорівнює $I_{\bigcirc} = \frac{1}{2}mr^2$, а квадрата $I_{\square} = \frac{1}{6}ma^2$, де a — сторона квадрата.

Розгляньмо першу ітерацію нашої задачі. Маємо радіус кола першої ітерації $r_1 = r$ і вписаний квадрат зі стороною довжини $a = \sqrt{2}r$. Відомо, що діагональ квадрата дорівнює $2r$. З прямокутного трикутника, обмеженого двома сусідніми вершинами квадрата та центром кола, маємо

$$\cos 45^\circ = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \sqrt{2}r. \quad (37.1)$$

Момент інерції та площа першої ітерації обчислюються просто:

$$I^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma S_{\bigcirc}^{(1)}r_1^2 - \frac{1}{6}\sigma S_{\square}^{(1)}a_1^2 = \frac{1}{2}\pi\sigma r_1^4 - \frac{4}{6}\sigma r_1^4 = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)\sigma r_1^4 \quad (37.2)$$

$$S^{(1)} = S_{\bigcirc}^{(1)} - S_{\square}^{(1)} = \pi r_1^2 - a_1^2 = (\pi - 2)r_1^2.$$

Момент інерції $I^{(n)}$ і площа $S^{(n)}$ наступних ітерацій рахуються подібно, лише для інших значень r_n . Нам залишається з'ясувати, який вигляд має залежність $r_n = r_n(r, n)$. Для першої ітерації $r_1 = r$. Друга ітерація – це коло, вписане у квадрат, отже

$$2r_2 = a_1 \Rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}r. \quad (37.3)$$

Аналогічно маємо

$$r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}r_2 = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad (37.4)$$

а отже загалом для r_n

$$r_n = \frac{\sqrt{2}}{2}r_{n-1} = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}. \quad (37.5)$$

Залишається лише знайти суму нескінченних рядів:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)} = (\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = r^2 (\pi - 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2n-2} \\ &= r^2 (\pi - 2) \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = 2r^2 (\pi - 2), \end{aligned} \quad (37.6)$$

а для моменту інерції

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r_n^4 = \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{4n-4} \\ &= \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r^4 \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) \sigma r^4 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) \frac{m}{S} r^4, \end{aligned} \quad (37.7)$$

де ми використали, що сума геометричного ряду $a_n = a_0 q^n$ дорівнює $\sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$. Після підстановки S у I отримаємо

$$I = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3}}{\pi - 2} m r^2 = \frac{3\pi - 4}{9\pi - 18} m r^2. \quad (37.8)$$

38 Почнімо з запису формули для опису функції поверхні параболічного міста:

$$h(r) = k r^2, \quad (38.1)$$

де r — відстань точки на поверхні параболоїда від осі обертання, тобто від центру міста. Додавати сталу немає потреби, оскільки нас цікавить лише різниця висот. Для найвищої точки в місті маємо

$$H = k R^2, \quad (38.2)$$

де H — шуканий перепад висот, а R — радіус із умови.

Втім, ми ще не знаємо коефіцієнт k . Його знайдемо з похідної параболі в точці $[R; H]$. Адже відомо, що результуюча сила тяжіння має бути перпендикулярною до поверхні параболоїда. Похідна параболі в точці $[R; H]$, $2kR$, є кутовим коефіцієнтом дотичної в цій точці. Можемо згадати, що нахил прямої можна знайти як $\tan \frac{\Delta y}{\Delta x}$, де у нашому випадку $\Delta y = a_c$, а $\Delta x = g_\sigma$, отже

$$2kR = \frac{a_c}{g_\sigma} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{a_c}{2g_\sigma R}. \quad (38.3)$$

Підставивши k у 38.2, одержуємо

$$H = \frac{a_c R}{2g_\sigma}. \quad (38.4)$$

Залишається виразити a_c . Знайдемо його за теоремою Піфагора як

$$a_c = \sqrt{g^2 - g_\sigma^2}. \quad (38.5)$$

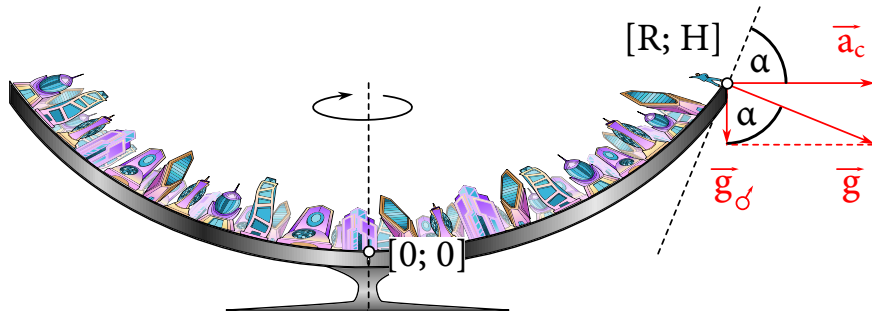


Рис. 38.1: Вертикальний переріз параболічним містом

Підставляємо й дістаємо

$$H = \frac{R\sqrt{g^2 - g_{\sigma}^2}}{2g_{\sigma}} \doteq 1296 \text{ м.} \quad (38.6)$$

39 Позначимо об'єм морозива V , що має форму деформованого конуса. Тобто на будь-якій висоті горизонтальним перерізом упаковки є еліпс з великою піввіссю a та малою піввіссю, що пропорційна вертикальній координаті, як на рисунку 39.1.

