Zadania

$\boxed{1.}$ Auto hmotnosti m ide po ceste rýchlosťou v. Vodič začne brzdiť a zabrzdí na dráhe d. Aká veľká bola brzdná sila, ak ABS v aute zabezpečuje brzdenie konštantnou silou?

$\boxed{2.}$ Zavodný jazdec Jakub Z. uháňa vo svojom dvojtonovom aute rýchlosťou $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ po diaľnici D1. Zozadu sa však nebezpečne približuje ešte závodnejší jazdec Ivan G. v aute s hmotnosťou 3 tony a rýchlosťou $150\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Akou rýchlosťou sa pohybuje ich spoločné ťažisko? O koľko je táto rýchlosť väčšia od rýchlosti, ktorou by sa pohybovala zrazenina dvoch áut, keby došlo k zrážke?

$\boxed{3.}$ Bežec vyštartoval na tréningový beh. Počas tréningu musí dodržiavať pitný režim, preto si po každých prebehnutých 4 km spraví krátku prestávku a napije sa. 10 minút po tom, ako bežec vyštartoval, ho začne nasledovať jeho kamarát na bicykli a dobehne ho presne na štvrtom kilometri počas prestávky. Ako rýchlo ide cyklista, ak viete že sa pohybuje dvakrát rýchlejšie ako bežec?

$\boxed{4.}$ Inžinieri testovali nový model auta. Na dráhu postavili vedľa seba dva rovnaké prototypy. Obe autá vyštartovali súčasne, najskôr rovnomerne zrýchľovali s so zrýchlením a_1, prvé na rýchlosť v, druhé na rýchlosť $2v$ a nakoniec obe autá spomaľovali s tým istým spomalením a_2 a zastavili v tom istom okamihu. Rovnomerný pohyb prvého auta (idúceho rýchlosťou v) trval dvakrát dlhšie ako jeho zrýchlený pohyb (zrýchľovanie a spomaľovanie spolu). Ako ďaleko od seba zastali autá? Výsledok vyjadrite ako násobok s, čo je dráha, ktorú prešlo „pomalšie“ auto.

$\boxed{5.}$ Vo výške 6 000 kilometrov nad zemským povrchom sa zrazu zhmotní pes v hermeticky uzavretej v kovovej kapsuli (predstavte si ju ako taký 3 metre dlhý elipsoid). Pes ma k dispozicii iba misku so žrádlom, misku s vodou, cikaciu misku, a váhu, na ktorej ma prilepené packy, aby v beztiažovom stave nepoletoval kade-tade. Kovová kapsula začne padať k Zemi s nesmiernou razanciou, až v nej poletujú zvyšky Pedigree. Nás však zaujíma, čo robí vaha. Nakreslite graf, ako sa bude vyvíjať hmotnosť, ktorú váha nameria v závislosti od času (v rôznych fázach pádu). Predpokladajte, že váha je stále „dole“, teda na tej strane kapsule, ktorá je privratená k Zemi.

$\boxed{6.}$ Dve loptičky držíme presne nad sebou vo výškach H a $\frac{1}{2}H$ nad podlahou. Obe necháme v rovnaký moment voľne padať. Ak sa loptičky pružne odrážajú od podlahy, po akom čase od uvoľnenia sa zrazia?

$\boxed{7.}$ Marek je ťažko pracujúci človek. Do práce prichádza 7:05 a pracuje 12 hodín. Koľkokrát počas tohto času predbehne na jeho hodinkách minútová ručička hodinovú?

$\boxed{8.}$ V zime prídeme domov a keďže je nám zima, zakúrime si. Ako sa zmení vnútorná energia vzduchu v miestnosti, keď sa vzduch ohreje z 0 °C na 20 °C? Miestnosť ma objem V, vzduch uvažujeme ako ideálny plyn s mólovou hmotnosťou M. Merné skupenské teplo vzduchu je C_v (teda, toľko Joulov tepla potrebujeme na ohriatie jedného mólu vzduchu pri konštantnom objeme o jeden stupeň Celzia). Atmosférický tlak je p_a a tento tlak je aj v miestnosti počas celého procesu ohrievania.

9. Škodovka zastaví z rýchlosti 100 kilometrov za hodinu na 40 metroch. Za predpokladu, že brzdy brzdia rovnako pri akejkoľvek rýchlosti, na akej vzdialenosti zastaví z rýchlosti $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$?

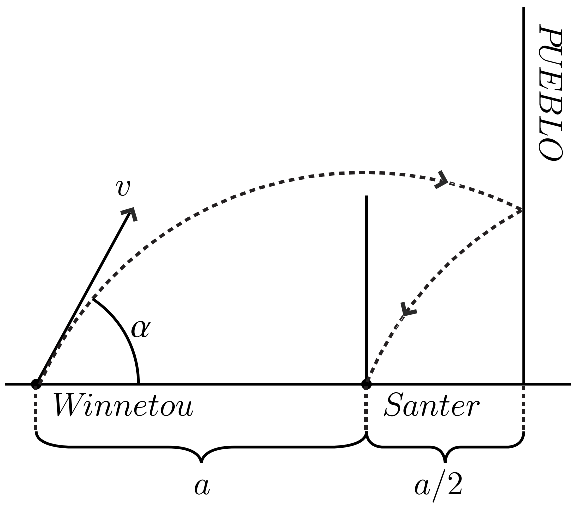
10. Keď sa pozriem do zrkadla, mám „vymenené“ ruky – práva je ľavá a naopak. Dá sa z rovinných zrkadiel spraviť taká konštrukcia, v ktorej sa človek bude vidieť „neprevrátene“, t.j. bude sa nám javiť, že ľavá ruka bude vľavo a pravá vpravo?

11. Janík sa prechádzal nočnou ulicou a všimol si, že ako sa postupne vzďaľuje od lampy pouličného osvetlenia, jeho tieň sa predlžuje. Ak sa Janík pohybuje smerom od lampy rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v, ako sa mení dĺžka jeho tieňa? Janík je vysoký h a výška lampy je $H > h$. Uvažujte len jednu osamelú lampu.

12. Skrutka polomeru R má po dĺžke l N závitov. Aký musí byť minimálny koeficient trenia medzi drevom a skrutkou, aby sa skrutka pri otočení dole hlavičkou sama nevyskrutkovala?

13. Akú periódu rotácie má družica pohybujúca sa po kruhovej trajektórii vo vzdialenosti dvojnásobku geostacionárnej dráhy? Zaujíma nás číselná hodnota výsledku.

14. Plaziaci sa Winnetou chce diaľkovým hodom tomahawkom oskalpovať smradľavého skunka Santera učupeného v päte síce tenkej, no ultra nepriestrelnej štvormetrovej steny ako na obrázku. Jediná možnosť ako to docieliť je odrazom tomahawku od puebla za stenou viď obrázok. Winnetou vie hádzať tomahawk len rýchlosťou $v = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, no vie si zvoliť uhol hodu. Vzdialenosť Winnetoua od ultra nepriestrelnej štvormetrovej steny je $a = 5\,\mathrm{m}$ a jej vzdialenosť od puebla je $\frac{1}{2}a = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Uvažujte tomahawk tvaru hmotného bodu (také najlepšie skalpujú) a dokonale pružnú zrážku s pueblom. Pod akým uhlom α má Winnetou vrhnúť svoj tomahawk, aby vykonal svoj nemilosrdný čin?



15. Aký objem *čistého* kyslíka spotrebuje za deň priemerný dospelý človek? Potrebné údaje skúste odhadnúť. My vám našepkáme, že zatiaľ čo vdychovaný vzduch obsahuje asi 20 objemových percent kyslíka, vydychovaný iba približne 15.

16. Nájdi elektrický odpor medzi dvoma vrcholmi zapojenia, v ktorom je každý z $n > 1$ vrcholov pripojených ku každému ďalšiemu vrcholu odporom R.

