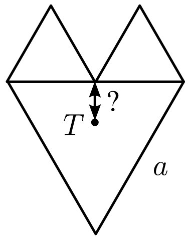
Zadania

1. Nedávno zaviedli na trojprúdovom diaľničnom úseku medzi Bratislavou a Trnavou nasledovné obmedzenia: Vo všetkých pruhoch je maximálna povolená rýchlosť $110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ a vozidlá musia dodržiavať minimálny odstup 70 metrov. Koľko najviac vozidiel s dĺžkou 4 metre dokáže prejsť týmto úsekom za hodinu, ak všetci vodiči dodržujú dopravné predpisy?

2. Rómeo daroval Júlii prívesok s medailónom v tvare srdca zloženého z troch rovnostranných trojuholníkov. Medailón je vyrobený z plechu s konštantnou hrúbkou. Nájdite polohu jeho ťažiska, ak viete, že strana najväčšieho trojuholníka má dĺžku a.



3. Prepíliť kmeň na 3 časti trvá 12 minút. Koľko trvá prepíliť ho na štyri časti?

4. Prvú polovicu cesty do zelovocu (čo do vzdialenosti) som prešiel rýchlosťou 45 km/h. Akou rýchlosťou musím prejsť druhú polovicu, aby som mal priemernú rýchlosť 100 km/h?

5. Hokejové klzisko má plochu $S = 1\,800\,\mathrm{m^2}$ a ľad na ňom váži $m = 240$ ton. Aká hrubá je ľadová plocha, ak hustota ľadu je $\rho = 900\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$?

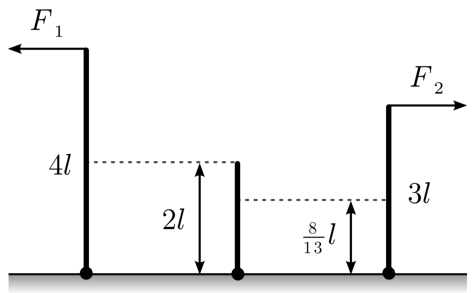
6. V akej hĺbke pod hladinou mora je dvakrát väčší tlak, ako na hladine mora? Chceme od vás číselný výsledok.

7. Squashovú loptičku pustíme z výšky H, no odrazí sa len do menšej výšky h. Aký bol pomer veľkosti jej rýchlostí tesne po a tesne pred odrazom od zeme?

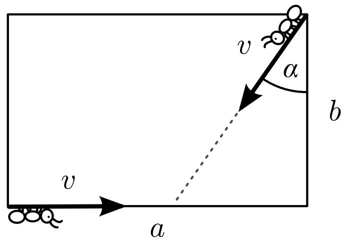
8. Nazbierali sme 1 kg uhoriek obsahujúcich 95 % vody. Časom trochu vyschli a obsahujú už len 90 % vody. Koľko vážia teraz?

9. Obyvatelia Šturáku (internátu v Mlynskej doline) majú štandardné problémy s holubmi, ktoré im špinia balkóny. Uvažujte holuba letiaceho vodorovne rýchlosťou v priamo k Šturáku. V akej vzdialenosti od Šturáku musí holub vypustiť svoj exkrement, ak chce trafiť balkón nachádzajúci sa o h nižšie?

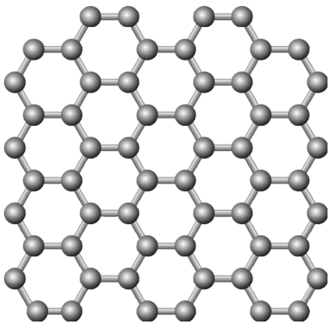
10. Páky, ktorých dĺžky sú v pomere 4 : 2 : 3, sú spojené špagátmi, ako znázorňuje obrázok. Aký je pomer síl F_1 a F_2, ak je sústava v rovnováhe?



$\boxed{11.}$ Dva mravce sa nachádzajú na protiľahlých vrcholoch hárku papiera tvaru obdĺžnika so stranami a, b. Oba sa začnú naraz pohybovať rýchlosťou v. Jeden po hrane papiera, druhý krížom cez papier tak, ako to znázorňuje obrázok. Pod akým uhlom α sa má pohybovať druhý mravec, aby sa oba mravce stretli v jednom bode na hrane papiera?



$\boxed{12.}$ V roku 2010 bola Nobelova cena za fyziku udelená za objav grafénu. Grafén je materiál tvorený jednou vrstvou atómov uhlíka usporiadaných do šesťuholníkov (pozri obrázok). Dĺžka väzby `C-C` v grafène je $d = 0{,}142\,\mathrm{nm}$. Vypočítajte hmotnosť uhlíka v grafène potrebnom na pokrytie povrchu futbalového štadióna s rozmermi $50\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$. Hmotnosť jedného atómu uhlíka je $m_\mathrm{C} = 1{,}99 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{g}$.



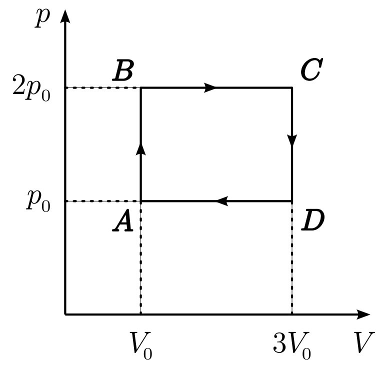
$\boxed{13.}$ Loptu som hodil kolmo nahor tak, že veľkosť jej rýchlosti bola rovnaká po čase t aj po čase $2t$. Ako vysoko som loptu vyhodil? Odpor vzduchu neuvažujte.

$\boxed{14.}$ Kocka z istého materiálu klesá vo vode s počiatočným zrýchlením a. Keď pod ňu ponoríme rovnako veľkú kocku vyrobenú z iného materiálu, obe kocky sa budú pokojne vznášať vo vode. Aká časť druhej kocky vyčnieva z vody, keď pláva sama?

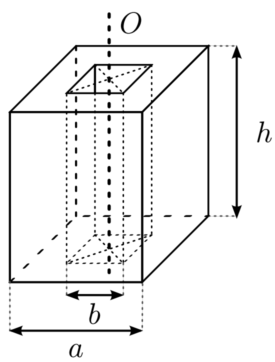
15. V africkej savane žijú gepardy a gazely. Gepardy lovia gazely. Gepard sa pri love pohybuje tak, že rovnomerne zrýchľuje so zrýchlením a z nuly po maximálnu rýchlosť $v_{\max}$, po ktorej dosiahnutí sa unaví a okamžite zastane. Gazela beží konštantnou rýchlosťou u bez zrýchľovania. Keď gazela zbadá zrýchľujúceho geparda, okamžite začne bežať. V akej maximálnej vzdialenosti $d_{\max}$ od gazely môže začať gepard zrýchľovať, ak chce gazelu uloviť? Manévrovanie neuvažujte.

16. Na rybníku s plochou S pláva na loďke s plochou S_0 vášnivý lovec pokladov Maximilián. Ako sa zmení výška hladiny rybníka, ak Maximilián vytiahne z jazera na loďku poklad s hmotnosťou m a priemernou hustotou ρ väčšou ako hustota vody ρ_0?

