Milí čtenáři,

v rukou držíte sbírku úloh 29. ročníku Fyzikálního Náboje. Ve sbírce se nacházejí všechny úlohy, se kterými jste se v tomto ročníku mohli na soutěži střetnout. K úlohám přikládáme i vzorová řešení, ze kterých se můžete mnohé naučit. Pokud byste některému řešení nerozuměli, neváhejte se nám ozvat, všechno objasníme.

Tato sbírka by nevznikla bez významné pomoci mnohých lidí, kteří se podíleli na celém vývoji Fyzikálního Náboje. Autory Fyzikálního Náboje jsou převážně studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě a většina z nich se také podílí na organizování Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS – https://fks.sk/). V České republice s překladem a organizací pomohli převážně studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, kteří se podílejí na české verzi FKS, tedy FYKOSu.

Fyzikální Náboj i v roce 2026 pokračuje ve své mezinárodní tradici. Za mezinárodní spolupráci děkujeme lokálním organizátorům: Katarína Gersová (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Jiří Kvapil (Olomouc), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Urszula Goławska (Gdańsk), Witold Zawadzki (Krakov), Andrzej Karbowski (Toruň), Patrycja Styka (Varšava), Mirela Kaczmarek (Vratislav), José Francisco Romero García (Madrid), Dmytro Rzhemovskyi (Vídeň), Vasyl Rizak (Užhorod) a João Rico (Lisabon).Výsledky vzájemného souboje si můžete prohlédnout na našich stránkách.

FYKOS je korespondenční fyzikální soutěž. Zhruba jednou za měsíc zveřejňujeme různé zajímavé fyzikální úlohy, jejichž řešení nám do určených termínů můžete poslat. My vám úlohy opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejlepší řešitele zveme dvakrát do roka na týdenní soustředění. Více informací najdete na stránce https://fykos.cz/.

Jménem celého organizátorského týmu věříme, že jste si v roce 2026 Fyzikální Náboj užili, a doufáme, že se všichni uvidíme na Náboji i příští rok, ať už v roli soutěžících, nebo organizátorů.

Jakub Kliment – hlavní organizátor v ČR

Jaroslav Valovčan – hlavní organizátor

Výsledky soutěže, archiv úloh a další informace najdete na stránce https://physics.naboj.org/.

Zadání

1 Kai si tak jednou počítal jednu úlohu z FKS. Když už měl hotovo, šel se celý natěšený pochlubit Matoušovi. Ten s ním však nadšení nesdílel a po prvním pohledu na výsledek vypálil zákeřnou otázku:

„A sedí ti jednotky?“

V tabulce níže se nacházejí dva sloupce. V prvním jsou výrazy obsahující různé fyzikální jednotky. V druhém se nacházejí základní jednotky SI, případně jejich jednoduché kombinace. Vaším úkolem je přiřadit výrazy z prvního sloupce k jednotkám z druhého sloupce tak, aby každá dvojice měla stejný rozměr.

Odpověď odevzdejte ve tvaru `A1, B2, C3, D4, E5, F6`.

A	$\mathrm{C}\cdot\mathrm{Hz}\cdot\mathrm{rad}$	**1**	1
B	$\mathrm{J/N}$	**2**	A
C	$\mathrm{N}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{Hz}^2)$	**3**	kg
D	$\mathrm{V}\cdot\mathrm{A/N}$	**4**	m
E	$\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{N}$	**5**	m/s
F	$\mathrm{J/W}$	**6**	s

2 Kubík má doma švihadlo s lankem tlustým h. Jedno pondělní ráno dostal velkou chuť si zaskákat. Zrovna však pršelo a Kubík nechtěl zmoknout. Vtom ho však napadlo, jestli by ho skákání přes švihadlo nedokázalo před deštěm ochránit.

Uvažujte, že déšť padá rovnoměrně svisle dolů rychlostí v. Když je kapka zasažena švihadlem, odrazí ji úplně pryč. Jaká největší může být perioda Kubíkových skoků přes švihadlo, aby na něj určitě nespadla žádná kapka?

3 Ťuk, ťuk, ťuk… Míček po stole skáče s periodou 1 s. Jak vysoko nad stolem je vrchol jeho dráhy?

4 Říša letí letadlem do Austrálie ve výšce 10 km. Let trvá dlouho a Říša z nudy sleduje na obrazovce přenos z kamery, která je namířena z letadla přímo dolů. Všimne si, že objektům, které jsou na zemi přímo pod letadlem, trvá 40 s, než projdou celým zorným polem kamery. Po chvíli mu však sledování země pokazí mraky. Říša pozorně zaostří na jeden maličký obláček přímo pod letadlem a změří, že ho mohl vidět pouze po dobu 10 s.

V jaké výšce nad zemí se obláček nacházel, pokud se vzhledem k zemi nehýbal?

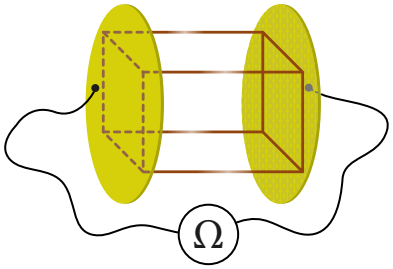
5 Nina se tento semestr přestěhovala z koleje do podnájmu s kamarády. Při balení a stěhování si však musela pořádně promyslet, které její věci jsou těžší a které lehčí, aby je rozumně naložila do kufru auta…

Seřaďte hmotnosti následujících objektů **vzestupně**.

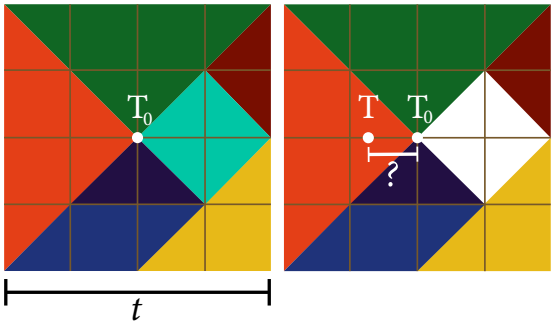
Odevzdejte posloupnost ve tvaru `ABCDEFGHIJKL`.

A	atom hliníku	**G**	prázdný balónek
B	bouřkový mrak	**H**	proton
C	elektron	**I**	balónek z možnosti**G** naplněný heliem
D	virus chřipky	**J**	trojská unce zlata
E	Měsíc	**K**	tvoje máma
F	molekula ozonu	**L**	všechna kapalná voda na Zemi

6 Andrej si z tenkého drátu s délkovým odporem 240 Ω/m vyrobil síť kvádru s rozměry 20 cm × 15 cm × 10 cm, tedy 12 rovných drátků spojujících vrcholy kvádru daných rozměrů. Tento kvádr postupně vkládá mezi dvě tenké dokonale vodivé rovnoběžné desky tak, že se vždy dvě stěny kvádru úplně dotýkají desek. Jaké odpory naměří, pokud ho vloží mezi tyto desky postupně ve všech třech jeho orientacích a ohmmetr připojí na desky?

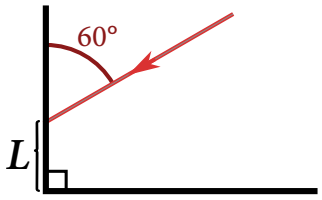


7 Tibor tradičně tratí tretky – telefon, terárium, tarantuli… Teď tratil tyrkysový tvar tangramu tlustého t. Tím transformoval tomuto tangramu těžiště. Takto těžiště travelovalo $T_0 \to T$. Tipni $|T_0T|$. Toť tvůj task. Tak tedy těžišťuj.



8 Mirek je zklamaný, že mu vlasy už vypadávají a tvoří se mu na hlavě kouty. Je pevně rozhodnutý, že vymyslí kout, který bude i na něco užitečný. Vzal proto dvě obdélníková zrcadla a spojil jejich dvě hrany k sobě pod pravým úhlem. Na obrázku je průřez tímto zrcadlovým koutem. Mirek teď v rovině tohoto průřezu na jedno ze zrcadel svítí paprskem. Všiml si, že ať zasvítí jakkoli, po dvou odrazech se paprsek odrazí rovnoběžně s jeho původním směrem. Momentálně Mirkův paprsek na zrcadlo dopadá ve vzdálenosti L od spoje zrcadel pod úhlem 60° vůči rovině zrcadla.

Vyjádřete vzdálenost mezi přicházejícím a odraženým paprskem pomocí vzdálenosti L.



9 Mirek sedí na kruhovém kolotoči s poloměrem 3 m, který se točí úhlovou rychlostí 1 rad/s. Chce hodit nehmotný míček Aničce, která stojí ve středu kolotoče. Mirek hází míček tak, že mu vzhledem k sobě udělí vodorovnou rychlost 6 m/s.

Jaký musí být úhel mezi vodorovnou spojnicí Mirek–Anička a směrem, kterým Mirek hází, aby ji Mirek trefil?

10 Šimon na chalupě nosí klády – homogenní dřevěné úsečky s délkovou hustotou λ. Všiml si, že při nošení těžkých klád je dobrým prvním krokem nejprve je převalit. Překlápí je tedy z původní horizontální polohy (úsečka leží na zemi) do polohy vertikální (úsečka stojí, kolmá na zem). Šimon se právě chystá takto převalit homogenní kládu s délkou L.

Jakou nejmenší silou určitě potřebuje umět na kládu působit, aby ji dokázal převalit?

11 Mözög se učí vařit. Dnes má na programu vývar. Někde se dočetl, že takový vývar je potřeba vařit hodně dlouho, třeba i celou noc. Ale jak zařídit, aby se mu všechna voda nevypařila, zatímco bude spát?

Rozhodl se, že udělá jednoduchý experiment, a naměřil, že 1 l vody s teplotou 20 °C začne vřít za 20 min. Jak dlouho bude trvat, než se na tomtéž hořáku odpaří 2 l vody s teplotou 100 °C?

Předpokládejte, že měrná tepelná kapacita vody nezávisí na teplotě a že se voda vypařuje jen při teplotě varu. Tepelné ztráty do okolí neuvažujte. Výsledek odevzdejte v hodinách.

12 Bytový podnik nabízí studenou vodu s teplotou 20 °C za 2 €/m^3 a teplou vodu s teplotou 50 °C za 6,5 €/m^3. Plánují ale nainstalovat nový kotel, který bude ohřívat vodu až na 60 °C.

Jakou novou cenu teplé vody má bytový podnik nastavit, aby Lucčina teplá vana s 100 l vody o teplotě 40 °C stála i po výměně kotle stejně peněz?

13 Dvě žížaly s délkovou hustotou 1 g/cm přelézají přes tenkou stěnu vysokou 10 cm. První žížala je dlouhá 10 cm a druhá 20 cm. Jaký je poměr prací, které musí žížaly vykonat, aby se dostaly na druhou stranu?

14 Kubík chce trhnout rychlostní rekord při jízdě tramvají kolem vchodu Radošinského naivního divadla. Problém je, že kousek před vchodem do divadla je zastávka, ze které se tramvaj rozjíždí z klidu rovnoměrně zrychleným pohybem a kolem vchodu divadla jede rychlostí 30 km/h. Kubík chce tuto rychlost zvýšit. Na zastávce zastaví o pár metrů dříve. Když se potom rozjede, při průjezdu kolem standardního místa zastavení už má rychlost 10 km/h.

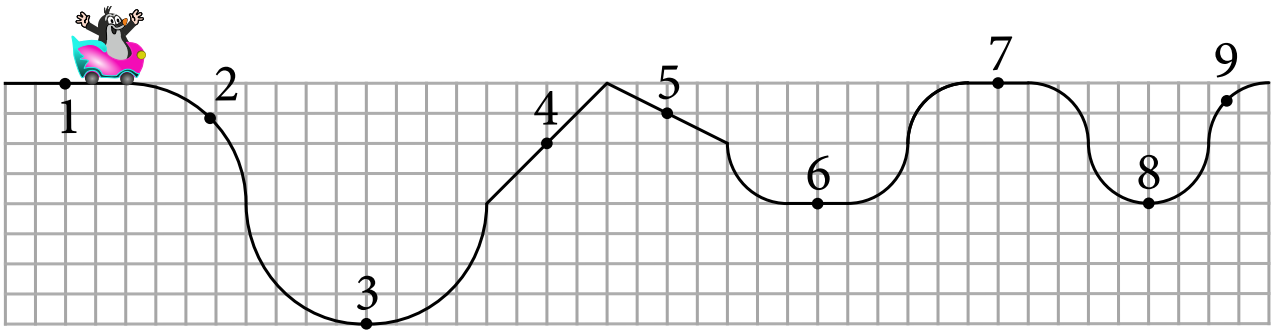
Jakou rychlostí pojede kolem vchodu divadla teď?

15 Kubíkovi v lahvi s objemem 300 ml zbylo posledních 20 ml šamponu, které už nedokáže vytlačit ven. Říká si, že to může vyřešit tak, že napustí lahev doplna vodou, pořádně zamíchá a vylije si takto vzniklý roztok na vlasy. I po takovém proplachu však v lahvi na dně zůstane 20 ml roztoku, který už nepůjde vytlačit ven. Kubík je velmi ekologicky zaměřený a odmítá lahev vyhodit, dokud v ní nebude méně než 1 nl šamponu.

Kolik nejméně proplachů bude Kubík muset udělat, než lahev vyhodí?

16 S Krtečkem se to veze jako na horské dráze. Jednou je nahoře, jednou dole, jindy zas prochází konkávní pasáží svého života. Na obrázku máte vyznačeného Krtečka na horské dráze v několika polohách. Seřaďte je do neklesající posloupnosti podle působící normálové síly, kterou na něj působí dráha, pokud se po ní pohybuje konstantní rychlostí v homogenním tíhovém poli. Rychlost je dostatečně malá na to, aby vozíček zůstal na kolejích.

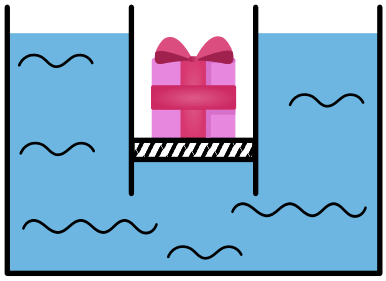
Mezi každé dvě polohy uveďte i příslušné porovnávací znaménko, např. $1 < 3 = 4 < 2 = 5$.



17 Akvárium naplněné kapalinou s hustotou ρ je v horní části rozděleno na tři přepážky. Každá má plochu průřezu S a voda mezi nimi může volně proudit přes dolní část akvária. Prostřední část je speciální – leží v ní nehmotný píst.

Anička chce využít toto akvárium ke zvednutí svého narozeninového dárku s hmotností m, aby se mu mohla podívat z očí do očí. Píst nejprve upevnila v hloubce h_0 pod hladinou kapaliny v akváriu, a potom na něj položila svůj dárek. Píst následně uvolnila a on se začal pohybovat směrem nahoru.

V jaké výšce nad svou původní pozicí se píst ustálí?



18 Marcel přistává na letišti. Najednou se rozezvučí výstražný systém na blízkost terénu: pokud prý bude pokračovat současnou rychlostí, za 12 s narazí do země. Marcel nasadí nejmocnější poker face, jakého je jen

schopen, a dále pokračuje v přistávání, protože ví, že jeho pohyb má navíc i konstantní zrychlení 0,8 $\mathrm{m/s^2}$ směrem nahoru.

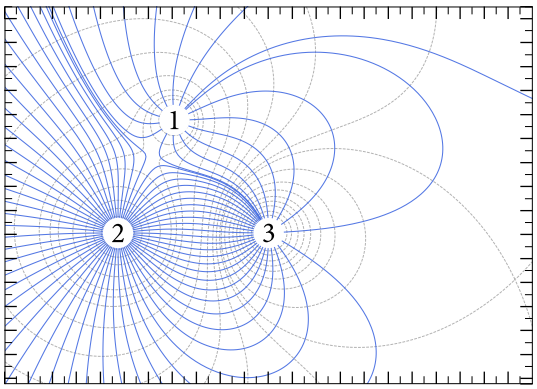
A opravdu, letadlo tak akorát měkce přistane na dráze. V jaké výšce letělo Marcelovo letadlo, když se rozezvučel alarm?