17. Aký odber elektriny (wo Wattoch) nám spôsobí nešikovný inštalatér, ktorý strčí prst do zástrčky? Odpor inštalatérovho tela (medzi prstom a chodidlom) je 5 000 Ohmov, odpor jednej jeho topánky je 12 000 Ohmov, v sieti je striedavé napätie 220 Voltov. Inštalatér má „šťastie v nešťastí" – jednou nohou síce stojí na výborne uzemnenej kovovej časti elektrickej rúry, druhú nohu má však vo vzduchu. Koľko z vyrátaného výkonu inštalatéra „trasie"?

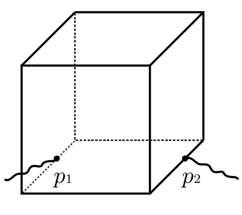
18. Vieme, že pre klasický lineárny harmonický oscilátor (závažie na pružinke), kedy sila závisí od výchylky ako $F = -kx$, perióda kmitov *nezávisí* od počiatočnej výchlylky. Teraz si však predstavme *nelineárny* oscilátor, kde pružinka pôsobí silou $F = -Cx^3$. Nech perióda závažia s hmotnosťou m pri nejakom vychýlení je T_1. Aká by bola perióda jeho pohybu, keby sme počiatočnú výchylku zdvojnásobili?

19. Peťo cestoval vlakom. Všimol si, že okno na vozni je zložené z dvoch sklených tabúľ a pretože nedávno pršalo, bola medzi tabuľami voda do výšky h. Keď sa vlak rozbiehal, zvierala hladina vody uhol α so spodnou hranou okna. Pomôžte Peťovi určiť, s akým zrýchlením sa rozbiehal vlak. Uvažujte, že koľajnice sú vodorovné.

20. Vo vode sa vznáša teleso tak, že 95 % jeho objemu sa nachádza pod vodnou hladinou. Na vodu prilejeme olej s hustotou $\rho_{\mathrm{olej}} = 0{,}9\,\rho_{\mathrm{voda}}$ tak, že zaleje celú kocku. Teleso síce zostane plávať na rozhraní kvapalín, ale časť objemu pod vodnou hladinou sa zmení. Ako?

21. V drôtenom obdĺžnikovom ráme s rozmermi 10 cm × 20 cm natiahneme mydlovú blanu. Keď teraz kratšiu stranu obdĺžnika uvoľníme a začneme ňou hýbať (tak, aby bola stále rovnobežná so svojou pôvodnou pozíciou a tak, aby bola stále v rovine obdĺžnika), môžme poľahky zmenšovať plochu vytvorenej bubliny. Bublina sa prirodzene sťahuje, podobne ako sa sťahuje natiahnutý pružný materiál, napríklad roztiahnutá pružinka (samozrejme, oveľa slabšie). Koľko je Youngov modul pružnosti pre takúto blanu (s danými rozmermi?) Povrchové napätie vody je 0,073 N/m.

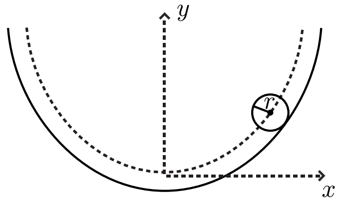
22. Ako to už býva v príkladoch o kocke z drôtu, máme z drôtu s konštantnou dĺžkovou vodivosťou poskladanú sieť kocky. Jedna hrana má odpor R. A ako to už býva v príkladoch o odporoch, chceme vedieť, aký odpor bude mať kocka medzi dvoma vyznačenými bodmi.



$\boxed{23.}$ Na opačných koncoch voľnej pružiny tuhosti k sú upevnené hmotné body s hmotnosťami m_1 respektíve m_2. Aká je vlastná frekvencia takejto pružinky, t.j. aká je frekvencia kmitania v ťažiskovej sústave? Gravitáciu neuvažujte.

$\boxed{24.}$ Vesmírna stanica obieha Zem po kruhovej dráhe s periódou T. Raz pri údržbe stanice došlo k nehode, po ktorej sa opravárenské kladivo zostalo pohybovať po tej istej kruhovej dráhe v malej vzdialenosti d. O koľko musia kozmonauti znížiť rýchlosť stanice, aby kladivo dobehli presne po jednej otočke okolo Zeme?

$\boxed{25.}$ Homogénny disk polomeru r a hmotnosti m sa kotúľa bez prešmykovania v jame takého tvaru, že stred disku opisuje krivku $\frac{1}{2}x^2/h$, kde x je horizontálna výchylka disku a h je konštanta (vid. obr.). Aká je frekvencia kmitov kolesa v jame?



$\boxed{26.}$ Náš mozog si pri určovaní smeru, z ktorého prichádza zvuk, pomáha rozdielom časov, v ktorých ho prijíme pravé a ľavé ucho. Avšak pod vodou je tento údaj skreslený, nakoľko tu sa šíri zvuk inou rýchlosťou. Určte, pod akým uhlom bude „počuť“ potápač zvuk, ktorý k nemu prichádza presne zo strany. Vzdialenosť uší potápača je D, rýchlosť zvuku vo vzduchu c_0, rýchlosť zvuku vo vode c_1 a môžte predpokladať, že mozog je zvyknutý na zdroje zvuku, ktoré sú od neho oveľa ďalej ako vzdialenosť D.

$\boxed{27.}$ Máme biliardový stôl tvaru rovnostranného trojuholníka a v jednom z jeho vrcholov guľu. Tú pošleme pod uhlom θ vzhľadom na jednu zo stien stola a po presne 2011 odrazoch sa nám po prvý krát vráti naspäť do toho istého vrcholu. Aký je tento uhol, ak viete, že je to najmenší možný uhol, pre ktorý to môže nastať? Stôl je dosť veľký na to, aby sa guľa odrážala podľa zákona odrazu ľubovoľne blízko k vcholu.

$\boxed{28.}$ Zdroj svetla má v nejakom bode P intezitu I. Akú intezitu bude mať svetlo po tom, ako pridáme veľké rovinné zrkadlo tak, že zdroj bude presne medzi bodom a zrkadlom?

$\boxed{29.}$ Pri vzdialenej hviezde sa formuje osamotená planéta. Po vychladnutí sa polomer planéty zmrští o jednu n-tinu, $\frac{1}{n} \ll 1$. V dôsedku toho sa deň skráti o jednu m-tinu. Koľko je m?

$\boxed{30.}$ Janke prihorel čaj (odparila sa jej všetka voda), ktorý si varila v čajníku s pevnou pokrievkou tvaru dutej polgule s polomerom $r = 5\text{cm}$ a hmotnosti $m = 0{,}1\text{kg}$. Horúcu pokrievku pod ktorou ostal horúci vzduch s teplotou $T_1 = 373\text{K}$, preložila na jej dlhý naklonený kuchynský stôl so sklonom $\alpha = 30^\circ$ (montoval ho jej neschopný frajer). Pokrievka sa začala šmýkať smerom nadol, najprv zrýchľovala, no po nejakom čase sa jej pohyb ustálil na konštantnej rýchlosti. Akú teplotu T_2 má miestnosť? Koeficient trenia medzi pokrievkou a stolom je $f = 3 \times \times 10^{-3}$. Zanedbajte odpor vzduchu, uvažujte štandardný atmosférický tlak a ideálne správanie sa vzduchu.

31. Osem bodov tvoriach vrcholy kocky spojíme každý s každým odporom R. Aký je odpor tejto schémy po telesovej uhlopriečke?

32. Aký je moment zotrvačnosti homogénneho kusu melónu okolo jeho ostrej hrany? Hmotnosť kusu melónu je M, polomer pôvodného melónu je R, uhol výrezu α.

33. Uvažujte trojuholník so stranami so stranami 50, 60 a 50. Nájdite taký bod, ktorého súčet vzdialeností od každého z vrcholov trojuholníka je najmenší.

Vzorové riešenia

$\boxed{1.}$ Práca, ktorú pri brzdení vykonala brzdná sila musí byť rovnaká ako kinetická energia, ktorú malo pohybujúce sa auto.