17. Na obrázku je zakreslený cyklický dej s ideálnym plynom v pV-diagrame. Prekreslite tento dej do TV-diagramu!



18. Nájdite moment zotrvačnosti symetricky splackateného toaletného papiera s hmotnosťou m, výškou h, s vonkajšou stranou dĺžky a a vnútornou dĺžky b okolo osi O (pozri obrázok). Využite, že moment zotrvačnosti plnej kocky s hmotnosťou m a so stranou a okolo osi prechádzajúcej stredmi protiľahlých strán je $I = \frac{1}{6}ma^2$.

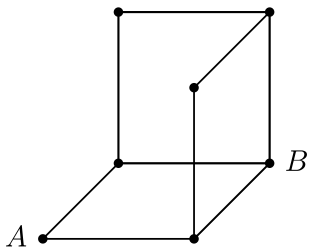


19. Keď si sadnem na mokrú fit loptu nafúkanú tlakom p, otlačím na zem mokrý kruh s polomerom r. Koľko vážim?

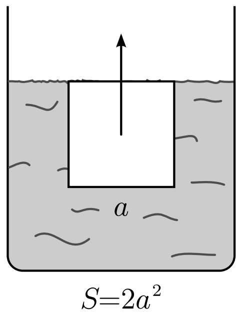
20. Chceme zmerať tlak vzduchu na vrcholku hory Mont Blanc. Preto sa naň vyštveráme a miestnym vzduchom s teplotou $-13\,^\circ\mathrm{C}$ naplníme dvojlitrovú mäkkú fľašu. Po zídení na úroveň

mora, kde je tlak 100 kPa a teplota vzduchu 27 ℃, sa fľaša pokrkvala na menší objem 1,36 l. Aký tlak vzduchu sme zmerali?

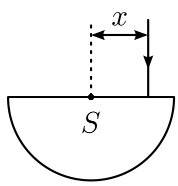
$\boxed{21.}$ Z drôtenej kostry kocky odstrihneme tri hrany vychádzajúce z jedného vrchola. Aký je odpor medzi vrcholmi A a B, ak odpor každej hrany je R_0?



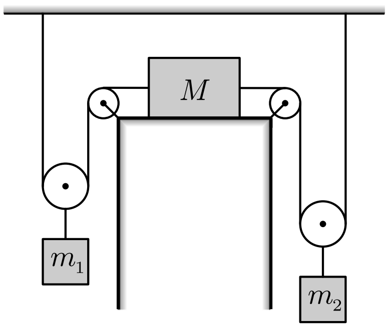
$\boxed{22.}$ Spočítajte prácu potrebnú na vytiahnutie kocky so stranou a a hustotou ρ_k z vody v nádobe s obsahom $S = 2a^2$. Na začiatku sa horná podstava kocky práve dotýka hladiny. Hustota vody je ρ_v.



$\boxed{23.}$ Sklený polvalec polomeru R je umiestnený oblým povrchom nadol. Určte, pre akú najväčšiu vzdialenosť x dokáže svetelný lúč dopadajúci kolmo zhora vyjsť oblou podstavou polvalca.



$\boxed{24.}$ Hmotnosti kladiek v nasledujúcej schéme sú zanedbateľné voči hmotnosti závaží. Určte zrýchlenie závažia M. Trenie neuvažujte.

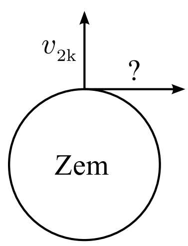


$\boxed{25.}$ Z bôbu sú z jedného bôbu za rovnako dlhé nehmotné bôby zavesené dva rovnaké bodové bôby každý nabitý bôbom Q. Bôby spolu s bôbom závesu tvoria rovnostranný bôb. Akým bôbom ich musíme nabiť (znova oba rovnakým), aby tvorili pravouhlý bôb?

$\boxed{26.}$ Spiderman má zvláštnu schopnosť vypúšťať pavučinu, ktorú využíva namiesto lana. Akú maximálnu hmotnosť môže udržať pavučinové vlákno dlhé $\ell = 50\,\mathrm{m}$, ak z dôvodu jeho vypustenia nechce Spiderman schudnúť viac ako $m = 1\,\mathrm{kg}$. Pavučinové vlákno má medzu pevnosti $\sigma = 1\,500\,\mathrm{MPa}$ a hustotu $\rho = 1{,}1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.

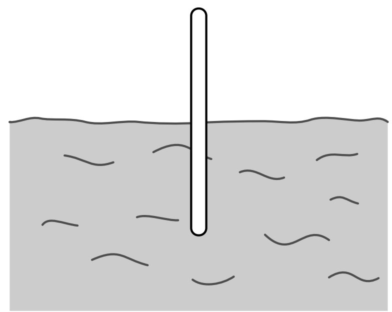
$\boxed{27.}$ Disk o hmotnosti m_1 a polomere R sa voľne otáča uhlovou rýchlosťou ω. Potom naň položíme nerotujúci disk s tým istým polomerom a s hmotnosťou m_2. O koľko sa disky ohrejú? Predpokladajte, že oba disky sú vyrobené z materiálu s mernou tepelnou kapacitou C a že majú všade rovnakú hrúbku.

$\boxed{28.}$ Je známe, že pri kolmom štarte je potrebné vyhodiť teleso rýchlosťou $v_{2\mathrm{k}} = \sqrt{2GM/R}$, ak má opustiť gravitačné pole Zeme. Akou rýchlosťou ho treba hodiť v smere rovnobežnom so zemským povrchom, aby opustilo gravitačné pole Zeme? Rotáciu Zeme zanedbajte.

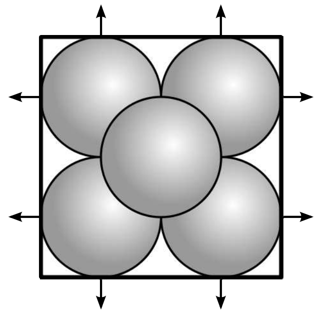


$\boxed{29.}$ Cyklista prejde konštantným výkonom P za hodinu 50 kilometrov. Potom si oholí nohy a výkon potrebný na udržanie pôvodnej rýchlosti sa zníži o p. Za aký čas prejde *teraz* 50 kilometrov, ak bude šľapať pôvodným výkonom P? Predpokladajte, že odporová sila je úmerná druhej mocnine rýchlosti.

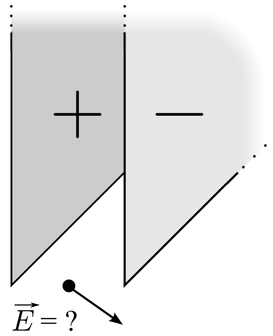
$\boxed{30.}$ Aká môže byť hustota paličky, aby na vode plávala tak, ako ukazuje obrázok? (Tj. pre aké hustoty paličky je táto poloha stabilná?)



$\boxed{31.}$ Do škatule so štvorcovou podstavou o hrane $4R$ sme dali 5 hladkých gúľ s polomerom R a hmotnosťou M. Pri pohľade zhora teda vnútro krabice vyzerá ako na obrázku. Akou silou F pôsobí každá z dolných štyroch gúľ na každú bočnú stenu, ktorej sa dotýka?

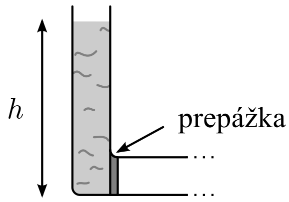


32. Určte veľkosť i smer elektrického poľa v strede medzi vrcholmi dosiek kondenzátora. Viete, že vnútri kondenzátora je elektrická intenzita veľkosti E. Predpokladajte, že rozmery dosiek sú rádovo väčšie ako vzdialenosť medzi nimi.