19 Martin má doma zlatou rybku v akváriu na kolečkách, které je plné vody. Rybičce se u Martina v poslední době nelíbí, proto začala prosit o záchranu světelnými signály. Konkrétně odněkud vzala laser, který připevnila na dno svého akvária, zapnula ho a namířila přímo nahoru. Martin nechce, aby paprsek tohoto laseru někdo zahlédl, proto rozpohybuje toto akvárium s konstantním zrychlením (rovnoběžně se zemí). Jaké je nejmenší zrychlení takové, aby paprsek laseru (po ustálení vodní hladiny) neprošel hladinou?

Vody je v akváriu dost na to, aby byl laser na dně akvária při tomto zrychlení stále celý ponořený. Paprsek laseru se od stěn akvária neodráží.

20 Pepa si hrál se svou sbírkou atomů, takže není divu, že nezůstal kámen na kameni – či spíše elektron v orbitalu. Po chvíli ho však cat-ionty omrzely. Přece jen s živými kočičkami je větší zábava. Shrnul tedy ionty zpět do pytlíku a vydal se trápit nic netušící stvoření. Na stole však zapomněl trojici iontů, které kolem sebe vytvořily slabé elektrické pole. Toto elektrické pole je znázorněno na obrázku siločarami i ekvipotenciálami. Určete náboje iontů v polohách 2 a 3, pokud víte, že v poloze 1 se nachází kationt vodíku.

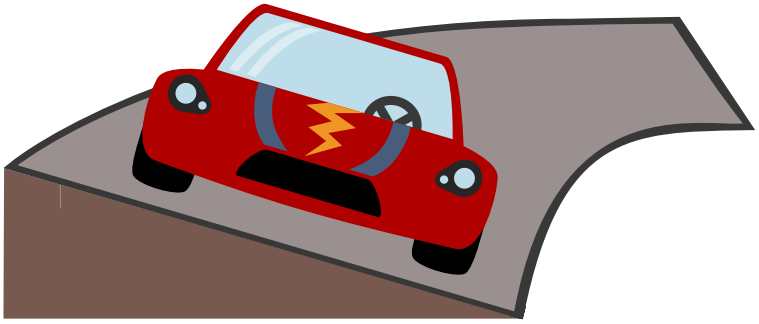
Velikosti nábojů nevyčíslujte, ale odevzdejte je v násobcích elementárního elektrického náboje e.



21 Mözög se vypravil na závody Nascar. Fascinovalo ho, jak auta projížděla klopenými zatáčkami, díky nimž mohou auta jezdit rychleji, aniž by je setrvačnost vynesla ven. Z bezpečnostních důvodů smí být zatáčka klopená nejvýše tak, aby se auto nesklouzlo, ani kdyby v ní muselo úplně zastavit.

Jakou maximální rychlostí je možné projet takovou klopenou zatáčkou, je-li její poloměr křivosti ve vodorovné rovině r a součinitel smykového tření mezi pneumatikami a asfaltem je f?

Šířka auta i cesty jsou oproti r zanedbatelně malé.

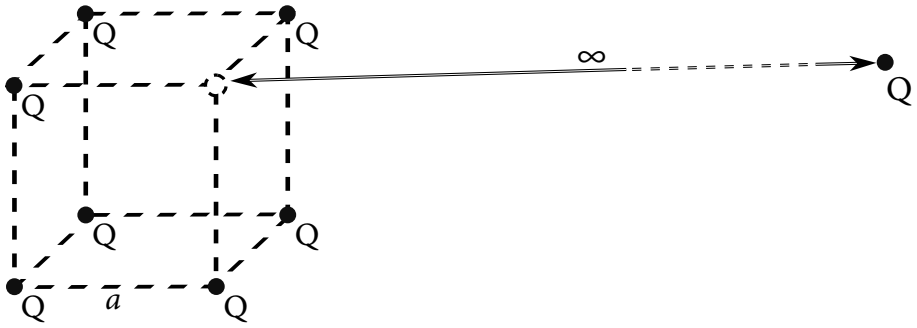


22 Klep, klep, klep, klep, klep, klep…

Mezi dvěma deskami umístěnými souměrně kolem svislé osy do tvaru písmene V s vrcholovým úhlem 90° se odráží míček, který při svém pohybu opisuje stále tentýž oblouk. Klepnutí slyšíme každou 1 s.

Jak vysoko nad spojem desek je nejvyšší bod jeho trajektorie?

23 Do každého ze sedmi oněch onoho s oním dlouhým a (viz ono) jsme naondili stejné malé nabité ono s oním Q. Jak velké ono W musíme vyondit na přiondění osmého stejně malého nabitého onoho z nekonečného onoho do zbylého onoho onoho? Ono onděte pro $Q = 1\,\mathrm{C}$ a $a = 1\,\mathrm{m}$.



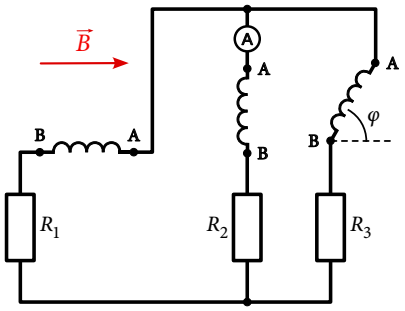
24 Na hladině bazénu plave masivní ledová kra ve tvaru krychle, uvnitř které je zamrzlý tunový balvan s hustotou 3000 kg/m^3. Celé takové zamrzlé těleso trčí 10 cm nad hladinu. O kolik se změní výška hladiny v bazénu, když se všechen led roztopí, je-li plocha bazénu 20 m^2?

Pokud se hladina zvýší, uveďte kladný výsledek, a pokud se sníží, uveďte záporný.

25 Ručičky na hodinách jsou homogenní tyče a pohybují se spojitě. Kolikrát by musela být délková hustota hodinové ručičky větší než minutové ručičky, aby byla jejich kinetická energie stejná, je-li délka hodinové ručičky dvoutřetinová oproti délce minutové ručičky?

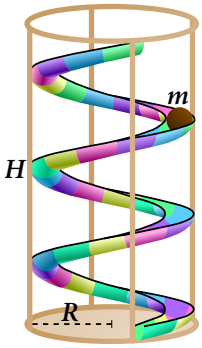
26 Piškot si chce poskládat elektrický obvod, ale nemá žádné zdroje napětí. Musí proto být vynalézavý. Poskládal obvod z cívek a rezistorů, který je znázorněn na obrázku, přičemž úhel φ má velikost 60°. Všechny dráty mají nulový odpor, zatímco rezistory mají odpory $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ a $R_3 = 2\,\Omega$. Každá cívka má 500 závitů, plochu průřezu 200 cm^2 a je vinuta pravotočivě ve směru od A do B.

Celý obvod Piškot umístil do homogenního magnetického pole s indukcí $\vec{B}$, která na obrázku směřuje zleva doprava a její velikost se lineárně zvyšuje rychlostí 0,2 T/s. Jakou hodnotu naměří ampérmetr po ustálení proudu?



27 K prvním narozeninám dostala Helenka barevnou věž – spirálu s výškou H a poloměrem R, po které se dají pouštět míčky. Helenku přirozeně zajímá, jestli se věž náhodou (kvůli momentu síly od míčku) nepřevrátí, když pustí míček ze samého vrcholu věže. Do jaké výšky se musí míček skutálet, abychom mohli s jistotou říct, že se věž už určitě nepřevrátí?

Předpokládejte, že míček je hmotný bod s hmotností m, spirála má N závitů a tření mezi míčkem a spirálou je zanedbatelné.

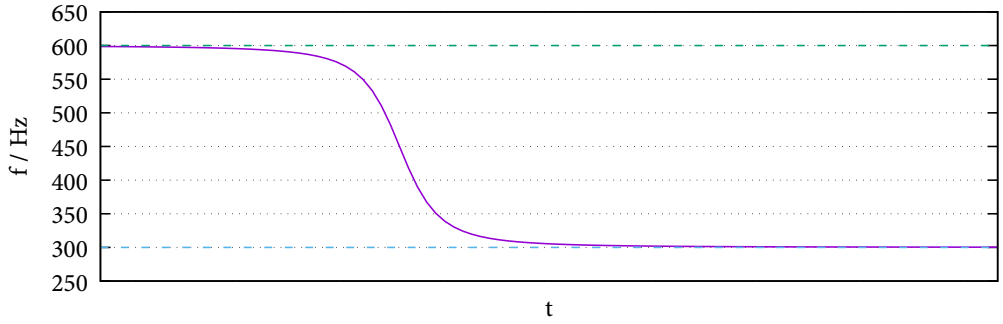


28 Homogenní válec Vláďa vysoký 1,8 m se velmi rád projíždí na kole. Internetová stránka předpovídající počasí mu na dnešek vyvěštila, že celkově naprší 1 mm srážek. Vláďu to nezastavilo a navzdory tomu vyrazil na celodenní výlet na svém zanedbatelně malém kole. Vláďa ví, že když jede na kole, jeho součinitel odporu je 0,5 a že při výkonu 100 W jede konstantní rychlostí 30 km/h (přičemž i dnes jel celou dobu touto rychlostí).

Jaký objem vody dnes do Vládi na jeho celodenním výletě narazí, je-li rychlost padajících kapek 5 m/s?

Předpokládejte, že prší svisle, a zanedbejte vliv kapek na Vláďovu rychlost.

29 Říša v létě jel na letecké dny. Jak si tak užíval atmosféru, všiml si, že jeden z vrtulníků přeletí přímo nad ním. Jako správný fyzik okamžitě začal měřit frekvenci zvuku, který slyší, v závislosti na čase.



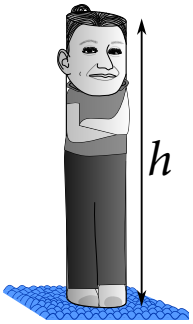
Jaká byla skutečná frekvence zvuku vrtulníku, letí-li celou dobu konstantní rychlostí po přímce?

30 Ve kbelíku s vodou plave kulatá gumová kachnička s poloměrem R. Její hustota je rovna polovině hustoty vody. Teď začneme kbelík zvedat nahoru s konstantním ryvem (časovou změnou zrychlení) j.

O kolik se kachnička maximálně vychýlí vůči své původní poloze vzhledem ke kbelíku?

31 Katka se zkouší naučit chodit po vodě. Postaví se na okraj bazénu a pak stoupne na volnou hladinu. Samozřejmě, voda ji neudrží a Katka se celá ponoří. Jakou rychlost bude mít v okamžiku, kdy zmizí pod hladinou?

Katku si můžeme představit jako vysoký a štíhlý válec s výškou h, hmotností m a hustotou rovnou k-násobku hustoty vody ($k > 1$). Po celou dobu pohybu zůstává svisle. Viskozita vody v bazénu je zanedbatelná.



32 Péťa se chystá kempovat. Koupila si bombu na stlačený plyn do turistického vařiče natlakovanou na 1 MPa. Doma však zjistila, že bomba je lehce poškozená. Nechce riskovat, že jí plyn cestou unikne a ona bude muset na výletě jíst všechno studené. Naštěstí už má doma stejnou použitou bombu s tlakem 100 kPa.

Péťa ví, že pokud bomby spojí hadičkou, tlaky uvnitř se vyrovnají. Říša jí však poradil, že se to dá udělat i lépe: starou bombu může dát do mrazáku, ve kterém se bude udržovat na teplotě −20 °C, a novou zahřívat v hrnci s vroucí vodou na 100 °C. Teprve pak nechá tlaky uvnitř vyrovnat a následně odpojí ventil.

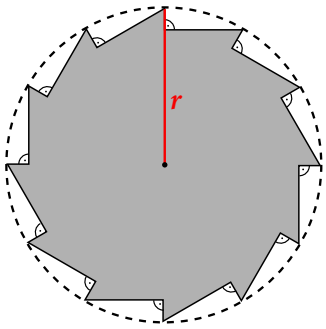
Jaký tlak plynu bude mít Péťa během výletu ve staré bombě, bude-li po celou dobu příjemných 20 °C? Na začátku mají obě bomby rovněž teplotu 20 °C.

33 Když se Marek pustí na kole z kopce za domem, bez šlapání se jeho rychlost ustálí na hodnotě w. Obvykle při sjezdu raději trochu přibrzďuje. Jaké rychlosti se má určitě vyhnout, aby brzdy nezavařil? Tedy přesněji, při jaké stálé rychlosti bude výkon přeměněný v brzdách na teplo největší?

Odporová síla závisí na druhé mocnině rychlosti, brzdící síla na rychlosti nezávisí. Pokud neumíte nebo nechcete derivovat, nebojte se použít kalkulačku.

34 Zima klepe na dveře, noční teploty klesají a brzy bude třeba začít topit. Jarda proto vytáhl cirkulárku a šel řezat dřevo. Po skončení řezání odpojil pilu z elektřiny. Aby nemusel čekat, až se kotouč sám zastaví, vzal si lať a přitlačil ji zboku ke kotouči. Kolik otáček ještě kotouč vykoná od přiložení latě až do úplného zastavení?

Kotouč cirkulárky vykonává N otáček za minutu, má dvanáct zubů, které jsou navzájem kolmé, má plošnou hustotu σ a kružnice opsaná kotouči má poloměr r. Jarda lať přitlačuje ve vzdálenosti $\frac{r}{2}$ od středu kotouče normálovou silou F a součinitel smykového tření latě a kotouče je f.

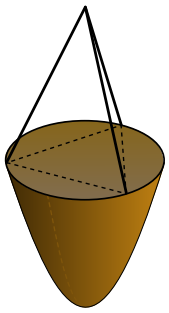


35 Kosmický padouch Kvík má jen jedny nervy… a tentokrát už opravdu stačilo. Pořádně napnul svaly a Země náhle zmizela. Zapomněl však, že kolem bývalé Země obíhaly satelity po kruhových drahách ve výšce 400 km. Když Země zmizela, tyto satelity se rozletěly po Sluneční soustavě.

Jaká je maximální možná oběžná doba uletěvšího satelitu?

Země byla původně na kruhové dráze s dobou oběhu jeden rok.

36 Marek má doma zavěšený květináč tvaru kolmo seříznutého rotačního paraboloidu výšky $H = 30$ cm s podstavou o poloměru $R = 20$ cm a stejné hustoty jako hlína, která je v jeho nitru zarovnaná po okraj. Květináč visí na třech lanech stejné délky L, přičemž jsou upevněna k jednomu společnému bodu na stropě a ke třem bodům na hraně květináče, které jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Nejprve visí s podstavou vodorovně, ale jedno lano se zčistajasna přetrhne. Jaký úhel svírá spojnice vrcholu paraboloidu a středu jeho podstavy se svislicí?



37 Andrej kdesi vyšmejdil nekonečnou zásobu shodných ideálních pružin. Všechny z nich mají klidovou délku 10 cm, hmotnost 40 g a tuhost 60 N/m a dají se stlačit až na zanedbatelnou délku. Andrej položil na stůl jednu pružinu tak, aby její osa směřovala svisle, přičemž kvůli vlastní tíze se ještě trochu stlačila. Potom na ni položil druhou, třetí, a tak dále.

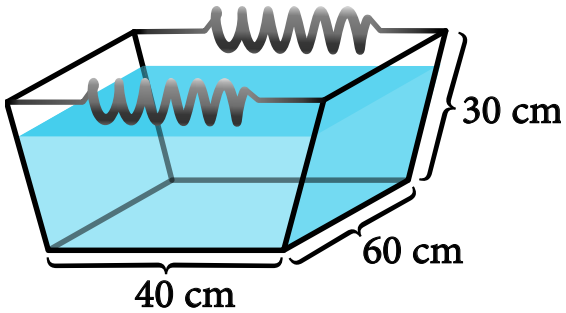
Jaké největší výšky může taková věž dosáhnout?

38 Během letošních letních veder dosahovaly venkovní teploty 40 °C. V FKS jsme si užívali místnost vyklimatizovanou na příjemných 20 °C. Jaká mohla být tehdy teoreticky nejvyšší účinnost klimatizace?