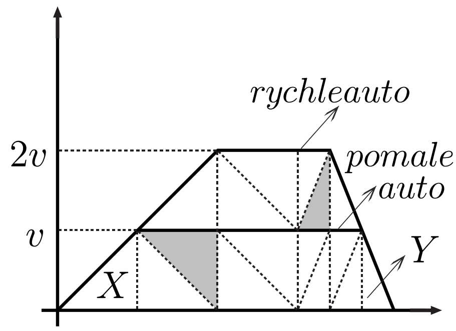
$$Fd = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad F = \frac{mv^2}{2d}$$

Prípadne sme mohli vypočítať spomalenie auta najskôr z Newtnovho zákona $a = \frac{F}{m}$ a potom z rovnomerne spomaleného pohybu $a = \frac{v^2}{2d}$. Porovnaním týchto dvoch výrazov dostávame, prirodzene, rovnaký výsledok ako prvým spôsobom.

$\boxed{2.}$ Úlohu vyriešime pomocou úvah o hybnosti. Celková hybnosť sústavy je $p = m_1v_1 + m_2v_2 = 650\,\mathrm{t\,km/h}$. Zároveň platí, že $p = v_\mathrm{t}m_\mathrm{celk}$ (súčin rýchlosti ťažiska a hmotnosti celej sústavy). Preto $v_\mathrm{t} = p/m_{celk} = 130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Keďže v procese zrážania sa hybnosť zachováva, je to zároveň aj rýchlosť pohybu zrazeniny.

$\boxed{3.}$ Keďže cyklista ide dvakrát rýchlejšie ako bežec, v momente keď cyklista vyštartoval, prebehol bežec polovicu z dohodnutých štyroch kilometrov. Pohybuje sa teda rýchlosťou $12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ a cyklista ide rýchlosťou $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

$\boxed{4.}$ Úlohu budeme riešiť nakreslením grafu závislosti rýchlosti od času. Vieme, že v takomto grafe je dráha, ktorú prejde auto daná plochou pod grafom. Po troche premýšľania budú grafy pre obe autá vyzerať nasledovne.



Vidíme, že sú tvorené dvoma druhmi trojuholníkov. Ak plochu jedného označíme x a plochu druhého y, potom dráha ktorú prešlo pomalšie auto je $5(x + y)$. Dráha, ktorú prešlo rýchlejšie auto je $8(x + y)$. Rozdiel dráh, a teda aj vzdialenosť, o ktorú zastane rýchlejšie auto pred pomalším je $3(x + y) = \frac{3}{5}s$.

$\boxed{5.}$ V prvom momente váha ukazuje 0. Na psa síce pôsobí gravitácia, kapsula však pod jeho packami však zrýchľuje presne takým zrýchlením ako on. Pri vstupe do atmosféry ukáže váha mnohonásobné preťaženie. Kapsula totiž prudko brzdí, a toto sa cez váhu musí prenášať aj na psa. Potom kapsula zhorí, takže váha už neukáže nič – keby však nezhorela, došlo by k ustáleniu pohybu v ktorom by váha ukázala presne hmotnosť psa.

$\boxed{6.}$ Keďže sa po uvoľnení obe loptičky pohybujú so zrýchlením g nadol, ich vzdialenosť sa nebude meniť a zostane $\frac{1}{2}H$. Čas, za ktorý spodná loptička dopadne je $T = \sqrt{H/g}$. Po odraze bude mať spodná loptička rýchlosť $gT = \sqrt{Hg}$ nahor a horná loptička rýchlosť $\sqrt{Hg}$ nadol. Vo vzťažnej sústave spojenej s hornou loptičkou sa tá spodná bude pohybovať rýchlosťou $2\sqrt{Hg}$ bez akéhokoľvek zrýchlenia, opäť pretože obe zrýchľujú k zemi rovnakým zrýchlením. Stretnú sa teda po čase

$$T' = \frac{H/2}{2\sqrt{gH}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{H}{g}}$$

Celkový čas je potom

$$T + T' = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{H}{g}}$$

Tento výsledok by však mohlo čosi pokaziť. Vo vzťažnej sústave hornej loptičky je totiž ešte podlaha, ktorá sa v momente odrazu pohybuje rýchlosťou $\sqrt{Hg}$ smerom k hornej loptičke a zrýchľuje tým smerom so zrýchlením g. Ak by dohnala spodnú loptičku skôr, ako sa loptičky zrazia, všetko by sa skomplikovalo. Overíme ale, že sa tak nestane.

Za čas t prejde spodná loptička dráhu $2t\sqrt{Hg}$ a podlaha dráhu $t\sqrt{Hg} + \frac{1}{2}gt^2$. Tieto dve dráhy sa rovnajú pre $t = 0$, čo je moment prvého odrazu, a pre $t = 2\sqrt{H/g}$, čo je bezpečne viac ako T'. Takže sa nemusíme obávať, že podlaha spodnú loptičku dobehne a pokazí náš výsledok.

Skúste nad príkladom porozmýšľať v sústave spojenej s podlahou, ako by ste tu ukázali, že loptičky sa zrazia skôr, ako spodná druhý krát spadne na zem.

$\boxed{7.}$ Hodinová ručička obehne ciferník jeden raz za 12 hodín, minútová dvanásťkrát. Ak by hodinová ručička stála, minútová by okolo nej prešla dvanásť razy, počas každej hodiny raz. Avšak hodinová ručička sa hýbe, uteká pred minútovou a tým jedným obehom, ktorý spraví, zabráni jednému predbehnutiu (medzi 12:05 a 13:05 nenastane). Preto je počet predbehnutí 11.

$\boxed{8.}$ Pre jednoduchosť si predstavme, že vzduch sa ohreje na dvojnásobok svojej termodynamickej teploty. Jeho vnútorná energia by teda mala vzrásť na dvojnásobok. *Ale pozor!* Kvôli rozpínavosti by vzduch potreboval zaujať miesto s dvojnásobným objemom. Keďže miestnosť sa však nenafukuje, prebytočný vzduch – bude ho presne polovica – utečie. Preto ohriatím na dvojnásobok sa s vnútornou energiou plynu v miestnosti nestane nič. V zadaní síce hovoríme o menej výraznom oteplení, je však zrejmé, že podobná úvaha by sa dala použiť aj preň.

$\boxed{9.}$ Brzdové piestiky sa zahryznú do kotúčov a nútia auto spomaľovať rovnomerne. To znamená, že pre okamžitú rýchlosť počas brzdenia platí $u = v - at$, kde v je počiatočná rýchlosť. Auto zastaví za čas $t = v/a$ a pre dráhu platí $s = \frac{1}{2}at^2$. Z toho dostávame

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

Ak v_0 je $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ a s_0 je $40\,\mathrm{m}$, tak pre novú dráhu s brzdenia z rýchlosti $2v_0$ máme

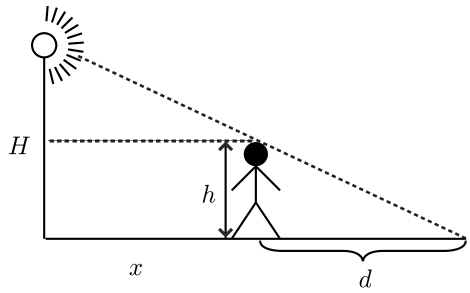
$$s = \frac{(2v_0)^2}{2a} = 4\frac{v_0^2}{2a} = 4s_0$$

Škodovka teda z dvestovky zabrzdí na 160 metroch.

$\boxed{10.}$ Napríklad umiestnime dve zrkadlá umiestnené do tvaru písmena L. Jeden z obrazov sa potom „preklopí“ dva krát a ruky sa dostanú na správne miesto.