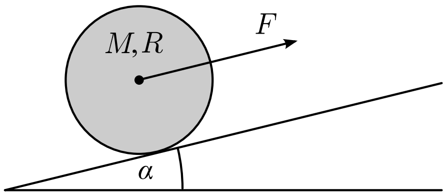
33. Dve družice sa pohybujú okolo Zeme po tej istej elipse s polosami a a b. V čase ich najväčšieho priblíženia k Zemi sa nachádzajú v malej vzdialenosti d za sebou. Aká bude ich vzdialenosť v čase ich najväčšieho oddialenia od Zeme?

34. Dve trubice v tvare písmena L s prierezom S sú oddelené prepážkou. Zvislé rameno je naplnené vodou až do výšky h. Zrazu prepážku odstránime. Za aký čas t od odstránenia prepážky vytečie zo zvislého ramena všetka voda? Trecie sily neuvažujte.



35. Peťko dostal na Vianoce krásnu elektrostavebnicu. Elektrostavebnica sa skladá z n kolíčkov, medzi ktoré je možné napchať najrôznejšie súčiastky ako napríklad zosilňovač reliktov vesmírnej impedancie a podobne. Peťko začal jednoduchším experimentom – medzi každé dva kolíčky zapojil jeden odpor veľkosti R. Aký výsledný odpor nameria medzi (ľubovoľnými) dvoma kolíčkami?

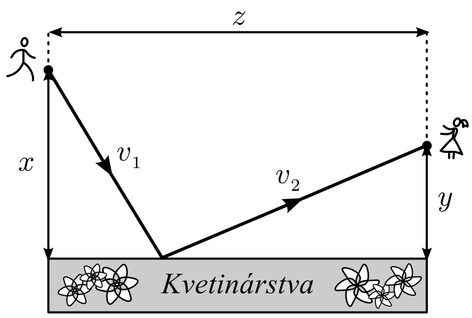
$\boxed{36.}$ Hore naklonenou rovinou ťaháme homogénny valec s polomerom R a hmotnosťou M za stredovú osku silou F. Aký najmenší musí byť koeficient trenia medzi valcom a naklonenou rovinou, aby valec v takejto situácii nepreŠmykoval?



$\boxed{37.}$ Dve veľké rovnobežné platne, ktoré sa nachádzajú v malej vzdialenosti od seba, sú udržiavané na teplotách $T_1 > T_2$. V dôsledku žiarenia dochádza medzi doskami k toku tepla P_1. Potom medzi ne vložíme tretiu vodivú dosku. Aký tok tepla P_2 bude tiecť sústavou po ustálení teploty tretej dosky? Využite, že žiarenie platní možno popísať Stefan-Boltzmannovým zákonom $P = \sigma S T^4$, kde S je plocha s teplotou T a σ je konštanta.

$\boxed{38.}$ Vo veľkej miestnosti sa nachádza koberec tvaru štvorca. Ak ho roztočíme okolo vrchola, trením sa zastaví za čas t. Za aký čas sa zastaví, ak ho tou istou uhlovou rýchlosťou roztočíme okolo stredu?

$\boxed{39.}$ Chlapec ide dievčaťu kúpiť kvety. Od rovného radu kvetinárstiev je vzdialený $x = 600\,\mathrm{m}$, dievča $y = 400\,\mathrm{m}$ a medzi nimi je pozdĺž radu vzdialenosť $z = 1\,100\,\mathrm{m}$. Ak chlapec beží bez kvetov rýchlosťou $v_1 = 24\,\mathrm{km/h}$ a s kvetmi rýchlosťou $v_2 = 18\,\mathrm{km/h}$, za aký najkratší čas je schopný prísť k stojacemu dievčaťu aj s kvetinami? Nakupovanie kvetín trvá chlapcovi zanedbateľne krátky čas.



$\boxed{40.}$ O koľko neskôr by začínal deň, keby bola rýchlosť svetla dvojnásobná? Predpokladajte, že Slnko sa nachádza v nekonečnej vzdialenosti od Zeme a teda slnečné lúče sa pohybujú kolmo na vektor rýchlosti Zeme. Lom svetla v atmosfére neuvažujte. Výsledok vyčíslite!

$\boxed{41.}$ Veľmi dávno sa ľudia prostredníctvom hviezdnej brány dostali do veľmi vzdialenej galaxie, v ktorej neplatia fyzikálne zákony tak, ako ich poznáme my. Napríklad pre príťažlivú gravitačnú silu medzi telesami s hmotnosťami m_1 a m_2 vo vzdialenosti r platí

$$F_{\mathrm{g}} = A\frac{m_1 m_2}{r^2} + B\frac{m_1 m_2}{r^3},$$

kde A a B sú konštanty. V snahe zistiť ich hodnoty, vyslali ľudia sondu a pomocou nej odmerali kruhovú rýchlosť v_{k} a únikovú rýchlosť v_{u} na úrovni povrchu planéty. Vypočítajte hodnoty konštánt A a B. Hmotnosť M aj polomer R skúmanej planéty poznáte.

Vzorové riešenia

$\boxed{1.}$ Hociktoré vozidlo sa dostane na miesto vozidla pred sebou za čas

$$\frac{74\,\mathrm{m}}{110\,\mathrm{km\,h^{-1}}} \approx 2{,}42\,\mathrm{s}\,.$$

Jeden pruh za hodinu prepustí $3\,600\,\mathrm{s}/2{,}42\,\mathrm{s} \approx 1\,486$ vozidiel. Diaľnicou dokáže prejsť trojnásobne viacej vozidiel, čiže asi 4 460.

$\boxed{2.}$ Najprv si všimnime, že srdce je symetrické okolo zvislej osi. Polohu ťažiska v horizontálnom smere už teda máme určenú (na osi symetrie) a stačí nájsť výšku ťažiska. Budeme ju hľadať nasledovne: Nájdeme polohu ťažiska a hmotnosť prislúchajúcu veľkému trojuholníku. Podobne, nájdeme polohu spoločného ťažiska a spoločnú hmotnosť dvoch malých trojuholníkov. Napokon nájdeme výsledné ťažisko týchto dvoch útvarov.

Poloha ťažiska veľkého trojuholníka sa nachádza vo vzdialenosti $\frac{1}{3}v$ od jeho vodorovnej (aj každej inej) strany, kde v je výška trojuholníka (a teda $v = a\sqrt{\frac{3}{4}}$). Ťažisko každého z malých trojuholníkov sa nachádza vo výške $\frac{1}{6}v$ od ich strán (majú dvakrát kratšie strany, a teda aj výšky). Spoločné ťažisko malých trojuholníkov sa preto tiež nachádza vo vzdialenosti $\frac{1}{6}v$ od vodorovnej strany veľkého trojuholníka.