39 Hrdý otec Kvík obvykle koupe Helenku ve skládací vaničce. Když je vanička prázdná, má tvar shora otevřeného kvádru s rozměry podstavy 60 cm a 40 cm a výškou 30 cm. Dvě větší bočnice jsou pevné, ale umí se volně otáčet kolem spodní hrany. Menší bočnice jsou pružné a umí se natáhnout, ale zůstávají přitom v původní rovině.

Kvík si všiml, že když se vanička plní, chová se přesně tak, jako by byly odklápěcí stěny navrchu spojeny dvěma pružinkami s tuhostí 125 N/m a klidovou délkou 40 cm.

Jaký největší objem vody je možné do vaničky napustit?



40 Petr naměřil, že Slunce na nás svítí přibližně konstantním plošným výkonem, asi 1361 W/m^2. Jaký násobek tohoto výkonu by naměřil, pokud by se od nás Slunce náhle začalo vzdalovat polovinou rychlosti světla?

Vzorová řešení

1 Na pravej strane sú základné jednotky SI alebo ich jednoduché kombinácie, na ľavej strane sú rôzne kombinácie pozostávajúce aj z odvodených jednotiek. Začať treba prepísaním odvodených jednotiek na základné.

- Coulomb je jednotkou elektrického náboja. Ten môžeme spočítať ako súčin prúdu a času, počas ktorého preteká. Je preto súčinom ampéra a sekundy.
- Hertz je jednotkou frekvencie, čo je prevrátená hodnota periódy, preto je prevrátenou sekundou.
- Radián vyjadruje uhol, teda z pohľadu SI je bezrozmerný.
- Joule je jednotkou energie alebo práce. Práca môže byť spočítaná ako súčin sily a dráhy, pozdĺž ktorej pôsobí, preto joule je súčinom newtona a metra.
- Z Newtonovho zákona vieme, že sila je súčinom hmotnosti a zrýchlenia, preto newton je súčinom kilogramu a metra predeleným sekundou umocnenou na druhú.
- Výkon je definovaný ako energia spotrebovaná za čas, preto watt je podielom joula a sekundy.
- Výkon elektrického prúdu je súčinom napätia a prúdu, preto jednotka napätia, volt, je podielom wattu a ampéra.

Keď už vieme všetky jednotky rozpísať na základné, stačí ich vykrátiť. Keď už toto máme, ostáva jednotky správne priradiť.

Postup si ukážeme na možnosti **A**. Už vieme, že $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$ a $\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$. Spolu dostávame $\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}/\mathrm{s} = \mathrm{A}$.

A	$\mathrm{C} \cdot \mathrm{Hz} \cdot \mathrm{rad}$	**2**	A	ampér
B	J/N	**4**	m	meter
C	$\mathrm{N}/(\mathrm{m} \cdot \mathrm{Hz}^2)$	**3**	kg	kilogram
D	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}/\mathrm{N}$	**5**	m/s	meter za sekundu
E	$\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{N}$	**1**	1	bezrozmerná jednotka
F	J/W	**6**	s	sekunda

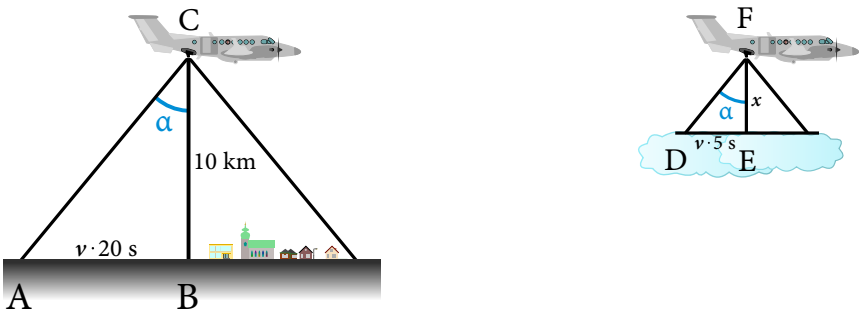
Odpoveďou teda je `A2`, `B4`, `C3`, `D5`, `E1`, `F6`.

2 Každým švihom švihadla vie Kubko zariadiť, že nad ním zmizne pás dažďa, ktorý je taký vysoký, aké hrubé je švihadlo, čiže h. Ak chceme, aby Kubko odrazil všetky kvapky, potrebujeme, aby do ďalšieho švihu zatiaľ neodrazené kvapky klesli maximálne o h. Z toho už jasne vyplýva, že perióda skokov musí byť najviac h/v.

3 Polovicu z každého skoku sa loptička pohybuje smerom nahor a polovicu smerom nadol. Zo svojho najvyššieho bodu vo výške h teda padá voľným pádom pol sekundy. Označme si tento čas ako t. Pre voľný pád potom vieme priamo napísať rovnicu

$$h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} \cdot (0{,}5\ \mathrm{s})^2 = 1{,}25\ \mathrm{m}. \tag{3.1}$$

4 Na obrázku nižšie je znázornené zorné pole kamery nad zemou aj nad oblakmi. Kým objekt prejde z kraja zorného poľa priamo pod kameru, určite mu to bude trvať polovicu času, za ktorý by prešiel cez celé zorné pole, teda 20 s, resp. 5 s. Vzdialenosti od kraja zorného poľa pod kameru budú úmerné týmto časom, iba vynásobené rýchlosťou lietadla v.



Obrázek 4.1: *Zorné polia kamery*

Zorný uhol kamery je však stále rovnaký, preto sú na obrázku oba uhly α rovnaké. Z toho vyplýva, že trojuholníky ABC a DEF sú podobné. Keďže strana AB je oproti DE 4-násobná, znamená to, že aj dĺžka BC oproti EF je 4-násobná. Preto je oblak zjavne 2,5 km pod lietadlom, čiže vo výške 7,5 km nad zemou.

5 Objekty vieme hneď rozdeliť na tri skupiny, ktorých vzájomné poradie je očividné: mikroskopické, objekty bežných veľkostí a nakoniec tie veľmi veľké.

Mikroskopické objekty

Ako prvé zoradíme objekty také malé, že ich ani nevidíme. Konkrétne pôjde o elektrón, atóm hliníka, molekulu ozónu, protón a chrípkový vírus.

Z tabuliek vieme, že elektrón je o pár rádov ľahší ako protón. Oba sú zároveň očividne ľahšie ako atómy a molekuly, ktoré sa z nich skladajú.

V prípade ozónu a atómu hliníka budeme porovnávať molárnu hmotnosť, ktorú si nájdeme v tabuľkách. Pre hliník s protónovým číslom 13 to je niečo okolo 27 a pre ozón to bude trojnásobok kyslíku, čiže približne $3 \cdot 16 = 48$. Ozón je teda hmotnejší.

Posledný zostal chrípkový vírus, ktorý sa určite skladá z množstva molekúl, takže bude ťažší ako jedna molekula ozónu.

Bežné objekty

Teraz poďme na veci, s ktorými máme šancu interagovať v bežnom živote: prázdny a plný balónik, tvoja mama, troyská unca zlata.

Troyskú uncu nájdeme v konštantovníku, jej veľkosť je približne 31 g. Vtipy o „tvojej mame“ síce obvykle neuvádzajú konkrétne čísla, môžeme si ale byť istí, že jej hmotnosť bude niekde medzi 1 kg a 1 t, čo nám stačí.

Ďalej vieme, že balónik plný hélia stúpa, čo znamená, že je ľahší ako vzduch rovnakého objemu. Bežný balónik má polomer možno $r = 15$ cm, takže vzduch veľkosti balónika bude vážiť

$$m = \rho_a \frac{4}{3}\pi r^3 \doteq 18{,}3 \text{ g}, \tag{5.1}$$

čo je menej ako troyská unca. Balónik plný hélia je určite ťažší ako prázdny balónik, keďže sa nepýtame na tiaž, ale na hmotnosť. Poradie je teda aj tu jasné.

Veľké objekty

Zostali objekty, ktoré svojou veľkosťou zjavne presahujú človeka, a to búrkový oblak, Mesiac, všetka kvapalná voda na Zemi. Je zrejmé, že ľubovoľný búrkový oblak (tvorený malou časťou vody na Zemi) bude určite ľahší ako celá kvapalná voda na Zemi, aj keď sa podobne ako balónik vznáša.

Poďme teda porovnať všetku kvapalnú vodu na Zemi s Mesiacom. V konštantovníku máme polomer Mesiaca rovný približne $R_☾ \approx 1737$ km. Ak uvažujeme, že $\frac{2}{3}$ zemského povrchu sú pokryté oceánom do hĺbky $h = 10$ km (silno horný odhad, keďže Mariánska priekopa má 11 km) a zo všetkej tejto vody vytvarujeme guľu, bude mať objem

$$V = 4\pi R_⊕^2 h \cdot \frac{2}{3}, \tag{5.2}$$

kde $R_⊕$ je polomer Zeme. Polomer tejto gule bude

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V}{\pi}} \approx 933 \text{ km}, \tag{5.3}$$

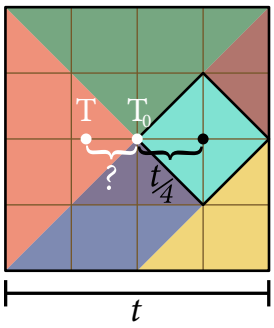
čo je podstatne menšie ako polomer Mesiaca $R_☾$. Hustotu Mesiaca asi nebudeme poznať, ale vieme, že je to skala, ktorá má určite väčšiu hustotu ako voda, z čoho vyplýva, že aj hmotnosť bude ešte väčšia. Skutočný pomer je asi $1 : 50$.

Finálne zoradenie je teda `CHAFDGIJKBLE`.

6 Jediné spojenie medzi dvomi platňami tvoria vždy práve štyri drôty. Zvyšné drôty sa celé dotýkajú jednej alebo druhej platne, takže na celkový odpor nemajú vplyv. Zapojenie teda zakaždým pozostáva len zo štyroch identických paralelných rezistorov. Ak označíme odpor jedného rezistora R, celkový odpor takéhoto zapojenia je $\frac{R}{4}$. Postupným dosadením dostaneme tri hodnoty celkového odporu, a to 12 Ω, 9 Ω a 6 Ω.

7 Tiborovi treba ťažisko. Tak teda tipujme. Titulárnu ťažkosť tohto tasku tvorí Téčko.

To obídeme tak, že na chvíľu budeme Téčko ignorovať. Poloha ťažiska kompletného tangramu T_0 bola triviálne v jeho geometrickom strede. Považujme tento bod za nulu súradnicovej sústavy a nech x-ová os smeruje doprava.



Obrázek 7.1: *Poloha ťažiska tangramu*

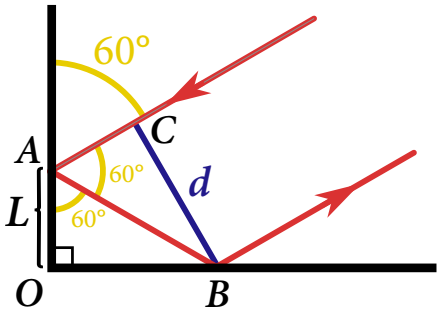
Kompletný tangram si môžeme zložiť zo strateného dielika a jeho zvyšku. Stratený štvorček mal ťažisko očividne vo vzdialenosti $\frac{t}{4}$ od pôvodného ťažiska. Ak by sme ho rozkrájali po uhlopriečkach a dolné dva dieliky otočili a presunuli hore, vytvorili by sme z neho obdĺžnik s rozmermi $\frac{t}{2} \times \frac{t}{4}$, takže jeho hmotnosť je úmerná $\frac{t}{2} \cdot \frac{t}{4} = \frac{t^2}{8}$.

Zvyšok tangramu má potom hmotnosť úmernú $t^2 - \frac{t^2}{8} = \frac{7}{8}t^2$. Jeho ťažisko je v hľadanej vzdialenosti $|T_0T|$, len na opačnú stranu od ťažiska strateného štvorčeka. Pre polohu ťažiska pôvodného tangramu vyjadreného pomocou tohto rozkladu možno písať

$$\frac{\frac{t^2}{8} \cdot \frac{t}{4} - \frac{7}{8}t^2 \cdot |T_0T|}{t^2} = 0 \;\Rightarrow\; |T_0T| = \frac{t}{28}. \tag{7.1}$$

Tramtadadá! Takže tak, tínedžeri…

8 Ako prvé si do kúta dokreslíme trajektóriu lúča a na vhodnom mieste si zakreslíme hľadanú kolmú vzdialenosť medzi prichádzajúcim a odrazeným lúčom d. Následne si pomocou zákona dopadu a odrazu do obrázka dokreslíme uhol odrazu 60°. Navyše, keďže priamy uhol má 180°, aj uhol medzi dopadajúcim a odrazeným lúčom bude mať 60°.



Obrázek 8.1: *Trajektória lúča*

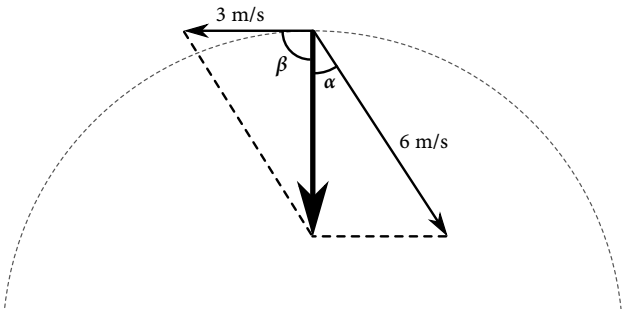
Z trojuholníka AOB môžeme teraz vypočítať vzdialenosť $|AB|$ ako $x = \frac{L}{\cos 60°} = 2L$. Potom už hľadanú vzdialenosť lúčov d nájdeme z trojuholníka ACB ako

$$d = x \sin 60° = 2L \sin 60° = \sqrt{3}L. \tag{8.1}$$

9 Aby sme vedeli, akým smerom sa po vyhodení hýbe loptička (vzhľadom k Aničke), potrebujeme zložiť dve rýchlosti: rýchlosť $v = 6$ m/s, ktorú jej Mirko pri hode udelil, a obvodovú rýchlosť Mirka sediaceho na kolotoči. Tú vypočítame ako

$$u = \omega \cdot R = 1\,\text{rad/s} \cdot 3\,\text{m} = 3\,\text{m/s}. \tag{9.1}$$

Chceme, aby výsledná rýchlosť zložená zo spomenutých dvoch smerovala od Mirka k Aničke. Teda na obrázku 9.1 hľadáme taký uhol α, aby bol uhol β pravý.



Obrázek 9.1: *Zloženie rýchlostí loptičky*

V takom prípade zjavne musí platiť

$$\sin\alpha = \frac{3\,\text{m/s}}{6\,\text{m/s}} \tag{9.2}$$

a hľadaný uhol α teda musí byť

$$\alpha = \arcsin 0{,}5 = 30^\circ. \tag{9.3}$$

10 Šimonovi sa pri pretáčaní klády najviac oplatí chytiť ju za jeden jej koniec a otáčať ju okolo toho druhého, keďže takto maximalizuje dĺžku ramena sily, ktorou pôsobí. Proti momentu sily, ktorým na kládu pôsobí Šimon, pôsobí moment spôsobený tiažovou silou klády. Aby Šimon mal šancu kládu pretočiť, musí tento moment prekonať.

Všimnime si, že tento moment sa počas pretáčania klády postupne iba zmenšuje. Je to tak preto, lebo kým kláda leží na zemi, momentom sily pôsobí celá jej tiažová sila. Keď kládu už trocha pootočíme, tiažová sila pôsobiaca smerom k zemi sa rozloží na zložku kolmú na kládu (ktorá spôsobuje moment sily) a rovnobežnú s kládou (ktorá k momentu sily nijak neprispieva). Po akomkoľvek pootočení sa preto moment od tiažovej sily iba zmenší. Maximálnou silou preto Šimon bude musieť pôsobiť úplne na začiatku pretáčania.