$\boxed{11.}$ Keď Janík stojí vo vzdialenosti x od lampy, je jeho tieň dlhý d. Dĺžku tieňa dostaneme z podobnosti trojuholníkov:

$$\frac{d}{h} = \frac{x}{H-h} \Rightarrow d = \frac{h}{H-h}x$$



Janík sa pohne o nejakú krátku vzdialenosť Δx, čím sa dĺžka tieňa zmení na

$$\frac{h}{H-h}(x+\Delta x) = \frac{h}{H-h}x + \frac{h}{H-h}\Delta x$$

Zmena dĺžky tieňa je

$$\Delta d = \frac{h}{H-h}\Delta x$$

Vzdialenosť Δx prešiel Janík za čas Δt, predchádazjúcu rovnicu vydelíme týmto časom, uvedomíme si, že $\Delta x/\Delta t$ je rýchlosť v pohybu Janíka a pre zmenu dĺžky tieňa za čas dostaneme

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{h}{H-h}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{h}{H-h}v$$

Tieň sa teda predlžuje rovnomerne s rýchlosťou veľkosti $hv/(H-h)$.

$\boxed{12.}$ Závity skrutky môžeme rozvinúť, čím dostaneme naklonenú rovinu so sklonom

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{2\pi NR}\,.$$

Vyťahovanie skrutky si potom možno predstaviť ako šmýkanie sa dvoch takýchto naklonených rovín po sebe, pričom uhol α je uhol sklonu spodnej naklonenej roviny. Potom po rozklade síl dostávame rovnicu

$$mg\sin\alpha = mgf\cos\alpha\,,$$

kde m, ktoré vypadne, je hmotnosť skrutky. Z toho dostávame podmienku pre koeficient trenia

$$f = \operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{2\pi NR}\,.$$

$\boxed{13.}$ Na družicu pôsobí gravitačná sila, ktorá je rovná dostredivej, čo pre kruhovú trajektóriu znamená

$$m\omega^2 r = \frac{\kappa M m}{r^2}$$

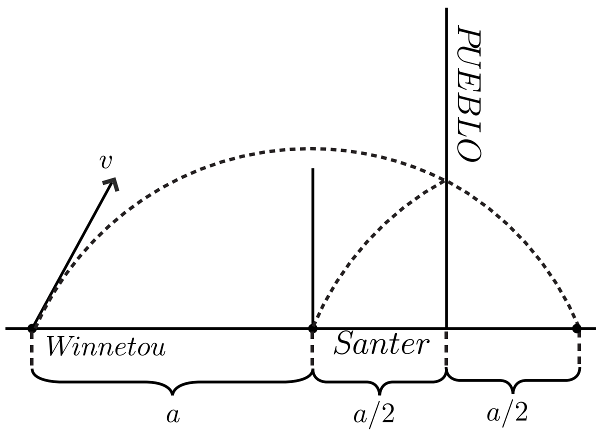
kde $\omega = 2\pi/T_0$ je uhlová frekvencia rotácie. Teda perióda obehu T_0 je

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\kappa M}}$$

Pre družicu pohybujúcu sa po geostacionárnej dráhe je táto perióda 24 hodín. V prípade dvojnásobnej vzdialenosti to je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(2r)^3}{\kappa M}} = 2T_0\sqrt{2} \approx 67{,}9\,\mathrm{h}$$

$\boxed{14.}$ Stačí si uvedomiť, že pri dokonale pružnej zrážke horizontálna zložka rýchlosti $v_x = v\cos\alpha$ zmení smer na opačný, no jej veľkosť ostane rovnaká. Vertikálna zložka rýchlosti $v_y = v\sin\alpha$ sa nezmení, takže kým tomahawk dopadne, nalieta rovnakú dráhu ako keby mu žiadne pueblo v ceste nestálo.



Winnetou musí teda hádzať pod takým uhlom, ako keby mieril na Santera schovaného $\frac{1}{2}a$ za pueblom. Viď obrázok. To je obyčajný šikmý vrh a ten zrátať vieme: čas dopadu tomahawku je z rovnice $-\frac{1}{2}gt^2 + v_y t = 0$ daný vzťahom $t = 2v_y/g$. Za tento čas nalieta horizontálnu dráhu $2a = a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$ (od Winnetoua po stenu, od steny po pueblo od puebla po Santera). Teda musí platiť: $2a = v_x t$. Keď dosadíme za t, v_x a v_y a využijeme goniometrickú identitu $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, dostaneme podmienku na uhol

$$\sin 2\alpha = \frac{2ag}{v^2},$$

Odtiaľ už poľahky po dosadení čísel máme $\alpha = 12{,}925\,°$. Ale pozor! Je tento uhol dosť veľký na prekonanie síce tenkej no ultra nepriestrelnej štvormetrovej steny? Jednoduchý výpočet (na domácu úlohu) – stačí overiť, či dosiahnutá výška trajektórie tomahawku v mieste štvormetrovej steny je väčšia ako 4 m. Zistíme, že veru nie. To znamená, že mať Winnetou trochu menej indiánskeho umu, by po hodení svojho projektilu prekvapivo oskalpoval sám seba. Riešenie teda je: pri daných pozíciách a danej rýchlosti taký uhol aby oskalpoval Santera neexistuje!

$\boxed{15.}$ Na úvod si treba ozrejmiť podstatnú vec. Objem pľúc je síce až 6 litrov, ale človek pri typickom výdychu vydá iba pol litra. Ak neveríte, skúste si vziať mikroténový sáčok a pokojne doň dýchajte. Rovnako tak pri nadýchnutí človek príjme iba pol litra vzduchu, ktorý sa následne premieša s vyše piatimi litrami vzduchu v pľúcach.

Tento polliter vzduchu vdýchne človek typicky každých 3 až 5 sekúnd, t.j. $N = 12$ až 20 krát za minútu. Ak uvážime, koľko minúť ma jeden deň, tak pľúcami človeka za deň prejde

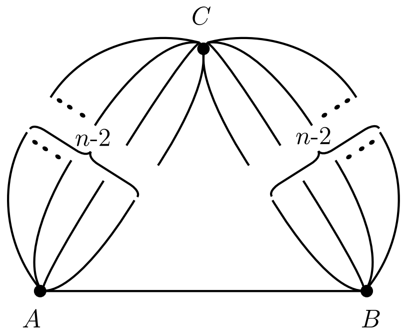
$$V = 0{,}5\,\mathrm{l} \cdot N \cdot 60 \cdot 24 = 8\,640 \text{ až } 14\,400\,\mathrm{l},$$

Spotrebovaný kyslík tvorí z celkového vzduchu iba zlomok $0{,}20 - 0{,}15 = 0{,}05$ objemu. Zdravý dospelý človek tak za deň spotrebuje

$$V_{\text{kyslík}} = 0{,}05V = 432 \text{ až } 720\,\text{litrov kyslíka},$$

Pre porovnanie, americká NASA udáva typickú dennú spotrebu kyslíka 0,89 kg, čo zodpovedá asi 590 litrom – hodnota zo stredu nami nájdeného intervalu. Vzhľadom na odhady, ktoré pri riešení treba spraviť, sme ako správnu odpoveď uznávali väčši interval 300 až 1 000 litrov kyslíka denne.

$\boxed{16.}$ Označme si dva vrcholy medzi ktorými meriame odpor ako A a B. Je jedno ktoré dva vrcholy si takto označíme, lebo všetky vrcholy sú navzájom ekvivalentné (každý je pripojený ku každému rovnakým odporom R). Z tejto symetrie aj vyplýva, že ak zapojíme vrcholy A a B na nejaké napätie, potenciál na všetkých ostatných $n-2$ vrcholoch bude navzájom rovnaký. To znamená, že všetých týchto $n-2$ vrcholov môžeme nahradiť jedným vrcholom, označme ho C, z ktorého vychádza $n-2$ paralelne zapojených rezistorov do A a toľko isto aj do B. Nezabudnime, že je ešte jeden rezistor medzi A a B. Výsledná schéma vyzerá takto viď obr.