Veľký trojuholník má štyrikrát väčší obsah ako malý (obsah je úmerný a^2), a teda je aj štyrikrát ťažší ako malý trojuholník. Sústava dvoch malých trojuholníkov má preto oproti veľkému trojuholníku polovičnú hmotnosť. Ťažisko srdca sa preto bude nachádzať dvakrát bližšie k ťažisku veľkého trojuholníka ako k spoločnému ťažisku dvoch malých trojuholníkov. Vzdialenosť ťažísk veľkého a dvoch malých trojuholníkov $\frac{1}{3}v + \frac{1}{6}v = \frac{1}{2}v$ rozdelíme na tretiny a poloha výsledného ťažiska bude v $\frac{1}{3}1$ vzdialenosti (teda $\frac{1}{6}v$) od ťažiska veľkého trojuholníka, čo je zároveň vo vzdialenosti $\frac{1}{6}v = \frac{1}{12}a\sqrt{3}$ nadol od vodorovnej strany veľkého trojuholníka.

K výsledku sa dá samozrejme prísť aj hrubou silou. Stačí si rozdeliť medailón na viacero častí, ktorých hmotnosti m_i a polohy ťažísk r_i poznáme. Známy vzorec hovorí, že poloha celkového ťažiska medailónu je:

$$r_\mathrm{T} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}\,.$$

Skúste si to!

$\boxed{3.}$ Stačí si uvedomiť, že prepílenie kmeňa na tri časti si vyžaduje 2 rezy. Potom je jasné, že prepíliť kmeň na štyri časti trvá $\frac{3}{2} \cdot 12\,\text{minút} = 18\,\text{minút}$.

$\boxed{4.}$ Do riešenia príkladu sa pustíme pekne po hlave. Dĺžku cesty do zelovocu označme d, rýchlosť v prvej polovici u, hľadanú rýchlosť v druhej polovici v. Prvá polovica cesty mi trvala $\frac{1}{2}d/u$, druhá polovica bude trvať $\frac{1}{2}d/v$. Pre priemernú rýchlosť potom dostávame:

$$v_\mathrm{p} = 2\frac{d}{d/u + d/v} = 2\frac{uv}{u+v}\,.$$

Po troche úprav dostaneme:

$$v = v_{\mathrm{p}}u/(2u - v_{\mathrm{p}})\,.$$

Avšak v našom prípade vychádza po dosadení v záporné, to znamená, že druhú polovicu by sme museli prejsť za záporný čas, čo ako sami isto uznáte, nie je možné.

Toto sa dalo vidieť aj skôr a bez výpočtov. Keby sme sa z polovice cesty dostali na koniec v okamihu (za nulový čas) naša priemerná rýchlosť by bola dvojnásobkom rýchlosti na prvej polovici, čo je 90 km/h. Preto už nemôžeme mať priemernú rýchlosť väčšiu ako táto hodnota.

5. Objem ľadu sa môžeme na jednej strane určiť cez jeho hmotnosť a hustotu, na strane druhej cez rozmery. Máme

$$Sh = m/\rho \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m}{S\rho} \approx 15\,\mathrm{cm}\,.$$

6. V hĺbke h pod hladinou je tlak hydrostatický plus tlak atmosférický na hladine p_0. Teda $2p_0 = \rho g h + p_0$, z čoho $h = p_0/\rho g$. Pre štandardné hodnoty $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$, $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ a $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ je $h = 10{,}2\,\mathrm{m}$.

7. Pomer mechanických energií loptičky po a pred odrazom je h/H – pomer ich potenciálnych energií v najvyššom bode ich dráhy. Tesne pred odrazom a tesne po odraze je celá mechanická energia loptičky sústredená do jej pohybovej energie. Pomer pohybovej energie loptičky tesne po a tesne pred odrazom je $v_{\mathrm{po}}^2/v_{\mathrm{pred}}^2$. Odtiaľ určíme pomer $v_{\mathrm{po}}/v_{\mathrm{pred}} = \sqrt{h/H}$.

8. Pred vyschnutím vážila suchá hmota uhoriek 0,05 kg. Po vyschnutí bolo suchej hmoty uhoriek toľko isto, ale tvorila až 10 % z celej hmotnosti m. Čiže $0{,}1m = 0{,}05\,\mathrm{kg}$, z čoho hmotnosť uhoriek po vyschnutí vyjde $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$.

9. Exkrement má po vypustení rovnakú rýchlosť, ako holub, no navyše bude padať voľným pádom. Čas, za ktorý exkrement klesne práve o h nižšie dostaneme zo vzťahu pre dráhu voľného pádu $h = \frac{1}{2}gt^2$ ako $t = \sqrt{2h/g}$. Za tento čas sa exkrement priblíži k Šturáku o $vt = v\sqrt{2h/g}$. Taká musí byť aj vzdialenosť holuba od Šturáku v čase vypustenia svojho sivo-bieleho exkrementu.

10. Zamerajme sa najprv na strednú páku. Aby bola v rovnováhe, musia byť momenty síl od ľavého a pravého špagátu rovnako veľké. Zároveň platí, že moment sily, ktorým pôsobí ľavý špagát na strednú páku, je rovnako veľký ako moment sily, ktorým pôsobí na ľavú páku. Rameno aj veľkosť sily sa rovnajú. Podobná rovnosť momentov síl platí pre pravý špagát. Z toho vyplýva, že moment sily od ľavého špagátu pôsobiaci na ľavú páku musí byť rovnako veľký ako moment sily od pravého špagátu pôsobiaci na pravú páku. Napokon si treba uvedomiť nasledovné: Aby bola ľavá páka v pokoji, musí sa moment sily od špagátu rovnať momentu sily $4lF_1$. Opäť musí platiť podobná rovnosť i pre pravý špagát. Odtiaľ dostávame rovnicu $4lF_1 = 3lF_2$ a riešenie $F_1 : F_2 = 3 : 4$.

11. Ukážeme si dve riešenia. Prvé bude priamočiare a jednoduché. Druhé bude v sebe obsahovať aj akúsi fyzikálnu hĺbku, no treba sa v ňom pohrať s trochu škaredšou matematikou.

Prvé riešenie: Keďže sa mravce pohybujú rovnakou rýchlosťou a od štartu po ich stretnutie obom uplynul rovnaký čas, očividne prešli rovnakú dráhu. Nasleduje už len matematika. Aby sme sa vyhli nepríjemnostiam so sínusmi a kosínusmi, vyjadríme si dráhu oboch mravcov pomocou a, b a x, pričom x je dráha, ktorá v čase stretnutia chýba mravcovi na hrane a, aby hranu prešiel celú. Keďže sa obe dráhy rovnajú, tak $a - x = \sqrt{b^2 + x^2}$ a z toho po umocnení $x = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)/a$. Keďže $\operatorname{tg}\alpha = x/b$, tak ľahko nájdeme výsledok

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2}\frac{(a^2 - b^2)}{ab}\right] .$$

Fyzikálnejšie riešenie: Pozrime sa na celú situáciu z hľadiska vzťažnej sústavy, v ktorej mravec vpravo hore stojí. V tejto sústave má mravec vľavo dole zložky rýchlosti

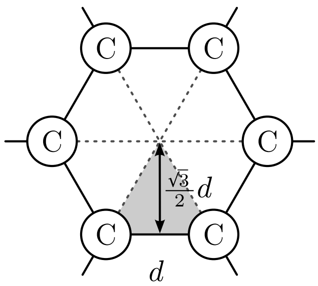
$$v_x = v(1 + \sin\alpha) \quad \text{a} \quad v_y = v\cos\alpha .$$

Aby sa stretli, musí to mať namierené priamo k stojacemu mravcovi. Stadiaľto máme podmienku

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} ,$$
$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} - \operatorname{tg}\alpha .$$

Ak poslednú rovnicu umocníme na druhú a využijeme identitu $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$, prídeme k rovnakému výsledku ako predošlým postupom.