Túto silu už vypočítame jednoducho: dáme do rovnosti oba momenty síl na začiatku dvíhania a vyjadríme Šimonovu silu

$$\begin{aligned} M_g &= M_S, \\ F_g \frac{L}{2} &= F_S L, \\ \lambda L g \frac{L}{2} = F_S L \;&\Rightarrow\; F_S = \frac{1}{2}\lambda L g. \end{aligned} \tag{10.1}$$

11 Najprv zohrievame vodu s hustotou $\rho_{H_2O} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ a objemom $V_1 = 1\ \mathrm{l}$ z teploty $T_1 = 20\ °\mathrm{C}$ na teplotu $T_2 = 100\ °\mathrm{C}$. Keďže voda má tepelnú kapacitu $c_{H_2O} \approx 4180\ \mathrm{J/(K \cdot kg)}$, na tento úkon spotrebujeme teplo Q_1, ktoré vypočítame ako

$$Q_1 = \rho V_1 c_{H_2O}(T_2 - T_1) = 334\ \mathrm{kJ}. \tag{11.1}$$

Toto teplo bude vývaru dodané za čas $t_1 = 20\ \mathrm{min}$, takže výkon horáku bude

$$P = \frac{Q_1}{t_1} = 279\ \mathrm{W}. \tag{11.2}$$

Keďže výkon horáku je konštantný, rovnakým výkonom bude vývar zohrievaný aj cez noc. Takže už len zostáva zistiť, aké teplo je potrebné, aby sa celý vyparil. V tomto prípade teda máme vývar objemu $V_2 = 2\ \mathrm{l}$ s teplotou $T_3 = 100\ °\mathrm{C}$. Keďže merné skupenské teplo vyparovania vody je $l_{H_2O} \approx 2260\ \mathrm{kJ/kg}$, na celé vyparenie vývaru bude spotrebované teplo Q_2, a to konkrétne

$$Q_2 = \rho V_2 l_{H_2O} = 4520\ \mathrm{kJ}. \tag{11.3}$$

Keďže výkon je konštantný, platí

$$P = \frac{Q_1}{t_1} = \frac{Q_2}{t_2}, \tag{11.4}$$

z čoho už ľahko vypočítame

$$t = 4{,}506\ \mathrm{h}. \tag{11.5}$$

12 Ak platí, že cena napustenej vane má byť rovnaká, potom sa na teplú vodu možno pozerať len ako na nosič tepelnej energie a jej cena musí byť nastavená tak, aby bola úmerná množstvu tepelnej energie, ktorú má naviac oproti studenej vode. Na napustenie teplej vody do vane totiž potrebujeme dodať v oboch prípadoch rovnaké celkové množstvo tepelnej energie a toto množstvo má stáť rovnakú cenu. Lenže teplo je úmerné rozdielu teplôt, preto aj cena musí byť úmerná rozdielu teplôt. Ak studená voda s teplotou 20 °C stojí $2\ €/\mathrm{m^3}$ a teplá voda s teplotou 50 °C stojí $6{,}5\ €/\mathrm{m^3}$, za každý stupeň si priplatíme

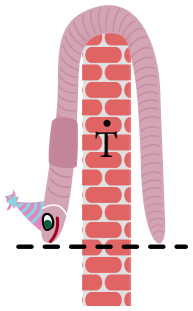
$$\frac{6{,}5\ €/\mathrm{m^3} - 2\ €/\mathrm{m^3}}{50\ °\mathrm{C} - 20\ °\mathrm{C}} = 0{,}15\ €/(°\mathrm{C} \cdot \mathrm{m^3}). \tag{12.1}$$

Ak teda nový kotol začne dodávať vodu s teplotou 60 °C, t. j. o 10 °C teplejšiu, mali by cenu zvýšiť o

$$0{,}15\ €/(°\mathrm{C} \cdot \mathrm{m^3}) \cdot 10\ °\mathrm{C} = 1{,}5\ €/\mathrm{m^3}. \tag{12.2}$$

Celková cena za vodu s teplotou 60 °C bude $8\ €/\mathrm{m^3}$.

13 Kľúčovým pozorovaním je, že dážďovka nemusí svoje ťažisko preniesť ponad vrchnú hranu steny – ťažisko totiž nie je hmotné a vie prejsť aj cez pevnú stenu. Dážďovka najskôr lezie hore, potom postupne jej „hlava“ začína klesať, a to až do okamihu, keď z nej prevísa viac ako polovica. Potom sa už len zošuchne a na to prácu konať nepotrebuje. V takomto stave vyzerá ako preložená na polovicu, a teda jej ťažisko je štvrtinu jej dĺžky od vrchu steny, ako vidno na obrázku 13.1.



Obrázek 13.1: *Ťažisko dážďovky preliezajúcej stenu*

Keď má svoj stred nad stenou kratšia dážďovka, jej ťažisko je vo výške 7,5 cm, pre druhú dážďovku vyjde 5 cm. Keďže práca je rovná zmene potenciálnej energie ťažiska, ktorá od jeho výšky závisí lineárne, výsledkom je pomer spočítaných výšok ťažísk prenásobených hmotnosťami. Obe dážďovky majú podľa zadania rovnakú dĺžkovú hustotu, a teda miesto hmotností nám vo výsledku stačí použiť pomer ich dĺžok, t. j.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7{,}5\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 0{,}75. \tag{13.1}$$

14 Označme m hmotnosť električky, a jej zrýchlenie, $v_1 = 30$ km/h bežnú rýchlosť prejazdu okolo divadla (ďalej len D) a $v_2 = 10$ km/h rýchlosť, ktorou už prejde okolo bežného miesta zastavenia (ďalej len Z). Taktiež označme d vzdialenosť medzi Z a D.

Keďže sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom, jej zrýchlenie a sa v čase nemení. To taktiež znamená, že sila, ktorou ju musí ťahať jej motor, $F = ma$, je tiež konštantná. Sila motora električky je stále rovnaká, teda na tejto dráhe vždy vykoná rovnakú prácu W.

Pri bežnej jazde má električka pri bode Z nulovú rýchlosť, a teda aj kinetickú energiu. Kým sa dostane k bodu D, práca W, ktorú vykoná motor, sa premení na kinetickú energiu električky E_{k1}. Pri D teda bude mať kinetickú energiu

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k1} = W. \tag{14.1}$$

S Kubkovou metódou pri bode Z už bude mať ale energiu

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2. \tag{14.2}$$

K tejto energii sa opäť pridá práca motora, teda v bode D bude mať v tomto prípade električka rýchlosť v_f a energiu E_{k3} takú, že

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = E_{k3} = W + E_{k2}. \tag{14.3}$$

Dosadením 14.1 a 14.2 do 14.3 dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2. \tag{14.4}$$

Alebo po úprave

$$v_f = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{14.5}$$

Vyčíslením dostaneme výsledok 31,6 km/h.

15 Nech budeme šampón napĺňať akokoľvek, stále tam zostane 20 ml roztoku. Ak chceme, aby bolo čo najmenej šampónu vnútri fľaše, musí vnútri zostať roztok s čo najmenšou koncentráciou šampónu. Preto sa vždy oplatí napĺňať fľašu vodou doplna. Pri prvom naplnení budeme mať 300 ml roztoku s 20 ml šampónu, takže pomer šampónu a celého roztoku bude $\frac{1}{15}$.

Po prvom preplachu zostane vo fľaši šampón s objemom $20\ \text{ml} \cdot \frac{1}{15} \doteq 1{,}333$ ml. Pri každom ďalšom preplachu budeme znovu násobiť $\frac{1}{15}$ a chceme vedieť, po koľkých preplachoch zostane vo fľaši objem menší alebo rovný 1 nl. Takže nás vlastne zaujíma, koľkokrát musíme objem 20 ml vynásobiť pomerom $\frac{1}{15}$, aby bol výsledok menší ako 1 nl. To sa dá vypočítať buď ďalším ťukaním do kalkulačky, alebo z rovnice

$$20\ \text{ml} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^n \leq 1\ \text{nl} = 10^{-6}\ \text{ml}, \tag{15.1}$$

ktorej riešenie dostaneme pomocou logaritmu

$$n = \log_{\frac{1}{15}} \frac{10^{-6}\ \text{ml}}{20\ \text{ml}} = \frac{\log(5 \cdot 10^{-8})}{\log \frac{1}{15}} \doteq 6{,}21. \tag{15.2}$$

Keďže počet preplachov musí byť celé číslo, výsledkom bude $\lceil n \rceil = 7$.

16 Začnime tým najjednoduchším a poriešme najskôr rovné úseky. Na vodorovných úsekoch platí, že normálová sila kompenzuje celú tiaž, a tá v homogénnom tiažovom poli nezávisí od výšky, preto polohy 1, 6 a 7 sú ekvivalentné. Na naklonenej rovine sa tiaž rozkladá do normálového a tangenciálneho smeru (to je ten, čo je rovnobežný s naklonenou rovinou). Tým pádom je normálová sila na naklonenej rovine určite menšia než na vodorovnej. Navyše platí, že čím strmšia naklonená rovina, tým menšia časť tiaže sa premietne do normálového smeru, preto $4 < 5$.

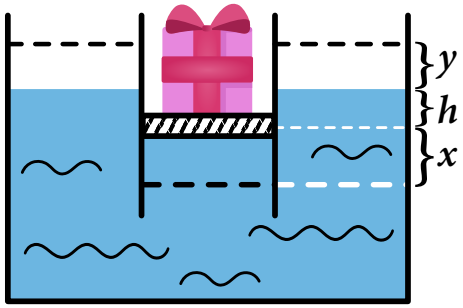
Všimnime si, že v polohe 4 je sklon svahu 45°. V polohách 2 a 9 je vozík v takých miestach kružnicového oblúku, v ktorých má dotyčnica taktiež sklon 45°. V týchto polohách navyše pôsobí ešte odstredivá sila, ktorá v konvexných oblúkoch[1] vozík nadľahčuje, a teda normálová sila je menšia. Odstredivá sila je tým väčšia, čím menší je polomer krivosti, preto $9 < 2$.

Ešte nám zostávajú polohy 3 a 8. V nich naopak odstredivá sila pritláča vozík ku koľajniciam, preto normálová sila je tu vyššia než na vodorovnej rovine. Stále platí, že odstredivá sila je tým väčšia, čím menší je polomer krivosti, a teda $3 < 8$.

Keď to dáme všetko dokopy, dostaneme výsledok $9 < 2 < 4 < 5 < (1 = 6 = 7) < 3 < 8$.

17 Po uvoľnení piest kúsok vystúpa, a potom sa v nejakej výške ustáli. Označme vzdialenosť piestu od hladiny v tomto momente ako h, to, o koľko stúpol piest ako x a to, o koľko klesla hladina ako y. Zjavne teda platí, že $h = h_0 - x - y$.

[1] konvexný úsek vyzerá ako ∩, konkávny ako ∪



Obrázek 17.1: *Pohyb hladiny a piestu v akváriu*

Ak sa piest nehýbe, znamená to, že sila od kvádra (F_g), ktorá naň tlačí zhora, je rovnaká ako sila spôsobená hydrostatickým tlakom (F_p), ktorá naň tlačí zdola, čiže

$$\begin{aligned} F_g &= F_p, \\ mg &= \rho g h S, \\ \frac{m}{\rho S} &= h_0 - x - y. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Menším problémom je, že nepoznáme y. Avšak vieme ho vyjadriť pomocou x! Vieme totiž, že ten istý objem vody, ktorý „vytiekol“ z vrchov akvária a spôsobil klesnutie hladiny o y, musel „natiecť“ pod piest a spôsobiť posun piestu o x. Z rovnosti týchto objemov vyplýva

$$2Sy = Sx \iff y = \frac{1}{2}x. \tag{17.2}$$

Keď y vyjadrené v rovnici 17.2 dosadíme do 17.1, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{m}{\rho S} &= h_0 - x - \frac{1}{2}x, \\ \frac{3}{2}x &= h_0 - \frac{m}{\rho S} \end{aligned} \tag{17.3}$$

a odtiaľ už vieme vyjadriť hľadanú vzdialenosť

$$x = \frac{2}{3}\left(h_0 - \frac{m}{\rho S}\right). \tag{17.4}$$

18 Čas, ktorý by trvalo lietadlu naraziť, ak by išlo konštantnou rýchlosťou, si označíme t_1. Čas, ktorý trvalo lietadlu pristáť, si označíme t_2.

Ako prvé si môžeme uvedomiť, že to, či lietadlo klesá k zemi alebo nie, závisí len od vertikálnej zložky rýchlosti lietadla. Teda čas t_1 je priamo závislý od jeho výšky nad zemou a tejto zložky rýchlosti

$$v = \frac{h}{t_1}. \tag{18.1}$$

Predpokladáme, že lietadlo v momente dotyku so zemou dosiahne nulovú výšku a nulovú rýchlosť vo vertikálnom smere

$$0 = v - at_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{v}{a} \tag{18.2}$$

a teda

$$h = vt_2 - \frac{at_2^2}{2}. \tag{18.3}$$

Dosadením 18.2 a potom 18.1 do 18.3 dostaneme

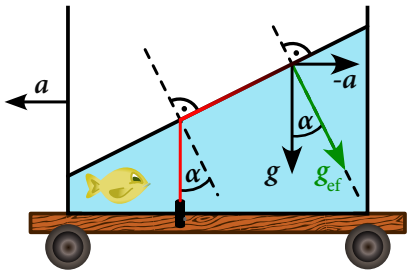
$$\begin{aligned} h &= \frac{v^2}{a} - \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2a}, \\ h &= \frac{h^2}{2t_1^2 a} \end{aligned} \tag{18.4}$$

a z tohto vieme vyjadriť výsledok

$$h = 2t_1^2 a = 230{,}4\ \text{m}. \tag{18.5}$$

19 Martin potrebuje, aby na hladine kvapaliny nastal úplný vnútorný odraz. Ten nastane, keď sa lúč na hladine zlomí pod uhlom 90°. Ak si index lomu vody označíme ako n (a index lomu vzduchu rovno napíšeme ako 1), Snellov zákon nám dá pre uhol dopadu lúča na hladinu α rovnicu $n \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \sin 90°$. Odtiaľ dostávame $\sin\alpha = \frac{1}{n}$.

Ako pomocou zrýchlenia akvária a spôsobiť, aby lúč na hladinu dopadal pod takýmto uhlom α? Využijeme na to fakt, že po ustálení bude mať hladina v akváriu smer kolmý na smer „zdanlivej tiaže“ g_{ef}, ktorú nájdeme ako výslednicu zrýchlenia $-a$ a tiažového zrýchlenia g. Z obrázka potom dobre vidíme, že pre α dostávame ďalšiu podmienku $\tan\alpha = \frac{|-a|}{g}$.



Obrázek 19.1: *Hladina v akváriu po rozpohybovaní*

Teraz môžeme z prvého odseku vyjadriť $\alpha = \arcsin\frac{1}{n}$, z čoho pomocou podmienky pre $\tan\alpha$ dostaneme

$$a = g \cdot \tan\alpha = g \cdot \tan\left(\arcsin\frac{1}{n}\right) = \frac{g}{\sqrt{n^2-1}}. \tag{19.1}$$

Keď dosadíme hodnoty z konštantovníka, dostávame $a \approx 11{,}35\ \text{m/s}^2$. Keďže veľkosť zrýchlení a a $-a$ je rovnaká, je toto zároveň výsledkom úlohy.

20 Na obrázku vidíme vyznačených viacero elektrických siločiar a ekvipotenciál v okolí troch nábojov. Nie sú ale rozložené úplne rovnomerne, takže sa asi nevieme spoliehať na ich vzájomné vzdialenosti ani hustotu rozloženia.

V polohe 1 sa nachádza katión vodíka, čiže vlastne jeden protón. Jeho náboj je $Q_1 = +e$, kde e je elementárny elektrický náboj. Zvyšné dva náboje musia byť jeho celočíselným násobkom. Ak by nám teda pri odhadovaní ich veľkostí vychádzali neceločíselné násobky, musíme ich zaokrúhliť na najbližšie celé číslo.