Odpor zrátame štandardne. Odpor $n-2$ paralelných rezistorov medzi A a C je $R/(n-2)$. Taký istý je aj odpor vetvy medzi B a C. Tieto dve vetvy sú navzájom spojené sériovo, takže spolu majú odpor $2R/(n-2)$. Toto je paralelne pripojené s odporom R, takže celkový odpor R_c vypočítame ako

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R},$$

Dostávame $R_c = 2R/n$. Rýchlo si môžeme ešte výsledok overiť pre jednoduché prípady, ktorých graf vieme aj ľahko nakresliť a spočítať $n = 2$ ($R_c = R$) resp. $n = 3$ ($R_c = 2R/3$), ktoré sedia s očakávanými hodnotami.

17. Celkový prúd pretekajúci inštalatérom je

$$\frac{220}{5000 + 12000}\,\mathrm{A} = 0{,}013\,\mathrm{A}\,.$$

Tento prúd spôsobí na celkovom odpore $17\,000\,\Omega$ výkon asi $I_2 R_{\mathrm{celk}} = 2{,}8\,\mathrm{W}$ z čoho na inštalatéra pripadá iba $I_2 R_{\mathrm{inst}} = 0{,}84\,\mathrm{W}$, čo je ani nie jedno percento bežného výkonu jeho tela. Prečo potom ten chlapík tak ziape?

18. Uvedomíme si, že sa od nás nevyžaduje presný výraz pre periódu, ale len závislosť od výchylky x_0. Nemusíme preto riešiť žiadne pohybové rovnice, stačí použiť rozmerovú analýzu. Je zrejmé, že celá informácia o pohybe je ukrytá vo veličinách m, x_0 a C, z ktorých potrebujeme vyskladať jednotku periódy – sekundu. Jednotkou hmotnosti je kilogram, výchylky meter a jednotku „tuhosti“ pružiny C dostaneme zo vzťahu $F = -Cx^3$.

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = [C]\mathrm{m}^3$$

$$[C] = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-2}}$$

Z veličin m, x_0 a C sa sekunda objavuje iba v C a to ako s^{-2}, teda aby sme dostali periódu v sekundách, musí byť úmerná $C^{-1/2}$. V $C^{-1/2}$ sa vyskytuje meter v prvej mocnine. Pretože v jednotke periódy meter nemá byť a z ostatných parametrov je iba v x_0, je jediný spôsob, ako sa ho zbaviť delenie x_0.

$$T \propto {x_0}^{-1},$$

Zdvojnásobenie amplitúdy teda znamená *polovičnú* periódu kmitov. Podobne by sme vedeli zistiť, že pri sile $F = -kx$ perióda nezávisí od počiatočnej výchylky.

19. Keď vlak stojí alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro, pôsobí na vodu v okne iba tiažová sila, hladina je vodorovná, kolmo na smer tiažového zrýchlenia. Vo vlaku zrýchľujúcom so zrýchlením a pôsobí na vodu aj zotrvačná sila proti smeru zrýchlenia vlaku. Na nejaký objemový element vody pri hladine hmotnosti m pôsobí celková sila daná vektorovým súčtom tiažovej sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\boldsymbol{g}$ a zotrvačnej sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{z} = -m\boldsymbol{a}$. Túto silu možno rozdeliť na dve zložky, zložku kolmú na hladinu a zložku rovnobežnú s hladinou. Sila kolmá na hladinu je kompenzovaná reakčnou silou od zvyšku vody. Sila rovnobežná sa hladinou bude posúvať objemové elementy vody pozdĺž hladiny, čím sa zmení tvar hladiny. Výsledný tvar hladiny bude taký, že na každý objemový element hladiny bude pôsobiť len sila kolmá na hladinu, teda hladina bude kolmá na efektívne zrýchlenie $\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. Pre uhol, ktorý zviera hladina s vodorovným smerom platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}$$

Z čoho máme pre zrýchlenie vlaku

$$a = g \operatorname{tg}\alpha$$

20. Než sa pustíme do počítania, premyslime si, čo asi tak od výsledku môžeme očakávať. Po doliatí oleja začne pôsobiť vztlaková sila aj na tých 5 % objemu telesa nad vodou, čo znamená silu navyše *smerom nahor*. Tá naruší pôvodnú rovnováhu tiaže a vztlaku, a spôsobí, že teleso sa trochu posunie nahor. Zlomok objemu vo vode sa teda *zmenší* na novú hodnotu x.

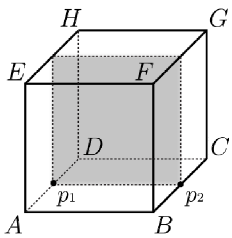
Kvalitatívne už vieme, čo sa stane – stačí len naše myšlienky prepísať do rovníc. Pred aj po doliatí pôsobí na teleso vztlaková sila, ktorá kompenzuje tiaž. V oboch situáciach je teda rovnaká, t.j.

$$\begin{aligned} F_{\text{vz, pred doliatím}} &= F_{\text{vz, po doliatí}} \\ 0{,}95V\rho_{\text{voda}}g &= xV\rho_{\text{voda}}g + (1-x)V(0{,}9\rho_{\text{voda}})g \\ 0{,}95 &= x + 0{,}9(1-x), \end{aligned}$$

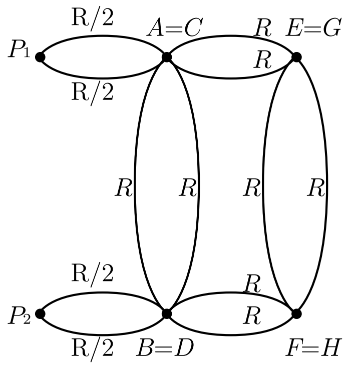
odkiaľ máme pre zlomok objemu $x = 0{,}5$. To znamená, že teleso bude po doliatí oleja vo vode ponorené iba polovicou svojho objemu.

21. Blana nemá dobre definovanú veličinu, ako Youngov modul ani tuhosť. Dôvodom je, že tieto veličiny popisujú materiály, ktoré sa sťahujú tým prudšie, čím viacej ich roztiahneme. Naopak, blana sa sťahuje konštantou silou bez ohľadu na natiahnutie.

22. Ako to už býva v príkladoch o odporoch, budeme rozpájať a spájať. Inak povedané, ak v nejakej sieti majú dva body rovnaký potenciál, beztrestne ich môžeme spojiť, odpor siete nezmeníme. Tým sme medzi tieto dva body vložili dokonalý vodič, ale keďže tieto body majú rovnaký potenciál, týmto vodičom prúd aj tak nepotečie a nič sa nezmenilo. Podobne, ak je medzi dvomi bodmi s rovnakým potenciálom zapojený nejaký vodič, beztrestne ho môžeme zo siete vyškrtnúť. Aj tak ním žiaden prúd netiekol.



Silným nástrojom na odhaľovanie bodov s rovnakým potenciálom je symetria siete. Ak má totiž sieť nejakú symetriu, body, ktoré sa zobrazia jeden na druhý, musia mať rovnaký potenciál. Pozrieme sa teraz na našu kocku a vidíme, že zapojenie je zrkadlovo symetrické so zvislou rovinou symetrie prechádzajúcou bodmi zapojenia. Dvojice bodov $A-D, B-C, E-H, F-G$ majú teda rovnaké potenciály a môžme s nimi robiť triky. Keď tieto dvojice spojíme, dostaneme sieť ako na obrázku, ktorá je už iba kombináciou sériových a paralelných zapojení. A to je už jednohubka.



$$\tfrac{1}{4}R + (\tfrac{2}{3}R^{-1} + 2R^{-1})^{-1} + \tfrac{1}{4}R = \tfrac{7}{8}R$$

23. V ťažiskovej sústave (viď. obr.) výchylky jednotlivých závaží v hociktorom čase, musia spĺňať nasledovnú rovnicu $m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0$, aby sa ťažisko (T) nepohybovalo. Odtiaľ

$$\Delta x_1 = -\frac{m_2}{m_1}\Delta x_2,$$

Vidíme, že Δx_1 má opačné znamienko ako Δx_2 teda, že závažia sa v tejto sústave vždy hýbu opačným smerom, čo je celkom prirodzené.