$\boxed{12.}$ Kľúčové je určiť počet atómov uhlíka N_C potrebných na pokrytie štadióna. Tento počet atómov získame priamou úmerou, pokiaľ budeme poznať plochu grafénu pripadajúcu na jeden atóm grafénu. Preto uvažujme jedno šesťuholníkové očko grafénu. Jeho plochu najjednoduchšie určíme rozdelením na šesť rovnostranných trojuholníkov ako na obrázku.



Pre plochu šesťuholníka dostávame:

$$S = 6\left(\tfrac{1}{2}d \cdot \tfrac{1}{2}d\sqrt{3}\right) = \tfrac{3}{2}d^2\sqrt{3} .$$

Na jeden šesťuholník však pripadajú dva atómy uhlíka. To si možno rozmyslieť napríklad na základe toho, že každý uhlík sa nachádza len v troch šesťuholníkoch, zatiaľ čo každý šesťuholník obsahuje až šesť uhlíkov. Plocha grafénu pripadajúca na jediný atóm uhlíka je preto:

$$S_0 = \tfrac{1}{2}S = \tfrac{3}{4}d^2\sqrt{3} .$$

K tomuto výsledku sa dá, samozrejme, dostať aj inak. Plocha pripadajúca na jeden atóm uhlíka je očividne rovná obsahu rovnostranného trojuholníka spájajúceho stredy troch susediacich šesťuholníkov. Takto by sme prišli, ako inak, k tomu istému výrazu pre S_0.

Ak označíme rozmery štadióna ako a, b, tak počet atómov potrebných na pokrytie štadióna je $N_\mathrm{C} = ab/S_0$. Hmotnosť atómov je preto

$$m = N_\mathrm{C} m_0 = \frac{ab}{S_0} m_0 = \frac{4}{9}\frac{abm_0\sqrt{3}}{d^2} \, .$$

Po dosadení dostaneme $m \approx 3{,}80\,\mathrm{g}$, tj. asi za jednu malú lyžičku sadzí.

$\boxed{13.}$ Keďže veľkosti rýchlostí lopty v časoch t a $2t$ boli rovnaké, lopta sa musela v časoch t a $2t$ nachádzať v tom istom bode (označíme ho A), akurát v čase t letela smerom nahor a v čase $2t$ letela nadol. Táto skutočnosť vyplýva napríklad zo zákona zachovania energie – celková energia lopty v oboch prípadoch má byť rovnaká. Kinetické energie sa preto budú rovnať iba vtedy, keď sa budú rovnať potenciálne energie lopty. Tie sa rovnajú, ak je lopta v oboch prípadoch v rovnakej výške.

Celý let lopty trval čas $3t$. Čas t kým sa lopta dostala do bodu A prvýkrát, t kým vyletela do najvyššieho bodu svojej dráhy a opäť spadla do bodu A a napokon t, kým spadla z bodu A na zem. Čas, ktorý uplynul, kým lopta spadla z najvyššieho bodu svojej dráhy na zem, je preto $\frac{3}{2}t$ a zo vzorca pre rovnomerne zrýchlený pohyb (so zrýchlením g za čas $\frac{3}{2}t$) dostaneme maximálnu výšku lopty $\frac{9}{8}gt^2$.

$\boxed{14.}$ Zapíšeme si Newtonov zákon pre prvú kocku:

$$\rho_1 V a = \rho_1 V g - \rho_v V g \, ,$$

kde ρ_1 je hustota kocky, V je jej objem a ρ_v je hustota vody. Taktiež si zapíšeme Newtonov zákon pre sústavu oboch kociek:

$$0 = \rho_1 V g + \rho_2 V g - 2\rho_v V g \, ,$$

kde ρ_2 je hustota druhej kocky. Tieto dve rovnice o dvoch neznámych (ρ_1 a ρ_2) vyriešime a dostaneme $\rho_2 = \rho_v(g-2a)/(g-a)$. Nakoniec si všimnime, že ak má kocka hustotu $\rho_2 < \rho_v$, tak jej ponorená časť má objem $V\rho_2/\rho_v$. Toto je presne objem, ktorého vztlaková sila vykompenzuje gravitačnú silu pôsobiacu na celú kocku. Z kocky bude nad hladinu vyčnievať zlomok

$$1 - \rho_2/\rho_v = a/(g-a) \, .$$

$\boxed{15.}$ Zrýchľovanie Geparda trvá $T = v_\mathrm{max}/a$, preto gepard je pri svojom behu schopný prebehnúť najviac vzdialenosť

$$\tfrac{1}{2}a(v_\mathrm{max}/a)^2 = \tfrac{1}{2}v_\mathrm{max}^2/a \, .$$

Vzdialenosť d bude zrejme maximálna vtedy, keď gepard dobehne gazelu presne na konci svojho zrýchľovania, t.j. v čase T. V reči rovníc:

$$\tfrac{1}{2}v_\mathrm{max}^2/a = d_\mathrm{max} + uT \quad \Rightarrow \quad d_\mathrm{max} = \left(\tfrac{1}{2}v_\mathrm{max} - u\right)v_\mathrm{max}/a$$

Všimnite si, že na to, aby mal gepard šancu gazelu dobehnúť musí dosiahnuť aspoň dvojnásobok jej rýchlosti.

16. Označme pokles hladiny x a pokles loďky (vzhľadom na zem, tj. nie vzhľadom na hladinu!) ako y. Keďže množstvo vody v jazere sa nezmení, musí platiť

$$(S - S_0)x + S_0 y = m/\rho$$

čiže klesnutá voda vyplní miesto, kde sa pôvodne nachádzal poklad. Ďalej vieme, že loďka musí vzhľadom na hladinu klesnúť o toľko, aby nárast vztlakovej sily kompenzoval tiaž vyloveného pokladu

$$S_0(y - x)\rho_0 g = mg\ .$$

Tým sme dostali dve rovnice o dvoch neznámych, z ktorých pre x už rýchlo dostaneme:

$$x = \frac{m/S}{\rho} - \frac{m/S}{\rho_0}\ .$$

Tu by sme mohli skončiť. Všimnime si však, že $\rho > \rho_0$, takže $x < 0$. To znamená, že ak z jazera vytiahneme poklad, hladina stúpne. Zvláštne, možno to lepšie pochopíme z alternatívneho riešenia:

Alternatívne riešenie: Archimedov zákon hovorí, že vztlaková sila pôsobiaca na teleso je rovná tiaži vody s objemom rovným objemu ponorenej časti telesa. Ak vytiahneme teleso do loďky, objem ponorených vecí klesne o objem telesa m/ρ, no stúpne o časť objemu loďky, ktorý sa musí ponoriť, aby vykompenzoval tiaž telesa. To jest presne podľa Archimedovho zákona m/ρ_0. Všimnite si, že to je viac, ako vytláčal poklad, keď ležal na dne! Celkový objem ponorených vecí v rybníku teda stúpne o:

$$\frac{m}{\rho_0} - \frac{m}{\rho}\ .$$

To je ekvivalentné tomu, akoby sme do rybníka priliali zodpovedajúce množstvo vody, hladina teda stúpne o:

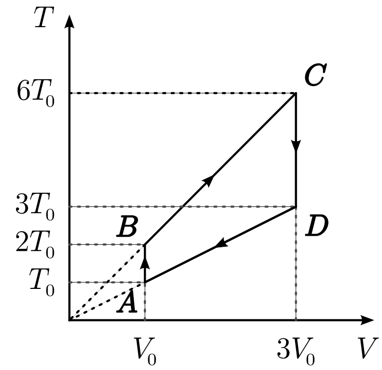
$$\frac{m/S}{\rho_0} - \frac{m/S}{\rho}\ .$$

17. Časti AB a CD deja prebiehajú pri konštantnom objeme, čo sa nezmení ani po prechode do TV-diagramu. Pozrime sa na časti BC a DA deja, ktoré prebiehajú pri konštantnom tlaku. Z rovnice ideálneho plynu $pV = NkT$ vyplýva, že pri týchto častiach deja je tlak priamo úmerný teplote. Tieto časti deja sa preto v TV-diagrame zakreslia ako časti priamok vychádzajúcich z bodu $[0;0]$.