Ako prvé si môžeme všimnúť, že napriek tomu, že nevidíme smer jednotlivých siločiar, vieme určiť, ktoré náboje majú rovnaké znamienko a ktoré rozdielne. Siločiary (plné modré čiary) vedú od náboja 1 k náboju 3 a taktiež od náboja 2 k náboju 3. To znamená, že náboj 3 má opačné znamienko ako náboje 1 a 2. Medzi nábojmi 1 a 2 sa siločiary navzájom zase „uhýbajú“. To potvrdzuje, že náboje 1 a 2 majú rovnaké znamienko. Z toho, v akej vzdialenosti sa navzájom takto vyhnú, teda sa vyrovnajú intenzity ich elektrických polí, vieme určiť pomer veľkostí nábojov 1 a 2. Ak si označíme vzdialenosti náboja 1 od tohto bodu ako r_1 a náboja 2 od tohto bodu ako r_2, v danom bode musí platiť

$$\frac{e}{r_1^2} = \frac{Q_2}{r_2^2} \;\Rightarrow\; \frac{Q_2}{e} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2. \tag{20.1}$$

Ak si teda odmeriame, že pomer $r_2/r_1 \approx 2$, zistíme, že $Q_2 \approx +4e$.

Ďalej nás bude zaujímať veľkosť náboja Q_3. Preň vieme využiť tiež veľmi podobný postup. Na pravom okraji obrázku je totiž dobre viditeľný bod, v ktorom sa stretávajú dve samostatné ekvipotenciály. Na to, aby mohlo byť výsledné elektrické pole v tomto bode kolmé na obe ekvipotenciály, musí mať automaticky nulovú veľkosť. To znamená, že ide práve o bod, v ktorom sa vyrušia elektrické polia od všetkých troch nábojov. Aby sme nemuseli riešiť zložitú geometriu vzájomných vzdialeností všetkých troch nábojov, nahradíme si náboje 1 a 2 jedným silnejším nábojom veľkosti $5e$ na ich spojnici. Ten bude teda ležať na priamke danej polohou tretieho náboja a spomínaného bodu nulového elektrického poľa. Označme si vzdialenosti na tejto priamke ako r_{12} – vzdialenosť nového náboja od bodu nulového poľa a r_3 – vzdialenosť náboja číslo 3 od bodu nulového poľa.

$$\frac{5e}{r_{12}^2} = \frac{Q_3}{r_3^2} \;\Rightarrow\; \frac{Q_3}{e} = 5\left(\frac{r_3}{r_{12}}\right)^2. \tag{20.2}$$

Po odmeraní pomeru $r_3/r_{12} \approx 0{,}63$ dostávame veľkosť $Q_3 = -2e$.

Alternatívne by sme mohli určiť veľkosť náboja Q_3 aj pomocou siločiar. Vieme totiž, že veľkosť elektrickej intenzity je úmerná hustote siločiar v danom mieste. Elektrická intenzita v okolí bodového náboja je zas úmerná veľkosti tohto náboja. To znamená, že nám stačí spočítať počet siločiar vychádzajúcich z náboja Q_3 a z oblasti nábojov Q_1 a Q_2. Zistíme, že od náboja Q_3 vychádza 32 siločiar, z ktorých všetky končia v oblasti nábojov Q_1 a Q_2. Avšak z tejto oblasti vychádza ďalších 43 siločiar, ktoré končia v nekonečne. Možno teda písať

$$|Q_3| = \frac{32}{32+43}5e \doteq 2e. \tag{20.3}$$

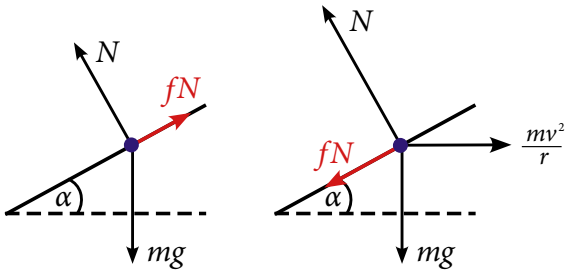
No a keďže tento náboj má mať opačné znamienko, platí $Q_3 = -2e$.

21 Keď auto prechádza klopenou zákrutou limitne nulovou rýchlosťou, pôsobí naň okrem tiažovej sily už len vozovka normálovou a trecou silou. Napíšeme si rovnováhu síl v smere dotyčnice k vozovke a normály na vozovku,

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha, \\ fN &= mg\sin\alpha. \end{aligned} \tag{21.1}$$

Z týchto rovníc okamžite dostávame

$$f = \tan\alpha. \tag{21.2}$$



Obrázek 21.1: *Vľavo: Sily pôsobiace na auto v pokoji. Vpravo: Sily pôsobiace na auto, keď sa hýbe rýchlosťou v.*

Teraz nech auto prechádza zákrutou rýchlosťou v, ktorá je maximálna možná. Ak by išlo rýchlejšie, už by ho trenie neudržalo na vozovke a vyletelo by zo zákruty. V tomto prípade teda trenie pôsobí opačným smerom. Navyše na auto v jeho vzťažnej sústave pôsobí neinerciálna odstredivá sila s veľkosťou $m\frac{v^2}{r}$. Spravíme analogický rozklad síl ako v prvom prípade a dostaneme

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{r}\sin\alpha, \\ fN + mg\sin\alpha &= \frac{mv^2}{r}\cos\alpha \end{aligned} \tag{21.3}$$

a odtiaľ

$$v = \sqrt{gr\frac{f\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}}. \tag{21.4}$$

Po predelení čitateľa i menovateľa zlomku výrazom $\cos\alpha$ a využití $\tan\alpha = f$ konečne dostávame

$$v = \sqrt{\frac{2fgr}{1-f^2}}. \tag{21.5}$$

22 Z informácie, že sa loptička pohybuje stále po tej istej trajektórii, vyplýva, že sa musí od dosky vždy odraziť kolmým odrazom. Keďže dosky navyše zvierajú pravý uhol, bude odraz od každej zo stien šikmým vrhom pod uhlom 45°. To znamená, že tesne po odraze bude mať vodorovná a zvislá zložka rýchlosti loptičky zhodnú veľkosť $|v_x| = |v_y|$.

Loptička sa dostane do najvyššieho bodu svojej trajektórie presne v polovici periódy medzi klopnutiami, teda po čase $t = 0{,}5$ s. Od tohto momentu vo zvislom smere padá voľným pádom (s nulovou počiatočnou rýchlosťou) opäť po dobu t, takže rozdiel výšok najvyššieho bodu trajektórie a bodov odrazu bude

$$h_1 = \frac{1}{2} g t^2. \tag{22.1}$$

Toto ale ešte nie je hľadanou celkovou výškou najvyššieho bodu trajektórie. Na to k nej budeme ešte musieť pripočítať výšku bodov odrazu nad zemou.

Vieme, že za čas t sa stihne zvislá zložka rýchlosti z počiatočnej hodnoty v_y vplyvom tiažového zrýchlenia presne vynulovať. Pre jej veľkosť teda platí $v_y = gt$. Vo vodorovnom smere sa bude preto loptička pohybovať po celú dobu rýchlosťou veľkosti práve $|v_x| = gt$. To znamená, že medzi dvomi odrazmi prejde vodorovnú vzdialenosť $2gt^2$. Ich výška nad zemou bude vďaka pravým uhlom práve polovica tejto vzdialenosti, teda $h_2 = gt^2$. Výsledná výška najvyššieho bodu trajektórie bude potom súčtom výšok h_1 a h_2,

$$h = h_1 + h_2 = \frac{1}{2} g t^2 + g t^2 = \frac{3}{2} g t^2 \approx 3{,}75 \text{ m}. \tag{22.2}$$

23 Ondím, ondím… až vyondím, že potenciálne onô medzi dvomi bodovými onými Q vo vzájomnom onom d je

$$E_{\text{pot}}(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{d}. \tag{23.1}$$

Pri nekonečnom onom je potenciálne onô nulové, teda $E_{\text{pot}}(\infty) \to 0$. Ak ich priondíme do vzájomného oného d, musíme vyondiť onô

$$W(d) = E_{\text{pot}}(d) - E_{\text{pot}}(\infty) = E_{\text{pot}}(d). \tag{23.2}$$

Celkové onô potrebné na priondenie oného Q z oného do ôsmeho oného oného, bude oným oných $W(d)$ potrebných na priondenie oného Q k jednotlivým oným oného samostatne. Môžeme ondiť

$$W_{\text{total}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{\sqrt{3}a} \right) = \frac{\left(18 + 9\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right) Q^2}{24\pi\varepsilon_0 a}. \tag{23.3}$$

Pre číselné onô z oného ondíme $W_{\text{total}} \approx 5{,}12 \cdot 10^{10}$ J.

24 Najprv si musíme uvedomiť, aký je principiálny rozdiel medzi prípadom pred roztopením a po roztopení. Pred roztopením celé teleso pláva, takže vytláča presne také množstvo vody, ktorého tiaž sa vyrovná tiaži celého telesa. To po roztopení už ale nebude platiť pre samostatný oslobodený balvan. Jeho tiaž vtedy totiž už presiahne maximálnu možnú vztlakovú silu od bazéna a vytlačí preto iba vodu s rovnakým objemom ako má on sám. Voda z kryhy po jej roztopení bude taktiež vytláčať iba vodu práve s jej vlastným objemom, ten bude ale stále zodpovedať tej istej tiaži, takže jej príspevok k zmene výšky hladiny bude v oboch prípadoch rovnaký, a preto nás nemusí zaujímať.

Označme si hustotu balvanu ρ_b. Rozdiel v množstvách vytlačenej vody pred a po roztopení teda spočítame ako rozdiel objemu vody s hmotnosťou rovnou hmotnosti balvanu m a objemu samotného balvanu

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_{H_2O}} - \frac{m}{\rho_b}. \tag{24.1}$$

Po roztopení bude zjavne vytlačenej vody menej ako pred ním, takže hladina bazénu klesne. Podľa zadania teda chceme záporný výsledok. Samotnú zmenu výšky hladiny dostaneme predelením objemu ΔV plochou bazéna S

$$\Delta h = -\frac{\Delta V}{S} = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho_{H_2O}}\right) \approx -3{,}3\ \text{cm}. \tag{24.2}$$

25 Minútová ručička má periódu $T_m = 1\,\text{h}$ a hodinová ručička má periódu $T_h = 12\,\text{h}$. Ich dĺžky sú v pomere

$$\frac{L_m}{L_h} = \frac{3}{2}. \tag{25.1}$$

Kinetickú energiu ľubovoľnej ručičky vypočítame pomocou rovnice

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{25.2}$$

pričom moment zotrvačnosti homogénnej tyče s osou rotácie na konci I zistíme z tabuliek. Dozvieme sa, že

$$I = \frac{1}{3} m L^2 = \frac{1}{3} \lambda L^3, \tag{25.3}$$

kde λ označuje dĺžkovú hustotu ručičky. Nakoniec uhlová rýchlosť je

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{25.4}$$

Keď energie ručičiek porovnáme, vieme výraz zjednodušiť. Hodnoty, ktoré sú zhodné pre obe ručičky, sa vykrátia, čím dostaneme

$$\begin{aligned} E_h &= E_m, \\ I_h \omega_h^2 &= I_m \omega_m^2, \\ \frac{\lambda_h L_h^3}{T_h^2} &= \frac{\lambda_m L_m^3}{T_m^2} \end{aligned} \tag{25.5}$$

a z toho už vieme vyjadriť výsledok

$$\frac{\lambda_h}{\lambda_m} = \left(\frac{L_m}{L_h}\right)^3 \left(\frac{T_h}{T_m}\right)^2 = 486. \tag{25.6}$$

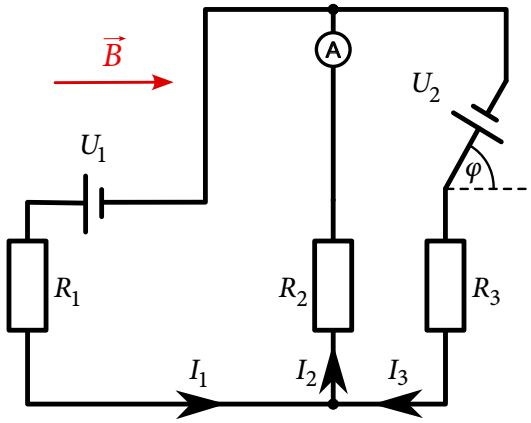
26 Na cievkach sa bude indukovať napätie podľa Faradayovho zákona, teda $U = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Ak si cievky zľava doprava označíme od 1 po 3, dostaneme naindukované napätia

$$\begin{aligned} U_1 = \quad \Delta\Phi_1 t = \quad NS\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \cos 0° = \quad 2\,\mathrm{V}, \\ U_2 = \quad \Delta\Phi_2 t = \quad NS\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \cos 90° = \quad 0, \\ U_3 = \quad \Delta\Phi_3 t = \quad NS\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \cos 60° = \quad 1\,\mathrm{V}, \end{aligned} \tag{26.1}$$

kde N je počet závitov (500), $S = 200\ \mathrm{cm}^2$ je plocha prierezu a B je lineárne sa meniaca magnetická indukcia.

Teraz už môžeme cievky brať jednoducho ako zdroje elektrických napätí U_1, U_2 a U_3. Napätie U_2 môžeme ignorovať, keďže je to 0. Všimnime si ešte, že keďže obe cievky sú vinuté pravotočivo, podľa pravidla pravej ruky vieme určiť, že obe napätia majú smery „zhora nadol“. Keď si teraz pooznačujeme prúdy ako na obrázku, prvý Kirchhoffov zákon nám povie, že $I_1 + I_3 = I_2$. Pomocou druhého Kirchhoffovho zákona teraz napíšeme rovnice

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{V} &= 4\ \Omega I_1 + 2\ \Omega(I_1 + I_3), \\ 1\,\mathrm{V} &= 2\ \Omega I_3 + 2\ \Omega(I_1 + I_3). \end{aligned} \tag{26.2}$$



Obrázek 26.1: *Prekreslenie obvodu pomocou zdrojov napätia*

Teraz už len vyriešime dve rovnice o dvoch neznámych. Prepíšeme ich na

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{V} &= 6\ \Omega I_1 + 2\ \Omega I_3, \\ 1\,\mathrm{V} &= 2\ \Omega I_1 + 4\ \Omega I_3. \end{aligned} \tag{26.3}$$

Po vynásobení prvej rovnice dvomi a následnom odčítaní druhej rovnice od prvej dostávame, že $I_1 = 0{,}3$ A. Keď tento výsledok dosadíme do jednej z rovníc, zistíme, že $I_3 = 0{,}1$ A. Ampérmetrom teda prechádza prúd $I_2 = I_1 + I_3 = 0{,}4$ A.

27 Keďže trenie medzi loptičkou a špirálou je zanedbateľné a loptičku máme považovať za hmotný bod, musí platiť, že pokles jej potenciálnej energie počas pohybu po špirále je rovný nárastu jej kinetickej energie. Vo výške $h \in [0; H]$ teda platí

$$mg(H-h) = \frac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2g(H-h)}. \tag{27.1}$$

Toto je ale rýchlosť loptičky v dotyčnicovom smere k špirále. K odstredivej sile prispieva len horizontálna zložka rýchlosti $v_h = v\cos\alpha$, kde α je sklon špirály. Pre sklon špirály možno písať $\tan\alpha = \frac{H}{2\pi RN}$. Využijúc identitu $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ dostávame pre horizontálnu zložku rýchlosti

$$v_h = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1+\left(\frac{H}{2\pi NR}\right)^2}}. \tag{27.2}$$

Veža má tendenciu sa preklopiť okolo hrany spodnej podstavy, preto vyjadrime veľkosť momentu odstredivej sily okolo tejto hrany. Dostaneme

$$M(h) = h\cdot\frac{mv_h^2}{R} = \frac{2mgR(H-h)h}{R^2+\left(\frac{H}{2\pi N}\right)^2}. \tag{27.3}$$

Vidíme, že moment sily od výšky závisí ako $M(h) = K(H-h)h$, kde K je nejaká konštanta. Potrebujeme teda nájsť maximum funkcie $f(h) = (H-h)h$. To je kvadratická funkcia, ktorá nadobúda nulové hodnoty v $h = 0$ a $h = H$. Jej grafom je parabola, ktorá je symetrická, čiže jej vrchol leží v strede medzi nimi, t. j. pre $h = \frac{H}{2}$, a pre túto výšku nadobúda táto funkcia maximum.