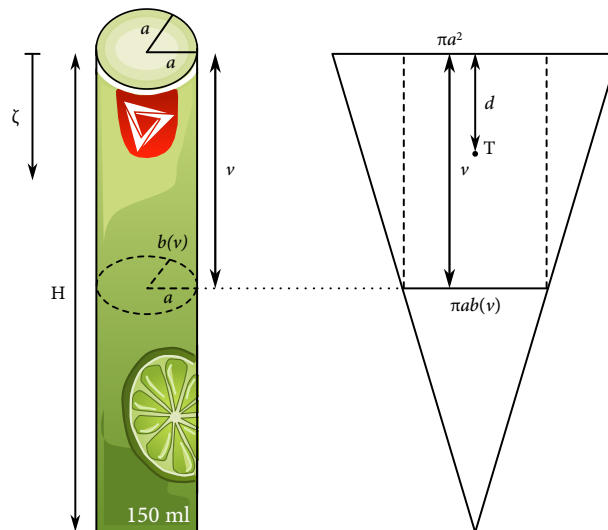


Рис. 39.1: Геометрія морозива

Введемо координату ζ , що починається на поверхні і напрямлена вниз (углиб морозива):

$$b(\zeta) = \frac{H - \zeta}{H} a \quad (39.1)$$

тоді площа поперечного перерізу на глибині ζ дорівнює

$$S(\zeta) = \pi ab(\zeta) = \pi a^2 \frac{H - \zeta}{H}. \quad (39.2)$$

Зауважимо, що площа поперечного перерізу зменшується лінійно з ζ . Площинною аналогією нашого деформованого конуса є трикутник із тією ж властивістю. Для обчислення центру мас він еквівалентний рівнобедреному трикутнику з довжиною основою $\ell = S(0) = \pi a^2$, і такою ж висотою H . У цій аналогії площа трикутника A відповідає об'єму морозива V , тому

$$V = A = \frac{1}{2} \ell H = \frac{1}{2} \pi a^2 H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2V}{\pi a^2}. \quad (39.3)$$

Вивчимо ситуацію, коли Яро з'їсть половину об'єму морозива. Іншими словами, потрібно знайти ту частину морозива, що відповідає половині об'єму. Позначимо $\Theta(\zeta)$ об'єм морозива, що лежить в інтервалі $[0; \zeta]$. Тоді $\Theta(\zeta)$ очевидно відповідатиме площі трапеції, що утворюється з еквівалентного трикутника відсіканням від основи на відстані ζ . Отже

$$\Theta(\zeta) = \frac{\pi a^2 + \pi ab(\zeta)}{2} \zeta = \pi a^2 \frac{1 + \frac{H - \zeta}{H}}{2} \zeta = \pi a^2 \zeta \left(1 - \frac{\zeta}{2H}\right). \quad (39.4)$$

Нехай половині об'єму відповідає $\zeta = v$, тобто $\Theta(v) \stackrel{!}{=} \frac{V}{2}$. Звідси отримуємо

$$\frac{1}{2} \pi a^2 H = \pi a^2 v \left(1 - \frac{v}{2H}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} H. \quad (39.5)$$

Отже, щоб з'їсти половину об'єму морозива, Яро має висунути його з упаковки на цю відстань.

Яку роботу при цьому виконано? Очевидно, що центр мас нез'їденої частини піднято саме на висоту v . Кожен з'їдений шматок він спершу піднімав до верхнього краю, а вже потім з'їдав. Це означає, що центр мас з'їденої частини фактично піднято до верхнього краю. Потрібно ще визначити, де спочатку містився центр мас з'їденої частини.

Нехай цей центр мас був на глибині d під верхнім краєм. В еквівалентному 2D-випадку це відповідає положенню центра мас трапеції, яке знаходимо як зважене середнє центрів мас прямокутника і трикутника:

$$d = \frac{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v \cdot \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v \cdot \frac{v}{3}}{\pi a^2 \frac{H-v}{H} v + \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{v}{H} v} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} H. \quad (39.6)$$

Виконана робота дорівнює зміні потенціальної енергії, тобто

$$W = \frac{V}{2} \rho g d + \frac{V}{2} \rho g v = \frac{4 - \sqrt{2}}{6\pi} \frac{V^2}{a^2} \rho g \approx 76 \text{ мДж}. \quad (39.7)$$

40 Маємо об'єкт, який рухається шляхом s з сталим прискоренням a . Пройдена відстань з часом зростає як $s = \frac{1}{2}at^2$, а швидкість як $v = at$. Комбінуванням цих двох співвідношень отримуємо

$$v(s) = \sqrt{2as}. \quad (40.1)$$

Хочемо визначити середню швидкість, яку було виміряно рівномірно вздовж усього шляху. Тобто йдеться про середню шляхову швидкість (середнє значення миттєвих швидкостей на всьому шляху). Функція $v(s) = \sqrt{2as}$ зростає від $v(0) = 0$ до $v(s) = \sqrt{2as} = v_{\max}$. Графічно це половина параболи $y = \sqrt{x}$. Потрібно знайти середню висоту цієї параболи.