Zostáva určiť teploty v jednotlivých bodoch. Označme teplotu v bode A ako:

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{Nk}\ .$$

Zo stavovej rovnice ľahko nájdeme hodnoty $T_A = T_0$, $T_B = 2T_0$, $T_C = 6T_0$ a $T_D = 3T_0$. So získanými informáciami už jednoznačne nájdeme hľadaný priebeh deja v TV-diagrame:



18. Moment zotrvačnosti sústavy tvorenej hmotnými bodmi je $I = \sum_i m_i r_i^2$, kde m_i je hmotnosť hmotného bodu v *kolmej* vzdialenosti r_i od osi otáčania, vzhľadom na ktorú moment zotrvačnosti rátame. Keďže ide o kolmú vzdialenosť, má homogénna kocka so stranou a rovnaký moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu stredmi protiľahlých strán ako rovnako hmotný homogénny kváder so štvorcovou podstavou strany a vzhľadom na os prechádzajúcu stredmi podstáv. Ak by teda toaleťák hustoty ρ nemal dutinu, bol by moment zotrvačnosti $I = \frac{1}{6}\rho h a^4$. Keď teraz dutinu s podstavou b vyrežeme, musíme od I odpočítať moment zotrvačnosti vyrezanej časti. Teda

$$I = \tfrac{1}{6}\rho h a^4 - \tfrac{1}{6}\rho h b^4 = \tfrac{1}{6}\rho h(a^4 - b^4)\,.$$

Toto už len upravíme využijúc fakt, že hmotnosť toaleťáku s dutinou je $m = \rho h(a^2 - b^2)$. Dostaneme $I = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$.

19. Keď naša zadnica spočinie na lopte, v rovnováhe je sila, ktorou tlačíme na loptu, rovná sile, ktorou aj lopta tlačí na zem. Ak by to nebolo tak, rozdiel síl by loptu urýchľoval nejakým smerom. Lopta teda tlačí na zem silou $F = mg$, kde m chceme určiť.

Teraz zaostrime svoj bystrý zrak na kus lopty, ktorý sa pod našou ťarchou prikvačil k zemi. Z vnútornej strany lopty naň vzduch pôsobí tlakom p. Z druhej strany však tiež zem tlačí na materiál nejakým tlakom. Ten musí rovnaký, inak by rozdiel tlakov spôsoboval silu, ktorá by materiál ďalej deformovala alebo urýchľovala v nejakom smere. V rovnováhe musí byť teda tlak, ktorým lopta tlačí na podložku, rovný tlaku vzduchu v lopte.

Teraz využijeme definíciu tlaku a dosadíme všetky veličiny, týkajúce sa toho, čo sa pod loptou odohráva. Máme:

$$p = F/S = \frac{mg}{\pi r^2}\,,$$

odkiaľ pre našu hmotnosť dostávame $m = p\pi r^2/g$.

Pri riešení sme zanedbali skutočnosť, že pod našou ťarchou môže lopta zmeniť svoj objem. Navyše, celá argumentácia prejde len pre „mäkkú“ loptu, kedy spodná časť lopty naozaj priľne k povrchu. Pre „tvrdú“ loptu, ktorá zostáva oblá aj pri zaťažení, treba totiž uvažovať ešte ťahovú silu povrchu (taká, akou pôsobí napríklad aj pružný povrch balóna). Je to tá istá sila, vďaka ktorej je vôbec nafúkaná lopta v rovnováhe, hoci tlak vzduchu vnútri je väčší, ako tlak zvonku. Zamyslite sa nad tým!

$\boxed{20.}$ Pre vzduch vo fľaši platí stavová rovnica ideálneho plynu. Takže si ju napíšem pre situáciu hore a dole. Platí

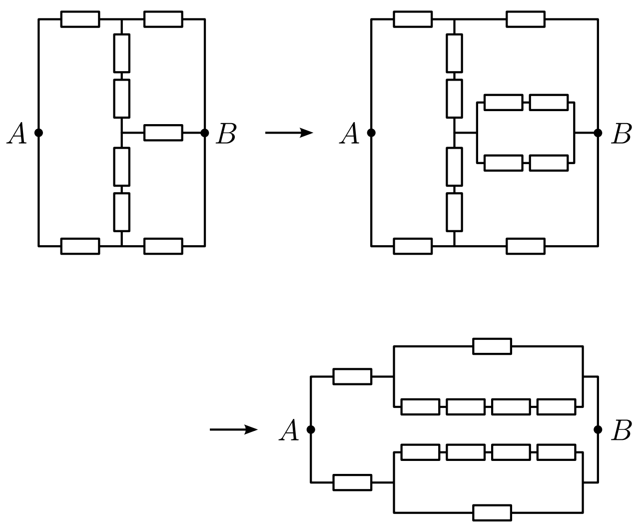
$$\frac{p_{\text{hore}}V_{\text{hore}}}{T_{\text{hore}}} = nR = \frac{p_{\text{dole}}V_{\text{dole}}}{T_{\text{dole}}} \,,$$

teda:

$$p_{\text{hore}} = p_{\text{dole}}\frac{V_{\text{dole}}}{V_{\text{hore}}}\frac{T_{\text{hore}}}{T_{\text{dole}}} \,.$$

Pri dosadení stačí správne premeniť stupne Celzia na kelviny a dostaneme pre tlak výsledok $p_{\text{hore}} \approx 59\,\text{kPa}$.