Loptička teda pôsobí najväčším momentom v polovici výšky veže. Preto, ak sa špirála neprevráti ani v tomto bode, ďalej si už jej neprevrátením môžeme byť úplne istí: ďalšie skracovanie ramena pôsobiacej sily už moment bude zmenšovať rýchlejšie, než sa ho veľkosť pôsobiacej sily pokúša zväčšovať.

28 Začnime tým, že si zistíme druhý rozmer Vlalca (Vlada Valca). To zistíme z rovnosti odporovej sily a sily, akou ide Vlado dopredu. Musia sa rovnať, lebo aj napriek dažďu ide stálou rýchlosťou v a ak ide niečo stálou rýchlosťou, celková sila na to pôsobiaca musí byť nulová. Poznáme

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv, \tag{28.1}$$

z čoho vyjadríme $F = \frac{P}{v}$. To dáme do rovnosti s odporovou silou

$$\frac{P}{v} = \frac{1}{2}C_d S\rho_a v^2, \tag{28.2}$$

kde ρ_a je hustota vzduchu. Z tohto výrazu vyjadríme

$$S = \frac{2P}{C_d\rho_a v^3}. \tag{28.3}$$

Toto S je v tomto prípade plocha Vlada, ktorou naráža do vzduchu. Je to obdĺžnik s rozmermi $h \times 2r$. Odtiaľ vieme vyjadriť

$$r = \frac{P}{hC_d\rho_a v^3} \approx 148 \text{ mm}. \tag{28.4}$$

Teraz sa môžeme konečne pustiť do toho, čo od nás úloha chce. Zistiť koľko vody do Vlada narazilo. Potrebujeme si uvedomiť, že voda naráža aj zhora (na vrchnú podstavu), aj zo strany a budeme musieť započítať oba prípady. Zhora je to vcelku jednoduché: uvažujeme, že prší rovnomerne – na každú plochu v každom čase dopadne rovnako veľa dažďa. Takže nám ani nevadí, ak máme nejakú pohybujúcu sa plochu, lebo aj tam padne za daný čas rovnako veľa dažďa. Vieme, že zrážok padne 1 mm; označme si to Z. Objem, ktorý padne na plochu kruhu zvrchu, je

$$V = \pi r^2 \cdot Z = 69 \text{ ml}. \tag{28.5}$$

Ostáva nám zistiť, do akého množstva vody Vlalec narazí. Uvažujme, že prší po dobu t a že prší rovnomerne. V každom objeme je naraz rovnako veľa vody. Preto si môžeme vymyslieť veličinu objemová koncentrácia vody, ktorá nám hovorí, koľko objemu vody je na objem vzduchu. Označme ju η a bude to pomer objemu vody k objemu vzduchu. Aby to bolo užitočné, bolo by fajn vedieť ju vyjadriť. Našťastie vieme, koľko zrážok naprší na jednotku plochy. Povedali sme si, že prší po dobu t, takže poznáme aj objem vzduchu, kde sa nachádza

$$V_a = S_p u t, \tag{28.6}$$

kde S_p je nejaký obsah a u je rýchlosť padania dažďa. Teraz vieme vyjadriť aj

$$\eta = \frac{ZS_p}{S_p u t} = \frac{Z}{ut}. \tag{28.7}$$

Vlalec prejde za čas t dráhu vt. Objem, cez ktorý prejde jeho prierez, je $2rhvt$. Všetok dážď obsiahnutý v tomto objeme doňho narazí. Teraz nám už iba stačí vynásobiť objem, ktorým prejde, objemovou koncentráciou, čím získame objem vody

$$V_w = \frac{2rhvtZ}{ut} = \frac{2rhvZ}{u} \approx 886 \text{ ml}. \tag{28.8}$$

Posledné, čo ostáva, je sčítať tieto dva objemy (voda, do ktorej narazí, a voda, ktorá naňho padne zvrchu), čím získame výsledok 955 ml. Všimnite si, že výsledok nezávisí od trvania dažďa.

29 V situácii, ktorou sa zoberá táto úloha, sa prejavuje *Dopplerov jav*. Ten hovorí o tom, že keď sa zdroj alebo príjemca vĺn pohybuje vzhľadom na médium, v ktorom sa tieto vlny šíria, frekvencia vĺn, ktorú bude vnímať príjemca, sa zmení oproti skutočnej frekvencii vĺn (ako ich vysiela zdroj).

Označme v rýchlosť vrtuľníka, c rýchlosť zvuku a f_0 vlastnú frekvenciu vrtuľníka. V prípade, keď sa pohybuje zdroj a príjemca je nehybný, sa dá vnímaná frekvencia vyjadriť ako

$$f = f_0 \frac{c}{c + v_r}, \tag{29.1}$$

kde v_r označuje radiálnu rýchlosť zdroja smerom od pozorovateľa (teda to, ako rýchlo sa vrtuľník vzďaľuje).

Počas toho, ako vrtuľník letí, v_r postupne rastie z $-v$ na v (okrajové hodnoty ale nikdy nenadobudne, iba asymptoticky). Pri týchto dvoch limitných rýchlostiach nadobúda aj limitné frekvencie, ktoré sú na grafe znázornené ako asymptoty

$$f_{\max} = f_0 \frac{c}{c-v} \qquad \text{a} \qquad f_{\min} = f_0 \frac{c}{c+v}, \tag{29.2}$$

odkiaľ vieme, že

$$f_0 = f_{\max} \frac{c-v}{c} \qquad \text{a} \qquad f_0 = f_{\min} \frac{c+v}{c}. \tag{29.3}$$

Vynásobíme obe strany prvej rovnice $f_{\min}$ a obe strany druhej rovnice $f_{\max}$:

$$f_0 f_{\min} = f_{\min} f_{\max} \frac{c-v}{c} \qquad \text{a} \qquad f_0 f_{\max} = f_{\min} f_{\max} \frac{c+v}{c}. \tag{29.4}$$

Keď tieto dve rovnice sčítame, dostaneme

$$f_0 (f_{\min} + f_{\max}) = f_{\min} f_{\max} \frac{(c-v)+(c+v)}{c} = 2 f_{\min} f_{\max}. \tag{29.5}$$

Teraz už môžeme vyjadriť

$$f_0 = \frac{2 f_{\min} f_{\max}}{f_{\min} + f_{\max}} = \frac{2}{\frac{1}{f_{\min}} + \frac{1}{f_{\max}}}. \tag{29.6}$$

Dosadením hodnôt $f_{\min} = 300$ Hz a $f_{\max} = 600$ Hz, ktoré možno odčítať z grafu, dostaneme $f_0 = 400$ Hz.

30 Pri pohybe s meniacim sa zrýchlením bude nádoba s kačičkou cítiť presne rovnaké efekty, aké by spôsobil zodpovedajúci nárast tiažového zrýchlenia. Môžeme si teda predstavovať, že namiesto hýbania vedrom iba postupne zosilňujeme tiaž.

Na kačičku pôsobia len dve relevantné sily: tiažová a vztlaková. Obe sú priamo úmerné veľkosti tiažového zrýchlenia a pôsobia proti sebe. Nech sa teda tiažové zrýchlenie mení akokoľvek, vždy sa presne navzájom vyrušia a kačička nemá dôvod sa voči vedru akokoľvek pohnúť, aspoň teda kým zrýchľuje smerom nahor. Odpoveďou je teda nula.

31 Katka je k-krát hustejšia ako voda, takže pri úplnom ponorení vytlačí vodu s hmotnosťou m/k. Vztlaková sila na ňu je vtedy

$$F_h = \frac{m}{k} g. \tag{31.1}$$

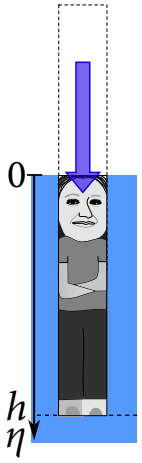
Ďalej zaveďme zvislú súradnicu η, ktorá s rastúcou hĺbkou rastie a ktorej nula leží na hladine. Keďže je Katka valec, ponorený objem rastie priamo úmerne s hĺbkou ponorenia, a tak aj vztlaková sila: v hĺbke η je $\frac{\eta}{h}$-násobkom svojej najväčšej hodnoty. Možno teda okamžite písať pohybovú rovnicu

$$m\ddot{\eta} = mg - \frac{mg}{kh}\eta. \tag{31.2}$$

Po predelení hmotnosťou dostaneme

$$\ddot{\eta} = g - \frac{g}{kh}\eta = g - \frac{\kappa}{m}\eta, \tag{31.3}$$

kde $\kappa = \frac{mg}{kh}$ je konštanta úmernosti, ktorá dáva do súvisu veľkosť vztlakovej sily s hĺbkou ponorenia. Vidíme lineárnu závislosť sily od hĺbky, čo sa dosť ponáša na správanie pružinky. Takže na κ sa môžeme pozerať ako na efektívnu tuhosť takejto fiktívnej pružinky.



Obrázek 31.1: *Plne ponorená Katka*

Tiažovej sile i sile od fiktívnej pružinky vieme priradiť potenciálne energie a rovno napísať zákon zachovania energie. Nech v momente dotyku s hladinou je Katkina energia nulová. V najnižšej polohe potom poklesne tiažová potenciálna energia o mgh, potenciálna energia pružinky porastie na $\frac{1}{2}\kappa h^2$ a kinetická energia na $\frac{1}{2}mv^2$. Platí teda

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\kappa h^2, \tag{31.4}$$

odkiaľ

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgh - \frac{1}{2}\kappa h^2\right)} = \sqrt{2gh - \frac{\kappa h^2}{m}} = \sqrt{2gh - \frac{gh}{k}} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{k}\right)gh}. \tag{31.5}$$

Všimnime si, že vo výsledku nevystupuje ani Katkina hmotnosť, ani hrúbka valca, ani hustota vody. Rýchlosť pri úplnom ponorení teda záleží iba od toho, aká je Katka vysoká a koľkokrát je hustejšia ako voda.

32 Označme $p_{0,1} = 1$ MPa pôvodný tlak v novej kartuši a $p_{0,2} = 100$ kPa v starej. Taktiež označme P_1 a P_2 tlaky v týchto fľašiach na konci celého deja, teda keď sa opäť schladia na teplotu prostredia $T_0 = 20$ °C.

Podľa rovnice ideálneho plynu môžeme vyjadriť látkové množstvo ako

$$n = \frac{PV}{RT}. \tag{32.1}$$

Všimnime si, že na začiatku je celkové množstvo plynu v oboch kartušiach

$$n_0 = \frac{p_{0,1}V}{RT} + \frac{p_{0,2}V}{RT} \tag{32.2}$$

a na konci je celkové množstvo plynu

$$n_f = \frac{P_1V}{RT} + \frac{P_2V}{RT}. \tag{32.3}$$

Keďže žiaden plyn neuniká, tieto množstvá musia byť rovnaké ($n_0 = n_f$). Z toho po úprave dostávame

$$P_1 + P_2 = p_{0,1} + p_{0,2} = P_0 = 1100\ \text{kPa}. \tag{32.4}$$

Pozrime sa ďalej na situáciu, keď sú kartuše spojené ventilom. Vtedy má jedna kartuša teplotu $T_1 = 100\ °\text{C} = 373\ \text{K}$ a druhá $T_2 = -20\ °\text{C} = 253\ \text{K}$, ale obidve majú rovnaký tlak aj objem plynu. Rovnicu ideálneho plynu možno upraviť na tvar

$$nT = \frac{PV}{R}. \tag{32.5}$$

Pravá strana je pre obidve fľaše rovnaká, preto sa musia zhodovať aj v ľavej strane

$$n_1T_1 = n_2T_2 \tag{32.6}$$

alebo

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}, \tag{32.7}$$

kde n_1 a n_2 označujú látkové množstvo plynu v novej, resp. v starej kartuši.

Kartuše odpojíme a necháme, aby sa ich teplota vyrovnala s teplotou prostredia. Pritom sa ale látkové množstvo v ani jednej z nich nezmení. Teraz upravíme rovnicu ideálneho plynu na tvar

$$\frac{P}{n} = \frac{RT}{V}. \tag{32.8}$$

Keďže obidve kartuše majú teplotu prostredia, pravá strana rovnice je pre obe kartuše rovnaká, čiže sa opäť musia zhodovať aj v ľavej

$$\frac{P_1}{n_1} = \frac{P_2}{n_2} \tag{32.9}$$

alebo

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}. \tag{32.10}$$

Zároveň vieme, že

$$P_0 = P_1 + P_2 = P_2\left(1 + \frac{P_1}{P_2}\right) = 1100\ \text{kPa}, \tag{32.11}$$

odkiaľ úpravou máme

$$P_2 = \frac{P_0}{1 + \frac{P_1}{P_2}} = \frac{P_0}{1 + \frac{T_2}{T_1}} = \frac{1\ \text{MPa} + 100\ \text{kPa}}{1 + \frac{253\ \text{K}}{373\ \text{K}}} = 655\ \text{kPa}. \tag{32.12}$$

33 Až sa Marekova rýchlosť ustáli na hodnote w, musia byť naňho pôsobiace sily v rovnováhe a to isté musí platiť aj pre ich zložky v smere rovnobežnom s kopcom a kolmom naň. Keďže Marek sa vždy pohybuje po svahu, súčet kolmých zložiek je vždy nulový a vôbec nás nemusí trápiť. Preto vôbec nemusíme uvažovať normálovú silu od podložky – vždy sa nájdu iné sily, ktoré ju úplne vyrušia.

Ostávajú nám teda

- zložka *tiažovej sily* s veľkosťou $F_g = mg\sin\alpha$, kde
  - m je Marekova hmotnosť,
  - α je sklon kopca.

  Táto zložka zjavne od rýchlosti nezávisí;
- *odporová sila* od vzduchu s veľkosťou $F_d = \frac{1}{2}c_d S\rho v^2$, kde
  - c_d je bezrozmerný odporový koeficient, ktorý závisí od tvaru a prostredia,
  - S je plocha kolmého prierezu Mareka s bicyklom na smer pohybu,
  - ρ je hustota vzduchu.

  Keďže všetko toto sú konštanty, môžeme jednoducho písať $F_d = kv^2$;
- a nakoniec brzdiaca sila s veľkosťou F_b, ktorá opäť od rýchlosti nezávisí.

V rovnovážnom stave platí

$$F_g = F_d + F_b, \tag{33.1}$$

keďže tiažová sila Mareka urýchľuje dolu kopcom a zvyšné dve ho brzdia.

Veľkosť tiažovej sily vyjadriť nevieme, keďže sklon kopca α nepoznáme. Vieme však, že pri rýchlosti w platí $F_g(w) = F_d(w)$, a keďže sila F_g od rýchlosti nezávisí a v situácii bez bŕzd už vieme, že $F_d(w) = kw^2 = F_g(w) = F_g$, môžeme rovnicu 33.1 prepísať do tvaru

$$kw^2 = kv^2 + F_b. \tag{33.2}$$

Aby sme zistili, aký výkon sa mení v brzdách na teplo, stačí celú rovnicu prenásobiť rýchlosťou:

$$kw^2v = kv^3 + F_bv, \tag{33.3}$$

kde člen na ľavej strane predstavuje výkon zložky tiažovej sily, prvý člen na pravej strane výkon práce vykonanej na vzduchu (ktorá sa nakoniec stratí v turbulenciách, a teda sa ľudovo povedané „zmení na teplo“) a posledný člen je to, čo hľadáme, teda výkon, ktorý sa spotrebuje v brzdách. Označme si ho $P_b \equiv F_bv$.

Teraz už len hľadáme také (kladné) v, pre ktoré bude P_b maximálne. Ak vieme derivovať, rovnicu 33.3 stačí upraviť na

$$P_b(v) = kw^2v - kv^3 \tag{33.4}$$

a zabezpečiť, aby derivácia bola nulová[2], teda

$$\frac{\mathrm{d}k(w^2v - v^3)}{\mathrm{d}v} \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; w^2 - 3v^2 = 0 \;\Rightarrow\; v = \frac{w}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}w. \tag{33.5}$$

[2]Platí $P_b(0) = P_b(w) = 0$ a $P_b(x) \geq 0$, takže je to naozaj maximum.