Для цього треба знати площу під нею. Якщо вміємо інтегрувати, сумлінно обчислимо середнє значення швидкості як інтеграл

$$\langle v \rangle_x = \frac{1}{s} \int_0^s \sqrt{2ax} \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as}. \quad (40.2)$$

Якщо інтегрувати не вміємо, не хочемо або не встигаємо, це можна розв'язати і гарним старогрецьким трюком, так званою *квадратурою параболи*⁹. Відділимо з нижньої частини параболи все, що лежить під прямою, яка сполучає її кінці. Площу трикутника вміємо обчислити. Залишиться площа, обмежена прямою та параболою. Можна показати, що площа такої фігури дорівнює $\frac{4}{3}$ площі вписаного трикутника з вершиною в центрі інтервалу: після відсікання цього трикутника знову залишаться дві фігури, обмежені прямою та параболою, і це веде до геометричної прогресії з коефіцієнтом $\frac{1}{4}$. Результат, звісно, той самий, що й у рівнянні 40.2.

Нам залишається простіша частина цієї задачі. Справжню середню швидкість Томашового авто визначимо тривіально як загальну пройдену відстань за загальний час,¹⁰ тобто

$$\langle v \rangle_t = \frac{s}{\sqrt{\frac{2s}{a}}} = \sqrt{\frac{as}{2}}. \quad (40.3)$$

Таким чином, шукане відношення середньої шляхової швидкості до середньої швидкості за часом:

$$\frac{\langle v \rangle_x}{\langle v \rangle_t} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{as}}{\sqrt{\frac{as}{2}}} = \frac{4}{3}. \quad (40.4)$$

⁹Τετραγωνισμός παραβολῆς, Архімед, III століття до нашої ери. Сучасну версію можна знайти, наприклад, на [Wikipediі](https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_exhaustion).

¹⁰Зауважимо, що цю формулу можна також отримати за допомогою інтегралу:

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T at \, dt = \frac{\frac{1}{2}aT^2}{T} = \frac{s}{T}.$$

Відповіді

1 0 см

2 ν

3 1 г і 5 г, Земля і Плутон

4 400 мл/с

5 $\frac{826 + 160\sqrt{2}}{343} \text{ с} \doteq 3,07 \text{ с}$

6 72 с, зараховуйте також 01:12.

7 22:20

8 100 %, тобто уся кімната.

9 5,47 км

10 2,5 Дж, зараховуйте значення в інтервалі 2,4 Дж – 2,5 Дж.

11 $s = \frac{c \cdot t \cdot \nu}{c - \nu} = \frac{\nu^2 t}{c - \nu} + \nu t$

12 A-49

13 $s \left(1 + \frac{\nu}{u} \right)$

14 25,4°

15 3,20 кН, зараховуйте також 3,14 кН.

16 $\sqrt{8} \text{ с} \doteq 2,83 \text{ с}$

17 $\frac{1}{3}g$

- 18 18
- 19 $\left\{ \frac{1}{2}R; \frac{5}{8}R; R \right\}$
- 20 N, H, A, B, Y, I, *порядок має значення.*
- 21 56 мм²
- 22 7 %
- 23 $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{3 \sin^2 \alpha + 1}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{4 + \cot^2 \alpha}}$
- 24 74 %
- 25 10 м, *зараховуйте також 9,8 м.*
- 26 72 575 grg · mrk³
- 27 $\frac{23255}{7776} \text{ МПа} \doteq 3,0 \text{ МПа}$
- 28 0,302 с
- 29 $-\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{8} \text{ Кл} \doteq -2,47 \text{ Кл}$, *зверніть увагу на знак.*
- 30 24 Гц
- 31 1400 %
- 32 0,26 Н
- 33 33,4°
- 34 1,51 с, *зараховуйте значення в інтервалі 1,51 с – 1,52 с.*
- 35 34 мм/с²

36 11,8 %

37 $\frac{3\pi - 4}{9\pi - 18}mr^2 \doteq 0,528mr^2$

38 1296 м

39 76 мДж, зараховуйте значення в інтервалі 76 мДж – 77 мДж.

40 $\frac{4}{3}$

Автори завдань

Martin ,Kvík‘ Baláž
Šimon Borovský
Jakub Hluško
Lucia Kleščová

Katarína Magdolenová
Miroslav Pajger
Patrik ,pa3k‘ Rusnák
Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga
Jaroslav Valovčan
Soňa Vasiľová
Tomáš ,Mözög‘ Vörös

Дизайн

Katarína Nedelková

Anamária ,Anomália‘ Šutková

Michal ,Piškót‘ Tomaga

Технічні редактори

Martin ,Kvík‘ Baláž