Sila, ktorá medzi závažiami pôsobí, je úmerná celkovému natiahnutiu pružiny: $\Delta x_2 - \Delta x_1$ (mínus, lebo výchylky majú opačné znamienka). Sila je teda rovná $F = -k(\Delta x_2 - \Delta x_1)$. No na túto silu sa môžeme pozrieť aj inak: Keď si všímame len závažie m_2, vyzerá to akoby kmitalo na pružine uchytenej v bode T a tuhosti nazvime ju k_2. Frekvencia tohoto kmitania je zrejme

$$f = 2\pi\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

(viď. učenbica fyziky). Skôr ako vypočítame k_2, všimnime si, že toto f je aj frekvencia kmitania celej sústavy. Ak by totiž m_1 kmitalo s inou frekvenciou, rovnica pre Δx_1 by neplatila v každom čase (t.j. po nejakom čase by sa závažia ocitli vo fáze a ťažisko by nebolo v pokoji, čo je v spore s výberom ťažiskovej sústavy). Aká je teda tuhosť k_2? Sila, ktorá vynucuje kmitanie musí byť rovná $-k_2\Delta x_2$, ale je to zároveň aj sila F. Z tejto rovnosti $-k(\Delta x_2 - \Delta x_1) = -k_2\Delta x_2$ po dosadení Δx_1 dostaneme

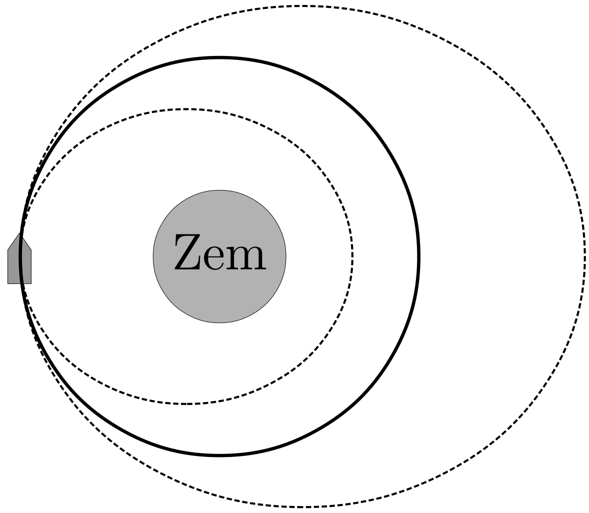
$$k_2 = k\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$$

Po dosadení do vzťahu pre výpočet f dostávame frekvenciu kmitania v tvare:

$$f = 2\pi\sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}},$$

Výsledok dáva zmysel. Napríklad ak uvažujeme $m_2 \gg m_1$ ba priam až $m_2 \to \infty$, dostaneme $f = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$, teda štandardný učebnicový výsledok.

$\boxed{24.}$ Najprv sa zamyslime, prečo majú kozmonauti vlastne *znížiť* rýchlosť. Intuícia pozemského života nám predsa vraví, že na dobehnutie dačoho treba rýchlosť zvýšiť. Avšak akokoľvek zvláštne to znie, zadanie sa nemýli a kozmoanuti musia naozaj spomaliť. Pointa tkvie v tom, že po zmene rýchlosti sa zmení dráha po ktorej sa vesmírna stanica bude pohybovať. Aby sme si to vedeli lepšie predstaviť, nakreslíme si obrázok.



Vesmírna stanica sa pohybuje po kruhovej dráhe, ktorá je na obrázku zakreslená plnou čiarou. Ak kozmonautí zvýšia rýchlosť stanice, tá unikne do väčšej vzdialenosti od Zeme. Možná dráha je zakreslená veľkou prerušovanou elipsou. Hlavná polos opísanej elipsy bude väčšia ako polomer pôvodnej dráhy, čo podľa tretieho Keplerovho zákona znamená zväčšenie obežnej doby. Naopak, zmenšenie rýchlosti povedie k pohybu po menšej zakreslenej elipse s menšou hlavnou polosou, čo podľa Keplera povedie zmenšeniu obežnej dráhy. *Presne toto* je cieľom kozmonautov – skrátiť obežnú dobu, aby kladivo dobehli.

Koniec chvíľky umeleckej reči, poďme na riešenie. Aby posádka kladivo dobehla, musia spraviť obeh okolo zeme za čas $T-\Delta t$, kde $\Delta t = d/v$, kde zase v je rýchlosť pohybu vesmirnej stanice okolo Zeme. Rýchlosť v možno určiť z rovnosti odstredivej a gravitačnej sily, no nebudeme to robiť.

Z tretieho Keplerovho zákona zistíme, aká musí byť dĺžka polosi elipsy, ak sa obežná doba skrátila o Δt. Platí

$$\begin{aligned}\frac{T^2}{r^3} &= \frac{(T-\Delta t)^2}{(r-\Delta a)^3}\\ \left(1-\frac{\Delta a}{r}\right)^3 &= \left(1-\frac{\Delta t}{T}\right)^2\\ 3\frac{\Delta a}{r} &= 2\Delta t T\end{aligned}$$

kde sme využili, že pre $|x| \ll 1$ platí $(1+x)^n \approx 1+nx$. Výsledok si odložme a rozmýšľajme ďalej.

Zaujíma nás, o koľko treba zmenšiť rýchlosť, aby sa hlavná polos elipsy skrátila z r na $r-\Delta a$, t.j. aby vzdialenosť vesmírnej stanice v perigeu bola $2(r-\Delta a)-r=r-2\Delta a$. Tu nám pomôžu zákony zachovania. Zo zachovania energie (ZZE) máme

$$\frac{1}{2}m(v-\Delta v)^2-\frac{GM_\mathrm{z}m}{r}=\frac{1}{2}mu_\mathrm{per.}^2-\frac{GM_\mathrm{z}m}{r-2\Delta a},$$

kde $u_\mathrm{per.}$ je rýchlosť stanice v perigeu. Zo zachovania momentu hybnosti ďalej vieme

$$m(v-\Delta v)r=mu_\mathrm{per.}(r-2\Delta a)\qquad\Rightarrow\qquad u_\mathrm{per.}=(v-\Delta v)\frac{r}{r-2\Delta a},$$

Tento výsledok možno dosadiť do ZZE. Ak navyše celú rovnicu predelíme $\frac{m}{2}$ dostaneme

$$(v-\Delta v)^2-\frac{2GM_\mathrm{z}}{r}=(v-\Delta v)^2\left(\frac{r}{r-2\Delta a}\right)^2-\frac{2GM_\mathrm{z}}{r-2\Delta a},$$

Zostáva už len vyjadriť $v-\Delta v$ a upravovať. Zavrieme oči a píšeme

$$\begin{aligned}(v-\Delta v)^2\frac{r^2-(r-2\Delta a)^2}{(r-2\Delta a)^2}&=2GM\left(\frac{1}{r-2\Delta a}-\frac{1}{r}\right)\\(v-\Delta v)^2\frac{4\Delta a(r-\Delta a)}{(r-2\Delta a)^2}&=2GM\frac{2\Delta a}{r(r-2\Delta a)}\\v-\Delta v&=\sqrt{\frac{GM}{r}\frac{r-2\Delta a}{r-\Delta a}},\end{aligned}$$

Stále nie sme na konci. Posledný výsledok možno pre $\Delta a\ll r$ zjednodušiť opäť pomocou $(1+x)^n\approx a+nx$. Konkrétne využijeme

$$\left(1-\tfrac{2\Delta a}{r}\right)^{1/2}\approx 1-\tfrac{\Delta a}{r}\qquad\left(1-\tfrac{\Delta a}{r}\right)^{-1/2}\approx 1+\tfrac{\Delta a}{2r}\qquad\left(1-\tfrac{\Delta a}{r}\right)\left(1+\tfrac{\Delta a}{2r}\right)\approx 1-\frac{\Delta a}{2r},$$

Po dosadení máme

$$v-\Delta v=\sqrt{\frac{GM}{r}}\left(1-\frac{\Delta a}{2r}\right),$$

Keďže pre $\Delta a=0$ očakávame aj $\Delta v=0$, v odmocninovom prefaktore spoznávame obežnú rýchlosť v, čo sa dá ľahko overiť z rovnováhy síl spomínanej na začiatku výpočtov.