Numerické riešenie

Ak derivovať nevieme alebo nechceme, stačí v rovnici 33.4 nahradiť $v \to \gamma w$. Tak získame výraz v tvare

$$P_b \propto w^3\left(\gamma - \gamma^3\right), \tag{33.6}$$

kde je jedinou neznámou bezrozmerná γ. Preto stačí maximalizovať výraz $\gamma(1-\gamma^2)$, a keďže zjavne $v < w$, stačí nám prezrieť interval $\gamma \in (0;1)$. To môžeme robiť napríklad lineárnym hľadaním – s pomocou kalkulačky skúšame za γ dosadzovať postupne hodnoty 0, 0,1, 0,2, ... až kým hodnota nezačne klesať. Až sa tak stane, vrátime sa k poslednej dobrej hodnote a postup opakujeme s menším krokom, až kým nedosiahneme požadovanú presnosť; alebo nejakou chytrejšou metódou.

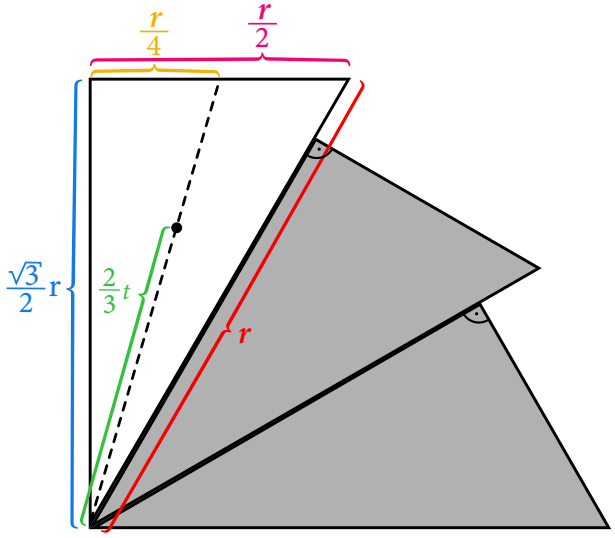
Tak pomerne rýchlo nájdeme približný správny výsledok $\gamma \approx 0{,}577$.

34 Uvažujme, že kotúč sa otáča uhlovou rýchlosťou Ω. Ak spraví N otáčok za minútu, potom $\Omega = \frac{2\pi N}{60}$. Ak oň pritlačíme latu silou F, tá ho bude brzdiť momentom $M = fF\frac{r}{2}$. Podľa druhej impulzovej vety platí $M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = J\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = J\varepsilon$. Odtiaľ $\varepsilon = \frac{M}{J}$ a potom čas do zastavenia je $\frac{\Omega}{\varepsilon} = \frac{\pi N J}{15 f F r}$.

Z času τ zistíme celkový uhol, o ktorý sa kotúč otočí, ako $\varphi = \Omega\tau - \frac{1}{2}\varepsilon\tau^2 = \frac{N^2\pi^2 J}{900 F f r}$. Pre počet otáčok n teda dostávame

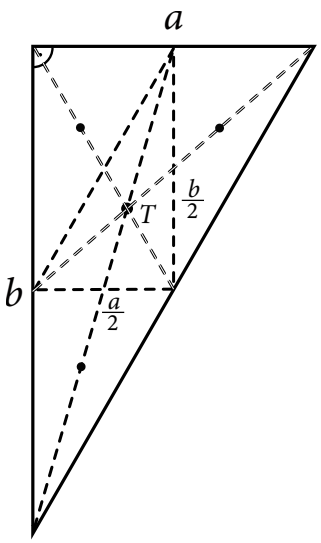
$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{N^2\pi J}{1800 F f r}. \tag{34.1}$$

Jediná vec, čo nám zostáva určiť, je moment zotrvačnosti kotúča okolo stredu.



Obrázek 34.1: *Rozklad kotúča na 12 zhodných trojuholníkov*

Pri bližšom pohľade na kotúč si všimneme, že ho možno rozložiť na 12 pravouhlých trojuholníkov s vnútorným uhlom pri jednej odvesne 30°. Nájdime si teda najskôr moment zotrvačnosti jedného takéhoto trojuholníka okolo jeho ťažiska.



Obrázek 34.2: *Rozklad trojuholníka pre výpočet momentu zotrvačnosti*

Uvažujme pravouhlý trojuholník so stranami a a b. Jeho moment zotrvačnosti možno očakávať v tvare $J_0 = km(a^2 + b^2)$, kde m je jeho hmotnosť a k je nejaká číselná konštanta reflektujúca rozloženie hmoty. Poďme si určiť k.

Trojuholník možno rozdeliť strednými priečkami na 4 zhodné trojuholníky so štvrtinovou hmotnosťou a polovičnými rozmermi. Moment zotrvačnosti trojuholníka teda možno vyjadriť ako súčet momentov zotrvačností týchto 4 menších trojuholníkov okolo toho istého bodu. Na to použijeme Steinerovu vetu. Platí

$$\begin{aligned} J_0 &= 4k\frac{m}{4}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{m}{4}\left[\frac{1}{9}\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{1}{9}\left(a^2+\frac{b^2}{4}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{4}km\left(a^2+b^2\right)+\frac{1}{24}m\left(a^2+b^2\right). \end{aligned} \tag{34.2}$$

Z rovnosti vyjadrení momentu zotrvačnosti trojuholníka dostávame

$$km\left(a^2+b^2\right) \overset{!}{=} \frac{1}{4}km\left(a^2+b^2\right)+\frac{1}{24}m\left(a^2+b^2\right) \;\Rightarrow\; k=\frac{1}{18}, \tag{34.3}$$

a teda moment zotrvačnosti pravouhlého trojuholníka s odvesnami a a b okolo jeho ťažiska je

$$J_0 = \frac{1}{18}m\left(a^2+b^2\right) = \frac{1}{36}\sigma ab\left(a^2+b^2\right). \tag{34.4}$$

Ak je polomer opísanej kružnice kotúču r, tak toto je dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka. Odvesny sú potom dlhé $\frac{r}{2}$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ a moment zotrvačnosti okolo ťažiska je $J_0 = \frac{\sqrt{3}}{144}\sigma r^4$.

Na záver ešte potrebujeme dopočítať pomocou Steinerovej vety moment zotrvačnosti tohto trojuholníka okolo osi prechádzajúcej jeho vrcholom. Z Pytagorovej vety ľahko určíme, že dĺžka ťažnice je $t = \frac{\sqrt{13}}{4}r$

a ťažisko leží v dvoch tretinách jej dĺžky, preto

$$J_1 = J_0 + m\left(\frac{2}{3}t\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{144}\sigma r^4 + \frac{1}{2}\sigma\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\frac{13}{36}r^2 = \frac{5\sqrt{3}}{96}\sigma r^4. \tag{34.5}$$

Moment zotrvačnosti kotúča je konečne

$$J = 12J_1 = \frac{5\sqrt{3}}{8}\sigma r^4. \tag{34.6}$$

Po dosadení do vzťahu pre počet otáčok do zastavenia kotúča dostávame

$$n = \frac{\sqrt{3}\pi N^2\sigma r^3}{2880Ff}. \tag{34.7}$$

35 Ako prvú vec si musíme uvedomiť, že ak hľadáme maximálnu obežnú dobu, musíme najprv nájsť maximálnu veľkú polos, pretože tretí Keplerov zákon hovorí, že pre každé teleso obiehajúce okolo Slnka platí

$$\frac{a^3}{T^2} = k, \tag{35.1}$$

kde a je veľká polos obežnej dráhy, T je obežná doba, a k je konštanta rovnaká pre každé teleso obiehajúce okolo Slnka.

Najväčšiu veľkú polos okolo Slnka bude mať satelit, ktorý v momente zmiznutia Zeme hýbal najväčšou rýchlosťou voči Slnku. To je práve ten satelit, ktorého obežná rýchlosť okolo Zeme bola rovnobežná s rýchlosťou Zeme voči Slnku, pretože vtedy bude vektorový súčet týchto dvoch rýchlostí maximálny – a bude to proste súčet veľkostí rýchlostí.

Ako rýchlo obieha satelit okolo Zeme? To zistíme z rovnosti dostredivej a gravitačnej sily

$$\frac{mv_\mathrm{s}^2}{R_\oplus + h} = \frac{GM_\oplus m}{(R_\oplus + h)^2}, \tag{35.2}$$

kde m je hmotnosť satelitu obiehajúceho vo výške h nad povrchom a v_s je jeho rýchlosť. Tú vyjadríme ako

$$v_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}}, \tag{35.3}$$

čo pre $h = 400$ km dáva $v_\mathrm{s} \approx 7672{,}59$ m/s. Rýchlosť Zeme na kruhovej dráhe je jednoducho dĺžka kružnice vydelená jedným rokom, čiže

$$v_\oplus = \frac{2\pi\ \mathrm{au}}{y} \approx 29\,786\ \mathrm{m/s}. \tag{35.4}$$

V momente zmiznutia Zeme teda ide satelit rýchlosťou $v_\mathrm{s} + v_\oplus$ voči Slnku a je vo vzdialenosti 1 au od Slnka. Satelit je v perihéliu, pretože jeho rýchlosť je kolmá na spojnicu Slnko-satelit, a pretože ide rýchlejšie než bývalá Zem na kruhovej dráhe.

Teraz využijeme zákon zachovania mechanickej energie. Súčet potenciálnej a kinetickej energie satelitu počas obehu okolo Slnka je stále rovnaký, čiže

$$-\frac{GM_\odot}{1\,\mathrm{au}} + \frac{1}{2}(v_\mathrm{s} + v_\oplus)^2 = -\frac{GM_\odot}{x} + \frac{1}{2}v_x^2, \tag{35.5}$$

kde na ľavej strane je súčet potenciálnej a kinetickej energie satelitu v momente zmiznutia Zeme (v perihéliu) a na pravej strane je súčet energií v nejakom bode na dráhe, kde je satelit vzdialený x od Slnka a ide rýchlosťou v_x (hmotnosť satelitu sme škrtli).

Aby sme vypočítali veľkosť veľkej polosi, stačí už len poznať aféliovú vzdialenosť (perihélium poznáme, to je 1 au). Využime zákon zachovania momentu hybnosti, a to konkrétne od teraz nech x je aféliová vzdialenosť, kde v_x je kolmá na spojnicu Slnko-satelit. Preto sa moment hybnosti v perihéliu (moment zmiznutia Zeme) a aféliu vypočíta jednoducho a porovnáme ich ako

$$1\,\mathrm{au}(v_\mathrm{s} + v_\oplus) = x v_x. \tag{35.6}$$

Z rovnice 35.6 vyjadríme v_x a vložíme do rovnice 35.5. Po úprave získame kvadratickú rovnicu

$$\left(\frac{GM_\odot}{1\,\mathrm{au}} - \frac{1}{2}(v_\mathrm{s} + v_\oplus)^2\right)x^2 - GM_\odot x + \frac{1\,\mathrm{au}^2(v_\mathrm{s} + v_\oplus)^2}{2} = 0. \tag{35.7}$$

Tá má pochopiteľne dve riešenia – perihélium a afélium. Afélium je to vzdialenejšie, čiže potrebujeme väčšie z riešení kvadratickej rovnice, teda

$$x = \frac{GM_\odot + \sqrt{(GM_\odot)^2 - 4\left(\frac{GM_\odot}{1\,\mathrm{au}} - \frac{1}{2}(v_\mathrm{s} + v_\oplus)^2\right)\frac{1\,\mathrm{au}^2(v_\mathrm{s}+v_\oplus)^2}{2}}}{2\left(\frac{GM_\odot}{1\,\mathrm{au}} - \frac{1}{2}(v_\mathrm{s} + v_\oplus)^2\right)}. \tag{35.8}$$

Z geometrie elipsy vieme, že dĺžku veľkej polosi vypočítame ako $(1\,\mathrm{au} + x)/2$. Teraz sa ešte musíme vrátiť k tretiemu Keplerovmu zákonu (35.1). Pomer $\frac{a^3}{T^2}$ si vyjadríme pre bývalú Zem a pre satelit, ktoré dáme do rovnosti, odkiaľ dostaneme maximálnu obežnú periódu satelitu

$$T = T_\oplus\left(\frac{a}{1\,\mathrm{au}}\right)^{3/2}, \tag{35.9}$$

kde za a dosadíme $(1\,\mathrm{au} + x)/2$, kde x je z rovnice 35.8. Výsledkom je 3,70 a.

36 V prvom kroku je nutné určiť polohu ťažiska plného zrezaného paraboloidu. Ak si ho predstavíme postavený na vrchole a pozrieme sa naň spredu, vidíme parabolu danú predpisom

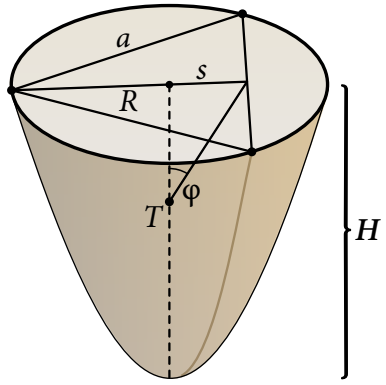
$$y = H\left(\frac{x}{R}\right)^2, \tag{36.1}$$

aby sme pre polomer podstavy R mohli dostať výšku H. Z tejto rovnice vyplýva, že

$$x^2 = \frac{R^2}{H}y. \tag{36.2}$$

Keď zisťujeme plochu kruhu vzniknutého rezom paraboloidu kolmo na jeho os, máme

$$S = \frac{\pi R^2}{H} y. \tag{36.3}$$



Obrázek 36.1: *Parametrizácia kvetináča*

Zisťujeme, že plocha podstavy paraboloidu rastie lineárne s jeho výškou, čo je aj vlastnosť dĺžky podstavy trojuholníka z dôvodu podobnosti. Ide o analógiu Cavalieriho princípu. Z tejto úvahy vyplýva, že ak sa plocha zvyšuje rovnakým spôsobom, bude aj poloha ťažiska rovnaká, teda tretinu výšky od podstavy.

Body upevnenia lán tvorili rovnostranný trojuholník, preto polomer opísanej kružnice R, čiže podstavy paraboloidu, sú 2/3 výšky trojuholníka. Zároveň výška trojuholníka v je vo vzťahu s dĺžkou jeho strany a,

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3}{2} R \;\Rightarrow\; a = \sqrt{3} R. \tag{36.4}$$

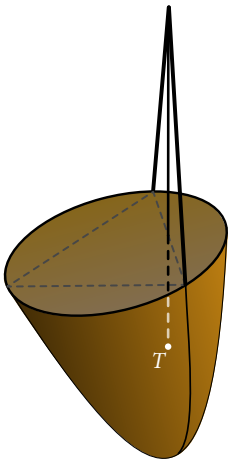
Teraz označme s vzdialenosť medzi pätou výšky trojuholníka a stredom opísanej kružnice, teda

$$s = v - R = \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{1}{\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a. \tag{36.5}$$

Už poznáme vzdialenosť podstavy od ťažiska T a zároveň vidíme, že dĺžka lán je irelevantná, lebo kvetináč sa vždy zastaví tak, aby bolo ťažisko pod spojnicou bodov upevnenia, na čo dĺžka lán nemá vplyv. Potrebujeme preto určiť iba uhol pri ťažisku paraboloidu v trojuholníku, kde ďalší bod je stred podstavy a stred spojnice bodov upevnenia. Z náčrtu 36.2 vidieť, že

$$\tan \varphi = \frac{s}{H/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{H} = \frac{3}{2} \frac{R}{H}. \tag{36.6}$$

Po dosadení dostávame 45°.



Obrázek 36.2: *Kvetináč visiaci na dvoch lanách*

37 Čo sa stane, keď na seba budeme postupne pokladať ďalšie a ďalšie pružiny? Všetky sa budú postupne stláčať – sila pôsobiaca na ľubovoľný kúsok pružiny bude rovná tiaži pružín nad ňou. Pri dostatočnom množstve pružín sa spodok stlačí až na nulovú dĺžku, a ďalším pridávaním pružín sa už nič nezmení. Všimnime si, že takto nemusíme uvažovať jednotlivé pružiny, ale môžeme si ich predstaviť ako jednu dostatočne dlhú pružinu z rovnako pružného materiálu s rovnakou dĺžkovou hustotou. Zaujímať nás bude jej kritická dĺžka, teda taká, pri ktorej sa spodok stlačí na nulu.