$\boxed{21.}$ Na začiatok celú kocku splacatím a prekreslím do roviny. Každú hranu kocky reprezentuje rezistor s odporom R_0. Teraz si všimnem, že je to celé symetrické podľa priamky AB. Symetricky postavené body môžem kedykoľvek rozpájať a spájať vodičmi, ako sa mi zapáči, pretože musia mať rovnaký potenciál (takže aj tak medzi nimi netečie žiadny prúd). Môžem rozseknúť všetky uzly ktoré ležia na osi AB v smere rovnobežnom s touto osou, v tomto smere nimi aj tak žiadny prúd netečie. Lenže čo s tým jedným odporom, ktorý leží presne na osi symetrie? Očividne ho môžem nahradiť niečim, čo má rovnaký odpor ako on, a to niečo sú dva paralelne zapojené rezistory, každý s odporom $2R_0$. Teraz to už teda naozaj rozseknem a dostanem zapojenie pozostávajúce zo samých paralelných a sériových zapojení:

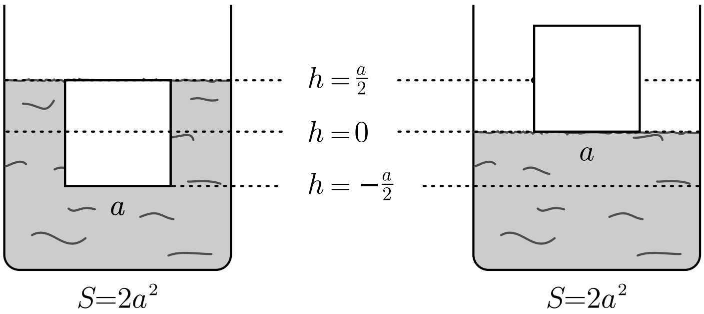


Tak to celé porátam:

$$R^{-1} = 2\left[R_0 + 1/(R_0^{-1} + \tfrac{1}{4}R_0^{-1})\right]^{-1} \,,$$

čo po úprave vydá $R = \frac{9}{10}R_0$.

$\boxed{22.}$ Celková práca potrebná na vytiahnutie kocky z vody sa rovná zmene potenciálnej energie sústavy kocka + voda. Pri výpočte zmeny potenciálnej energie sústavy budeme uvažovať iba kocku a vodu vo výške od $-\frac{1}{2}a$ do $\frac{1}{2}a$. Potenciálna energia zvyšnej vody sa totiž nezmení.

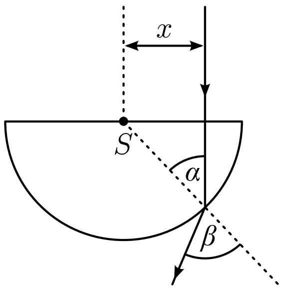


Obr. 1: Stav pred a po vytiahnutí kocky

Na začiatku je ťažisko vody aj kocky vo výške $h = 0$, čomu prislúcha potenciálna energia $E_{\mathrm{p1}} = 0$. Čo sa stane po vytiahnutí kocky tesne nad hladinu? Všimnime si, že nádoba má dvojnásobnú podstavu oproti podstave kocky. To znamená, že voda z intervalu výšok $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$ vyplní teraz už iba polovičný interval $[-\frac{1}{2}a, 0]$. Jej ťažisko sa nachádza vo výške $-\frac{1}{4}a$ a jej potenciálna energia je $-\frac{1}{4}a^4 g\rho_{\mathrm{v}}$. Kocka má po vytiahnutí podstavu vo výške $h = 0$, jej ťažisko je vo výške $h = \frac{1}{2}a$, čomu zodpovedá potenciálna energia $\frac{1}{2}a^4 g\rho_{\mathrm{k}}$. Celková potenciálna energia sústavy kocka a voda po vytiahnutí kocky je $E_{\mathrm{p2}} = \frac{1}{4}a^4 g(2\rho_{\mathrm{k}} - \rho_{\mathrm{v}})$. Prácu teraz už jednoducho určíme ako rozdiel potenciálnych energií

$$W = E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{p1}} = \tfrac{1}{4}a^4 g(2\rho_{\mathrm{k}} - \rho_{\mathrm{v}})\,.$$

$\boxed{23.}$ Hmm, prečo by nemalo svetlo prejsť? Veď na sklo dopadá kolmo a teda sa neohýba, potom dopadne zvnútra na ten oblý povrch, a... jasné, medzný uhol.

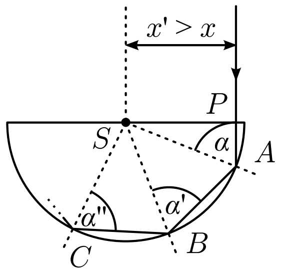


Z obrázku vidíme, že čím väčšia je vzdialenosť x, tým väčší je aj uhol α vyznačený na obrázku. Pre tento uhol platí zákon lomu:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sin\beta}{n}\,.$$

Výraz $\sin\beta$ však môže nadobúdať hodnotu najviac 1. Vtedy lúč opúšťa polvalec v smere rovnobežnom s povrchom. Aby lúč mohol vyjsť z polvalca, tak $\sin\alpha \leq 1/n$. Nás zaujíma prípad, keď nastáva rovnosť – takzvaný *medzný uhol*. Napokon z trošky geometrie vidím, že $\sin\alpha = x/R$. Ak to dáme celé dohromady, dostávame $x < R/n$.

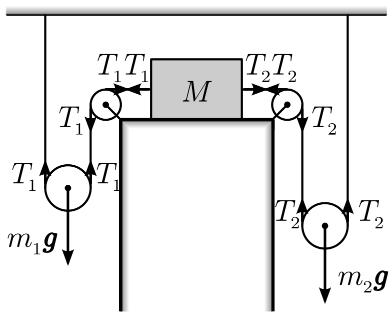
Nezabudli sme však na niečo? Nemôže sa stať, že nejaký lúč pre $x' > x$ prejde oblou podstavou po jednom alebo viacerých vnútorných odrazoch? Nasledujúci obrázok nás presvedčí, že nie:



Zo zákona odrazu vieme, že uhol PAS je rovnaký ako uhol SAB. Keďže trojuholník ABS je rovnoramenný, bude rovnako veľký aj uhol ABS a tak ďalej. Vidíme, že všetky uhly $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sú rovnaké. Ak lúč nedokáže prejsť podstavou v bode A, neprejde ani v ďalších vyznačených bodoch. Lúč sa z polvalca dostane von až po niekoľkých odrazoch hornou podstavou.

$\boxed{24.}$ Keďže dĺžka lana sa nemôže meniť, závažia m_1 a m_2 budú mať rovnako veľké zrýchlenia opačného smeru. Tiež si treba uvedomiť, že tieto zrýchlenia budú dvakrát menšie ako veľkosť zrýchlenia závažia M. O tom sa možno presvedčiť napríklad tak, že ak závažie M posunieme doprava o dĺžku x, výška závaží m_1 a m_2 sa zmení len o $\frac{1}{2}x$, pretože lano pribúda, resp. ubúda na oboch stranách kladky.

Keď už vieme, v akom pomere sú zrýchlenia jednotlivých závaží *iba* kvôli geometrii problému, môžeme určiť veľkosť zrýchlenia závažia M. Označme pnutie v ľavom lanku ako T_1 a v pravom ako T_2.



Pnutia sú po celej dĺžke konštantné, pretože kladky považujeme za nehmotné. Potom, ak za kladný smer a vezmeme zľava doprava, môžeme zapísať pohybové rovnice jednotlivých závaží:

$$\begin{aligned} m_1 g - 2T_1 &= -\tfrac{1}{2} m_1 a \\ T_2 - T_1 &= Ma \\ m_2 g - 2T_2 &= \tfrac{1}{2} m_2 a \end{aligned}$$

Z prvej a tretej rovnice si možno vyjadriť T_1, resp. T_2 a dosadiť do prostrednej. V tejto rovnici už ostane len jediná neznáma – zrýchlenie a. Po úprave preň dostávame:

$$a = 2g(m_1 - m_2)/(4M + m_1 + m_2)\,.$$

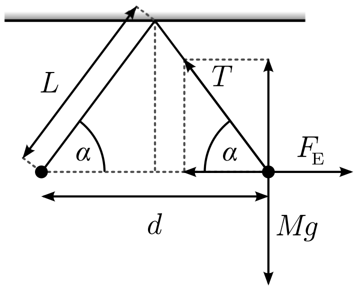
Je to pomerne komplikovaný výsledok. Na niekoľkých špeciálnych prípadoch sa však môžeme presvedčiť, že korešponduje s našou intuíciou. Môžeme si totiž všimnúť, že pre $M \gg m_{1,2}$ sa zrýchlenie zmenšuje a pre $m_1 = m_2$ sústava nezrýchľuje, v súlade s našimi očakávaniami.