Ak si teraz spomenieme na súvis zmeny dĺžky polosy so zmenou obežnej doby, výsledok sa nám napokon objaví pred očami

$$\Delta v=v\frac{\Delta a}{2r}=v\frac{\Delta t}{3T}=\frac{d}{3T},$$

Výsledok je naozaj až taký jednoduchý.

$\boxed{25.}$ Frekvenciu určíme z energií. Ak by sme mali jednoduchý harmonický oscilátor, s potenciálnou energiou $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ a kinetickou $\frac{1}{2}mv^2$, frekvencia by bola $2\pi\sqrt{k/m}$. Ak náš systém má energiu, ktorá vyzerá rovnako (rovnaká funkčná závislosť na súradnici a rýchlosti), len s nejakou inou hmotnosťou m_2 a tuhosťou k_2, frekvencia bude $2\pi\sqrt{k_2/m_2}$, pretože rovnaké rovnice majú rovnaké riešenia.

Potenciálna energia disku pri horizontálnej výchylke x je

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{mg}{h}x^2$$

Vidíme že rolu tuhosti k_2 tu má konštanta mg/h. Kinetická energia je súčtom posuvnej a rotačnej kinetickej energie

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

kde $I = \frac{1}{2}mr^2$ je moment zotrvačnosti disku a ω je jeho uhlová rýchlosť. Vo výraze pre kinetickú energiu sme zanedbali pohyb v horizontálnom smere, ktorého kinetická energia je zanedbateľná voči zvyšným dvom členom (rozmyslite si, prečo). Keďže sa disk neprešmykuje, pre uhlovú rýchlosť platí $\omega = v/r$. Kinetickú energiu môžeme potom vyjadriť v tvare

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mv^2$$

Úlohu hmotnosti m_2 tu teda hrá konštanta $3m/2$. Frekvencia kmitov je potom $2\pi\sqrt{\frac{2g}{3h}}$.

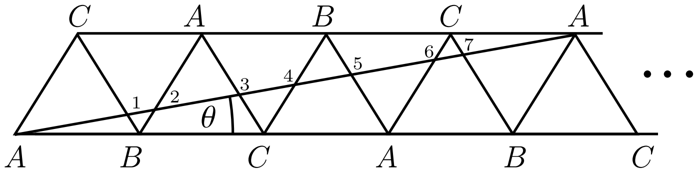
$\boxed{26.}$ Situácia pod vodou sa je takáto: potápač počuje zvuk prichádzajúci priamo zo strany v jednom uchu o $\Delta t_1 = D/c_1$ neskôr ako v druhom uchu.

Vo vzduchu je situácia taká, ako na obrázku. Keďže zdroj zvuku je veľmi ďaleko, môžme 'lúče' zvuku prichádzajúce do pravého a ľavého ucha považovať za rovnobežné. Zvuk prichádza pod uhlom θ a rozdiel vzdialeností, ktoré musí prekonať cestou k jednému a druhému uchu, je $D\cos\theta$ Rozdiel časov bude v tomto prípade $\Delta t_0 = D\cos\theta/c_0$.

Telo však nerozumie tomu, že je pod vodou a rozdiel časov Δt_1 bude interpretovať ako rozdiel časov Δt_0 pre taký uhol θ, že $\Delta t_1 = \Delta t_0$. Z toho dostávame

$$\cos\theta = \frac{c_0}{c_1}$$

$\boxed{27.}$ Označme vrcholy stola A, B, C, pričom na začiatku je guľa vo vrchole A. Základnou myšlienkou nášho riešenia bude nasledovné pozorovanie. Ak si za stenou stola predstavíme ďalší stôl, ktorý je zrkladlovým obrazom toho pôvodného, guľa sa pri odrazoch bude pohybovať tak, akoby tam stena nebola a guľa pokračovala v pohybe po novom, fiktívnom stole. Takáto séria zrkadlových stolov je na obrázku aj s označením patričných vrcholov, pričom pôvodný stôl je úplne naľavo.



Na obrázku je tiež nakreslená dráha gule, ktorú sme poslali, ako v zadaní, pod uhlom θ vzhľadom na stenu AB. Každé pretnutie niektorej z úsečiek znamená odraz od steny. Tiež chceme, aby guľa docestovala späť do bodu A. Presne to sa stane v situácii na obrázku a to na 7 odrazov. Teraz zostáva už len nájst uhol θ, pre ktorý guľa docestuje do bodu A a pretne niektorú zo stien 2011 krát.

Samozrejme, že obrazy trojuholníka ABC vypĺňajú celú rovinu a môže existovať riešenie, ktoré spĺňa naše zadanie a dráha gule neleží v páse trojuholníkov, ktorý sme nakreslili. Je však zrejmé, že ak v ňom existuje riešenie, potom žiadne iné nemá uhol θ menší.

Vidíme, že vrcholy A, B, C tvoria v hornom rade peknú postupnosť. Tiež vidíme, že guľa pri ceste do prvého z vrcholov A v tejto postupnosti, pretne jednu stenu. Pri ceste do ďalšieho pretne o 6 stien viac. A pri ceste do každého ďalšieho vrcholu A pretne o ďalších 6 stien viac. Ak teda namierime do k-teho vrcholu A v postupnosti, guľa pretne $6k+1$ stien. Nie je prekvapením, že existuje také k, pre ktoré je toto číslo rovné 2011, a to pre $k = 335$. Uhol θ potom môžme nájsť z pravouhlého trojuholníka so stranami $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a $(3k+1,5)a = 1006,5k$. Toto číslo sme našli ako počet hrán v postupnosti na ceste ku k-temu vrcholu A. Dostávame

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2013} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 0{,}0493^\circ \approx 2{,}96'$$

$\boxed{28.}$ Pri riešení príkladu si budeme musieť spomenúť na to, že intenzita svetelného zdroja klesá s druhou mocninou vzdialenosti. Názorne si to možno predstaviť tak, že svetlo sa šíri zo zdroja s guľovou symetriou, pričom intenzita sa rozdeľuje rovnomerne po povrchu gule. Keďže rovnaké „množstvo“ svetla sa rozdeľuje na stále väčšiu guľu, intenzita v nejakom bode na povrchu gule bude klesať s jej rastúcim povrchom, čo je práve s druhou mocninou polomeru (vzdialenosti od zdroja). Pridanie zrkadla je to isté, ako pridanie svetelného zdroja, ktorý je obrazom pôvodného zdroja. Nový zdroj je od bodu P vzdialeny trikrát tak ďaleko ako pôvodný zdroj. Jeho svetlo bude mať preto v bode P devätinovú intenzitu. Celková intenzita je súčtom intenzít od oboch zdrojov a teda $\frac{10}{9}I$.

$\boxed{29.}$ Pri chladnutí sa zachováva moment hybnosti $L = I\omega = 2\pi\frac{I}{T}$.[1] To znamená, že ak počiatočné veličiny budeme indexovať ako „1“ a veličiny po vychladnutí ako „2“, platí

$$\frac{I_1}{T_1} = \frac{I_2}{T_2},$$

Ďalej si treba uvedomiť, že moment zotrvačnosti závisí od parametrov ako $I = cmr^2$, kde m je nemenná hmotnosť planéty, r je v našom prípade polomer planéty a c je konštanta závislá od geometrie, ktorá sa pri chladnutí nezmení. Guľa ako guľa. Ak sa zbavíme nejakých tých konštánt okolo, zákon zachovania sa dá zapísať ako

$$\frac{r_1^2}{T_1} = \frac{r_2^2}{T_2},$$

[1] Energia sa v tomto probléme zachovávať *nemusí*. Časť kinetickej energie a gravitačnej potenciálnej energie sa môže počas chladnutia meniť na teplo, ktoré z planéty odchádza.