Tuhosť pružiny je nepriamo úmerná jej dĺžke – takže to, čo sa pri krájaní pružiny na kúsky zachováva, nie je klasická tuhosť meraná v N/m, ale tuhosť násobená dĺžkou. Táto veličina má rozmer sily a vyjadruje silu potrebnú na stlačenie ľubovoľného kúsku pružiny na nulovú dĺžku, ktorú si môžeme označiť ako $F_c = kL_0$.

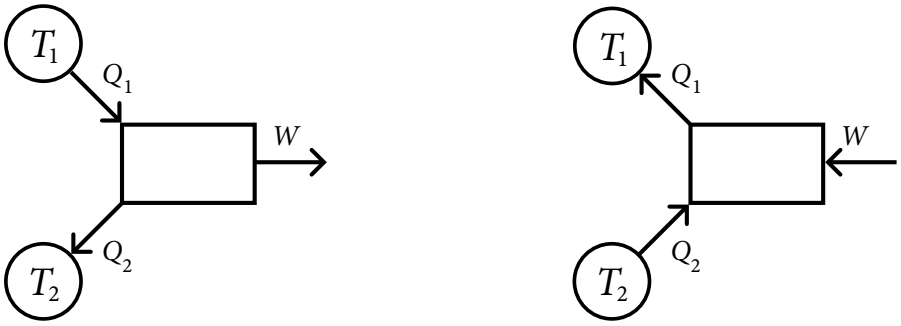
Teraz si môžeme vyjadriť, pri akej dĺžke zvislo stojacej pružiny je jej tiaž rovná kritickej sile F_c. So znalosťou dĺžkovej hustoty $\lambda = \frac{m}{L_0}$ to vieme vyjadriť priamočiaro zo vzťahu

$$\lambda L_c g \stackrel{!}{=} F_c \;\Rightarrow\; L_c = \frac{F_c}{\lambda g} = \frac{kL_0^2}{mg}. \tag{37.1}$$

V zadaní úlohy sa nás ale nepýtajú na pokojovú dĺžku, ale na skutočnú výšku veže z pružín. Na jej zistenie nám stačí uvedomiť si, že v kritickom prípade sa relatívne stlačenie kúska pružiny musí meniť lineárne s *pokojovou* výškou veže, a to od 0 až po 1. Malý kúsok pružiny v pokojovej vzdialenosti ℓ od vrchu je potom stlačený presne o toľko, na koľko je stlačený kúsok v *pokojovej* vzdialenosti $L_c - \ell$. Priemerné stlačenie cez celú pružinu je teda akurát polovičné, a teda aj jej celková *stlačená* výška musí byť polovičná.

Výslednou maximálnou možnou výškou veže je teda $\dfrac{kL_0^2}{2mg} = 75$ cm.

38 Maximálnu účinnosť, ktorú môže klimatizácia dosiahnuť, by mala, ak by pracovala na princípe Carnotovho cyklu. Pre účinnosť Carnotovho tepelného stroja pracujúceho medzi teplotami T_1 a $T_2 < T_1$ platí $\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Zároveň ale možno účinnosť tepelného stroja definovať ako podiel užitočnej práce k dodanému teplu $\eta_C = \frac{W}{Q_1}$. Zo zákona zachovania energie navyše platí $Q_1 = W + Q_2$, teda že dodané teplo sa spotrebuje na konanie práce a prebytočné teplo sa odovzdá chladiču. Odtiaľ teda $\eta_C = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$.



Obrázek 38.1: *Vľavo: Carnotov stroj. Vpravo: Obrátený Carnotov stroj (klimatizácia).*

Klimatizácia funguje na princípe obráteného Carnotovho cyklu, teda dodávame jej energiu W na to, aby z chladnejšieho miesta odoberala teplo Q_2 a všetko teplo odovzdávala do teplejšieho prostredia. Účinnosť klimatizácie možno definovať ako $\eta_{AC} = \frac{Q_2}{W}$, čiže podiel množstva odčerpaného tepla z miestnosti k množstvu dodanej elektrickej energie (vykonanej práce). Postupnými úpravami dostaneme

$$\eta_{AC} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1 + Q_1}{Q_1 - Q_2} = -1 + \frac{1}{\eta_C} = -1 + \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \tag{38.1}$$

Pre teploty zo zadania dostaneme $\eta_{AC} \approx 1466\,\% \approx 14{,}7$.

39 Ako prvé pooznačujme strany kvádra $H = 30$ cm, $D = 60$ cm a $L = 40$ cm a tuhosť $k = 125$ N/m. Keď do vaničky nalejeme vodu, kvôli hydrostatickému tlaku sa jej steny na pántoch trocha odklopia, preto hladina nebude vo výške H, ale v o čosi menšej výške, označme y_m. Poďme skúsiť túto výšku vypočítať! Situáciu nám trochu komplikuje fakt, že hydrostatický tlak je v každej časti odklápajúcej sa steny iný.

Vytvorme pomocnú súradnicu s, ktorá má nulovú hodnotu na mieste pántov, okolo ktorých sa ohýbajú steny, a potom sa zvyšuje popri odklápacej stene nahor. Zvoľme teraz malú časť odklápacej steny o dĺžke $\mathrm{d}s$, druhý rozmer je prirodzene D. Malá sila, ktorá na túto časť pôsobí je $\mathrm{d}F_1 = p(y) \cdot D\,\mathrm{d}s$, kde $p(y)$ je funkcia hydrostatického tlaku, ktorá sa mení s výškou nad vaničkou y. Vieme pri tom, že $p(y) = \rho g(y_m - y)$, čiže už vieme, koľko je $\mathrm{d}F_1$. Keďže sa steny otáčajú, zaujíma nás viac moment sily, ktorým voda pôsobí na stenu, označme M_1. Jeho malý prírastok z $\mathrm{d}F_1$ a $p(y)$ vyjadríme ako

$$\mathrm{d}M_1 = \mathrm{d}F_1 s = (p(y)D\,\mathrm{d}s)s = \rho g(y_m - y)Ds \cdot \mathrm{d}s. \tag{39.1}$$

Problémom je, že tu máme teraz dve premenné, aj s aj y, a naintegrovať to chceme len podľa jedného z nich. Prepis medzi nimi je jednoduchý: ak uhol, o ktorý sú steny odklopené od zvislej polohy, označíme α, prepis je zjavne $y = s\cos\alpha$. Všimnime si tiež, že tým ani nepridávame žiadnu neznámu, lebo kosínus jednoducho vyjadríme aj ako $\cos\alpha = y_m/H$. To znamená, že teraz už vieme naintegrovať $\mathrm{d}M_1$ popri celej stene, aby sme zistili, akým momentom sily na stenu voda pôsobí.

$$\begin{aligned} M_1 &= \int \mathrm{d}M_1 = \int_0^H \rho g(y_m - s\cos\alpha)Ds\,\mathrm{d}s = \rho gD\left(\int_0^H y_m s\,\mathrm{d}s - \int_0^H \cos\alpha s^2\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= \rho gD\left(y_m\frac{H^2}{2} - \cos\alpha\frac{H^3}{3}\right) = \rho gD\left(y_m\frac{H^2}{2} - y_m\frac{H^2}{3}\right) = \frac{1}{6}\rho gDy_mH^2. \end{aligned} \tag{39.2}$$

V rovnovážnej polohe musí byť tento moment sily rovnaký, ako moment od pružiniek pôsobiaci opačným smerom, označme M_2. Obe pružinky si predstavme ako jednu pružinku s tuhosťou $2k$. Pythagorova veta nám povie, že táto pružinka pôsobí silou $2k \cdot 2\sqrt{H^2 - y_m^2}$. Aby sme zistili M_2, musíme zobrať zložku tejto sily, ktorá je kolmá na stenu vaničky, a tú ešte vynásobiť dĺžkou ramena H. Dostávame teda

$$M_2 = 4k \cdot \sqrt{H^2 - y_m^2} \cdot \cos\alpha \cdot H = 4k \cdot \sqrt{H^2 - y_m^2} \cdot y_m. \tag{39.3}$$

Všetko sme vyjadrovali tak, aby sme z $M_1 = M_2$ dostali veľkosť y_m. Všimnime si, že v tejto rovnosti sa nám y_m škrtnú, a ostane len $\sqrt{H^2 - y_m^2}$. Môžeme si teda ušetriť trošku upravovania, a označiť túto vzdialenosť ako x_m. Potom z $M_1 = M_2$ dostaneme

$$4kx_m = \frac{1}{6}\rho g D H^2 \;\Rightarrow\; x_m = \frac{\rho g D H^2}{24k}. \tag{39.4}$$

A y_m dostaneme ako $y_m = \sqrt{H^2 - x_m^2}$. Teraz už sme pripravení vyjadriť objem vody vo vaničke V. Prierez má tvar lichobežníka, zistíme jeho obsah, a ten vynásobíme rozmerom D:

$$V = \frac{(L + L + 2x_m) \cdot y_m}{2} \cdot D. \tag{39.5}$$

Keď dosadíme za x_m a y_m vypočítané hodnoty, a za tie hodnoty zo zadania a konštanty, dostaneme výsledok $V \approx 84\,\mathrm{l}$.

40 Predstavme si, že Slnko vyžaruje fotóny (častice svetla) po jednom v nejakých krátkych časových úsekoch. V jeho vlastnej sústave (sústava spojená so Slnkom) sa dve po sebe idúce emisie dejú v časoch

$$t_1' = 0 \qquad \text{a} \qquad t_2' = T, \tag{40.1}$$

kde T je perióda medzi dvomi vlnovými vrcholmi, čiže $T = 1/\nu_{\text{emise}}$, kde ν_{emise} je frekvencia vyžiareného fotónu. V tejto sústave sa Slnko nehýbe, takže obe emisie sú z polohy $x' = 0$.

Zemská sústava to ale vidí inak, pretože Slnko sa voči nej pohybuje rýchlosťou v smerom od Zeme. Tu nastupujú tri efekty: dilatácia času, retardácia signálu a aberácia.

Dilatácia času

Podľa špeciálnej relativity, interval medzi dvomi udalosťami v pohybujúcej sa sústave je z pohľadu Zeme dlhší o faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{40.2}$$

kde $\beta = \frac{v}{c}$. Čas medzi dvomi emisiami v Zemskej sústave teda nie je T, ale

$$\Delta t_{\text{emise}} = \gamma T. \tag{40.3}$$

Toto nazývame dilatácia času. Za tento čas γT sa Slnko stihne vzdialiť o

$$\Delta x = v \cdot \gamma T. \tag{40.4}$$

To znamená, že druhý fotón musí prejsť túto extra vzdialenosť navyše, kým dobehne na Zem. Tento príspevok k oneskoreniu je

$$\Delta t_{\text{ret}} = \frac{\Delta x}{c} = \gamma T \beta. \tag{40.5}$$

Keď tieto dva efekty spočítame, dostaneme celkový čas medzi príchodmi dvoch po sebe letiacich fotónov na Zem,

$$\Delta t_{\text{příchod}} = \gamma T + \gamma T \beta = \gamma T (1 + \beta). \tag{40.6}$$

Z tohto priamo vidno, že pozorovaná frekvencia (koľko fotónov príde na Zem za jednotku času) je

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{1}{\Delta t_{\text{příchod}}} = \frac{1}{\gamma(1+\beta)} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{\gamma(1+\beta)} \nu_{\text{emise}}. \tag{40.7}$$

Tento pomer sa označuje ako Dopplerov faktor

$$\delta = \frac{1}{\gamma(1+\beta)} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{40.8}$$

Vidíme, že vznikol presne kombináciou dvoch spomínaných efektov: časová dilatácia dáva faktor $1/\gamma$ a retardácia signálu (teda fakt, že druhý fotón musí prejsť dlhšiu dráhu) dáva faktor $\frac{1}{1+\beta}$. Spolu teda dostaneme

$$\nu_{\text{obs}} = \delta \nu_{\text{emise}}. \tag{40.9}$$

Preto energia jedného fotónu, ktorá je úmerná frekvencii ($E = h\nu$), klesne o faktor δ. Zároveň aj počet fotónov, ktoré prídu za jednotku času podľa našich hodín, sa zmenší o ten istý faktor δ. Výsledný tok energie, čiže intenzita žiarenia, klesne o súčin oboch účinkov

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \delta^2. \tag{40.10}$$

Aberácia

Ako posledné musíme zarátať aj to, že po novom už Slnko v sústave Zeme nevyžaruje izotropne: intenzita žiarenia v smere kolmom na smer pohybu ostáva nezmenená, ale v smere rovnobežnom so smerom pohybu je dilatovaná, a to opäť faktorom δ. Keďže rozmery Slnka aj Zeme sú oveľa menšie ako vzdialenosť medzi nimi, teda lúče svetla sú približne rovnobežné. Preto nám stačí rátať s malými uhlami, a teda priestorový uhol sa bude škálovať úmerne δ^2.

Spolu teda dostávame odpoveď, že ak by sa Slnko pohybovalo rýchlosťou $v = c/2$ od Zeme, potom

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \Phi = \delta^4 \Phi_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 \Phi_0 = \frac{1}{9}\Phi_0 \tag{40.11}$$

a odpoveďou je teda jedna devätina.

Výsledky

1 A2, B4, C3, D5, E1, F6

2 $\frac{h}{v}$

3 1,25 m, *uznejte řešení v intervalu* 1,22 m – 1,25 m.

4 7,5 km

5 CHAFDGIJKBLE

6 12 Ω, 9 Ω a 6 Ω, *na pořadí nezáleží.*

7 $\frac{t}{28}$

8 $\sqrt{3}L$

9 30°

10 $\frac{1}{2}\lambda L g$

11 16 220 s ≈ 270 min ≈ 4,506 h, *uznejte řešení v intervalu* 4,50 h – 4,59 h.

12 8 €/m^3

13 $\frac{3}{4}$

14 31,6 km/h

15 7

16 $9 < 2 < 4 < 5 < (1 = 6 = 7) < 3 < 8$, *pořadí čísel v závorce může být libovolné.*

17 $\frac{2}{3}\left(h_0 - \frac{m}{\rho S}\right)$

18 230,4 m

19 11,35 m/s^2, *uznejte řešení v intervalu* 11,12 m/s^2 – 11,35 m/s^2.

20 $4e$, $-2e$

21 $\sqrt{\frac{2fgr}{1-f^2}}$

22 3,75 m, *uznejte řešení v intervalu* 3,67 m – 3,75 m.

23 $5{,}12 \cdot 10^{10}$ J

24 −3,3 cm

25 486

26 0,4 A

27 $\frac{H}{2}$

28 955 ml, *uznejte řešení v intervalu* 954 ml – 961 ml.

29 400 Hz

30 0, *nepohne se.*

31 $\sqrt{\left(2-\frac{1}{k}\right)gh} = \sqrt{\frac{2k-1}{k}gh}$

32 655 kPa

33 $\sqrt{\frac{1}{3}}w = \frac{\sqrt{3}}{3}w \doteq 0{,}577w$

34 $\dfrac{\sqrt{3}\pi N^2 \sigma r^3}{2880 F f}$

35 3,70 a, *uznejte řešení v intervalu* 3,69 a – 3,70 a.

36 45°

37 75 cm, *uznejte řešení v intervalu* 75 cm – 77 cm.

38 1466 % ≈ 14,7

39 83,5 l, *uznejte řešení v intervalu* 83,5 l – 84,0 l.

40 $\dfrac{1}{9}$

Autoři příkladů

Martin ‚Kvík' Baláž
Petra Čobrdová
Richard Dudek
Katarína Gersová
Jakub Hluško
Lucia Kleščová
Jakub Kliment
Miroslav Pajger
Marek Sliva
Jozef Smolár
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös

Obrázky

Anamária ‚Anomália' Šutková
Michal ‚Piškót' Tomaga

Technická úprava

Martin ‚Kvík' Baláž

Fyzikální Náboj 29, cs (czech): booklet built by kvik with dgs `master: 20ae1da` at 2026-11-09 13:54:28 from branch `master: b7a6fd2eb`

©Náboj Physics international team, 2026. CC BY-NC-SA 4.0