Po vychladnutí $r_1 \mapsto r_2 = r_1(1 - \frac{1}{n})$. Z predošlej rovnice vidíme, že ak má zákon zachovania platiť, musí sa perióda zmeniť ako

$$T_2 = T_1(1 - \tfrac{1}{n})^2 \approx T_1(1 - \tfrac{2}{n}),$$

Deň sa teda skráti o jednu $\frac{n}{2}$-tinu.

$\boxed{30.}$ Vzduch pod pokrievkou časom chladne, čím sa zmenšuje jeho tlak. Rozdiel tlakov nad a pod pokrievkou spôsobuje dodatočnú prítlačnú silu F_p pokrievky na stôl a tým zvyšuje aj treciu silu. Pokrievka po čase už nezrýchľuje (ani nespomaľuje), lebo sa jej teplota a plynu pod ňou vyrovnala s okolím a trecia sila je akurát taká, že zhodou okolností akurát kompenzuje zložku gravitačnej, ktorá pokrievku urýchľuje.

Spravíme štandardný rozklad gravitačnej sily na nakolonenej rovine. V smere kolmom na podložku pôsobí zložka tiažovej sily: $F_1 = mg\cos\alpha$ a sila z rozdielu tlakov Δp pod a nad pokrievkou: $F_p = \Delta pS$, kde $S = \pi r^2$ je plocha ohraničená pokrievkou. Súčet týchto síl voláme normálová sila, ktorá je kompenzovaná reakčnou silou podložky. V smere rovnobežnom s podložkou pokrievku ťahá nadol zložka tiažovej sily: $F_2 = mg\sin\alpha$ a proti nej pôsobí trecia sila, ktorá je súčin normálovej sily a koeficientu trenia f. Výsledná sila je nula, teda

$$f(mg\cos\alpha + \Delta pS) = mg\sin\alpha,$$

Teraz už len potrebujeme vyjadriť ako závisí rozdiel tlakov od teploty izby. Keďže pokrievka je pevná, objem plynu pod ňou sa nemení a jeho chladnutie môžeme popísať ako izochorický dej. Platí teda $p_a/T_1 = p_2/T_2$, z čoho vyjadríme tlak vzduchu po ochladnutí ako $p_2 = p_aT_2/T_1$. Rozdiel tlakov $p_a - p_2$ je teda $\Delta p = p_a(1 - T_2/T_1)$. Po dosadení do vzťahu pre rovnováhu síl a vyjadrení T_2

$$T_2 = T_1\left(1 - \frac{mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha}{f\pi r^2 p_a}\right),$$

Po dosadení číselných hodnôt, dostávame $T_2 = 295{,}8\,\mathrm{K}$, čo je asi 22,6 stupňa Celzia.

$\boxed{31.}$ Túto úlohu bolo možné riešiť dvoma spôsobmi. Prvý spôsob bolo jej vyriešenie z rovnosti potenciálov vrcholov, nič ťažké.

Druhý spôsob znamenal uvedomenie si, že túto istú úlohu sme len pred niekoľkými minútami úspešne vyriešili a odovzdali – a to dokonca pre n vrcholov. Takže vo výsledku, ktorý si pamätáme rovnako ako výsledok každej úlohy, ktorú sme kedy riešili, dosadíme za n osmičku. $R_\mathrm{c} = 2R/n = R/4$

$\boxed{32.}$ Kus melónu sa obvykle získa ukrojením z celého melónu. Skúsme preto aj my začať momentom zotrvačnosti celého melónu a výsledok z neho skúsime vylúpnuť. Vieme, že moment zotrvačnosti gule je

$$I_\mathrm{g} = \tfrac{2}{5}M_\mathrm{g}R^2,$$

Ak si celkovú hmotnosť vyjadríme ako $M_\mathrm{g} = M + M_\mathrm{zv}$, t.j. ako súčet hmotnosti nášho výrezku a hmotnosti zvyšku, môžeme predošlý výsledok prepísať ako

$$I_\mathrm{g} = \tfrac{2}{5}MR^2 + \tfrac{2}{5}M_\mathrm{zv}R^2,$$

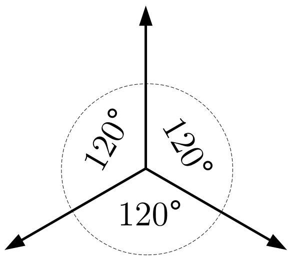
Tento výsledok sa núka interpretovať ako súčet momenti zotrvačnosti výrezku plus moment zotrvačnosti zvyšku melónu, takže hľadaná odpoveď je $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Poznámka na záver: Toto riešenie môže pôsobiť mätúco a to najmä kvôli svojmu výsledku, ktorý sa až priveľmi podobá na moment zotrvačnosti gule. Veď úplne stačí prepísať jednu hmotnosť za druhú. To má hlbší dôvod. Moment zotrvačnosti má vo všeobecnosti tvar $I = cMR^2$, kde c je číslo súvisiace z geometriou. Presnejšie povedaná, súčin cR^2 určuje „priemerný štvorec vzdialenosti“ jednotlivých častí telesa od osi otáčania. Ak trochu potrápite predstavivosť, malo by byť jasné, že pre kus melónu je tento priemer rovnaký ako pre guľu.

$\boxed{33.}$ Uvažujme stôl, do ktorého sme vyvŕtali diery akurát vo vrcholoch nášho trojuholníka. Cez diery prevlečme tri špagáty, zviažme ich nad stolom do jedného uzlíka a na každý zavesme jednokilové závažie. Príroda sa bude snažiť nájsť stav s najnižšou potenciálnou energiou, tj. taký, kedy bude súčet dĺžok prevísajúcich špagátov čo najväčší, resp. súčet dĺžok od vrcholov k uzlíku čo najmenší. Úspešne sme previedli matematickú úlohu na fyzikálnu – nájsť polohu uzlíka a tú teraz spakruky vyriešime.

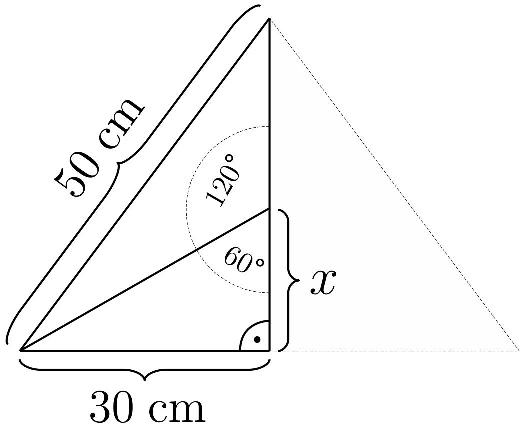
Každý špagát bude napínaný tiažou 1 kg závažia. Každý špagát touto silou ťahá uzlík nad stolom. Dovedna teda na uzlík pôsobia tri rovnako veľké sily a zrejme sa ustáli v takej polohe, v ktorej je výslednica týchto síl nulová.

Tri rovnako veľké sily sa dajú do nuly zložiť jediným spôsobom, ktorý je zobrazený na nasledujúcom obrázku.



Skúste si sami premyslieť, že táto poloha je naozaj stabilná – t.j. že po malom posunutí uzlíka sa naň pôsobiace sily zložia tak, že sa ho snažia vrátiť späť.

Ostáva už iba zistiť, kde v zadanom trojuholníku sa tento bod nachádza. V tomto ohľade boli tvorcovia tejto úlohe prívetivý. Zadaný trojuholník je totiž rovnoramenný. Tento bod sa preto musí nachádzať niekde na osi symetrie. Kde presne možno charakterizovať napríklad vzdialenosťou od základe, označme ju x. Hľadáme teda bod na osi symetrie taký, aby veľkosti uhlov boli nasledovné:



Musí teda platiť

$$\frac{x}{30\,\mathrm{cm}} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad x = 10\sqrt{3}\,\mathrm{cm} \approx 17{,}3\,\mathrm{cm},$$

Tým je úloha vyriešená.