Alternatívne riešenie cez energie: Keď sa veľké závažie posunie o vzdialenosť x, zväčší sa jeho kinetická energia o prácu na ňom vykonanú $W = Fx$, kde F je celková sila naň pôsobiaca. Keďže $F = Ma$, dostávame $W = Max$. Postranné závažia sa hýbu polovičným zrýchlením a prejdú polovičnú dráhu, na nich vykonaná práca preto bude $\frac{1}{4}(m_1 + m_2)ax$. Nárast kinetickej energie závaží musí kompenzovať úbytok potenciálnej energie $\frac{1}{2}(m_1 - m_2)gx$. Dostávame teda rovnosť:

$$\tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)g = \left(\tfrac{1}{4}m_1 + \tfrac{1}{4}m_2 + M\right)a\,.$$

Vyjadrením a z tejto rovnosti energií dostávame pôvodný výsledok.

$\boxed{25.}$ Označme bôb nehmotného bôbu L. Na každý z bôbov pôsobia tri bôby: gravitačný bôb, ťahový bôb a elektrický bôb od druhého bôbu tak ako na bôbe.



V ustálenom bôbe je výsledný bôb pôsobiaci na bôb nulový. Ak je bôb medzi bôbmi d a bôb bôbov M, potom toto dáva nasledujúce bôby:

$$T\cos\alpha = F_\mathrm{E} = k\frac{Q^2}{d^2}\,,$$
$$T\sin\alpha = Mg\,,$$

a teda

$$\frac{Q^2}{d^2}\operatorname{tg}\alpha = kMg\,.$$

Na pravom bôbe tohoto bôbu je bôb, ktorý je rovnaký pre rovnostranný aj rovnoramenný bôb. Môžme preto smelo napísať:

$$\frac{Q^2}{L^2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{L^2}\,,$$

kde sme využili, že pre rovnostranný bôb $d = L$, pre pravouhlý bôb $d = L\sqrt{2}$, ďalej že $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ a $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Bôb, na ktorý treba nabiť bôby, sme označili q. Teraz už hravo dostávame $q = Q\sqrt[4]{12}$. Bôb.

$\boxed{26.}$ Pavučinové vlákno musí okrem hmotnosti závažia M udržať aj vlastnú hmotnosť $m = \rho\ell S$, kde S je plocha kolmého prierezu vlákna. Maximálna nosná hmotnosť M je taká, že napätie spôsobené tiažou bude rovné medzi pevnosti

$$(M + m)g/S = \sigma\,.$$

Po úprave dostaneme:

$$M = m\left(\frac{\sigma}{\ell\rho g} - 1\right) ,$$

čo pre hodnoty zo zadania a $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ dáva hmotnosť závažia $M = 2\,780\,\mathrm{kg}$. Mary Jane si diétu dávať nemusí.

$\boxed{27.}$ Na začiatku je kinetická energia disku rovná $\frac{1}{2}I_1\omega^2$, kde $I_1 = \frac{1}{2}m_1R^2$ je moment zotrvačnosti disku. Keď naň položíme druhý disk, celková kinetická energia sústavy postupne klesne, a to tak, aby ostal moment hybnosti sústavy zachovaný:

$$I_1\omega = (I_1 + I_2)\omega_2 ,$$

pričom $I_2 = \frac{1}{2}m_2R^2$ je moment zotrvačnosti druhého disku. Kinetická energia sústavy bude:

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_2){\omega_2}^2 = \frac{1}{2}\frac{I_1^2}{I_1 + I_2}\omega^2 .$$

Rozdiel kinetických energií (pred a po pridaní disku) sa premení na teplo, ktoré zohreje disky:

$$Q = \frac{1}{2}I_1\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{{I_1}^2}{I_1 + I_2}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}\omega^2 .$$

Napokon zmenu teploty diskov vypočítame z rovnice $Q = \Delta T C(m_1 + m_2)$. Po dosadení za Q, I_1 a I_2 dostávame výsledok:

$$\Delta T = \frac{1}{4}\frac{m_1 m_2 R^2\omega^2}{C(m_1 + m_2)^2} .$$

$\boxed{28.}$ Úloha je zámerne zadaná tak, aby vás trochu zneistila. Ukážeme si, že úniková rýchlosť na nerotujúcej planéte *je rovnaká* bez ohľadu na smer, pod ktorým teleso vyhodíme. Využijeme pri tom vzťah pre potenciálnu energiu v centrálnom gravitačnom poli $E_\mathrm{p} = -GMm/r$, kde G je gravitačná konštanta, M je hmotnosť planéty, m je hmotnosť telesa a r je jeho vzdialenosť od stredu planéty.

Vieme, že pokiaľ telesu udelíme primalú rýchlosť, bude sa pohybovať po elipsovitej dráhe (až kým za nejaký čas opäť nenarazí do Zeme). Označme najväčšiu vzdialenosť telesa od Zeme počas pohybu ako d a jeho rýchlosť v tomto bode ako u. Tieto dve veličiny spolu súvisia prostredníctvom zákona zachovania energie i zákona zachovania momentu hybnosti

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - GMm/R = \tfrac{1}{2}mu^2 - GMm/d ,$$
$$mvR\sin\alpha = mud ,$$

kde α je uhol medzi smerom hodenia telesa a kolmicou na povrch Zeme v danom mieste.

Podmienka na opustenie gravitačného poľa je $d \to \infty$. Potom podľa tretieho Keplerovho zákona $T^2/a^3 =$ konšt. aj perióda obehu narastá nad všetky medze, až pri $d \to \infty$ sa teleso na Zem nikdy nevráti. Zistíme, pri akej rýchlosti v táto situácia nastane v závislosti od uhla α.

Na to, aby sa teleso mohlo dostať do vzdialenosti d, musí platiť

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - GMm/R + GMm/d \geq 0\,,$$

pretože kinetická energia nemôže nadobúdať záporné hodnoty. Ak sa má teleso dostať do ľubovoľne veľkej vzdialenosti, tak sa podmienka zjednoduší na

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - GMm/R \geq 0\,.$$

Zo zákona zachovania momentu hybnosti však vidíme, že ak teleso hádžeme konečnou rýchlosťou, so zväčšovaním vzdialenosti d klesá rýchlosť u v najvzdialenejšom bode elipsovitej dráhy do nuly. Pri skúmaní dráhy pre najmenšiu únikovú rýchlosť preto môžeme v predošlej rovnici položiť rovnosť. Po úprave máme

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - GMm/R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2GM/R}$$

bez ohľadu na uhol α.

Na záver ešte dodám, prečo som pri dokazovaní postupoval tak opatrne cez limity zväčšujúcich sa elíps. Je to kvôli tomu, že v skúmanom prípade, keď teleso opustí gravitačné pole Zeme, už jeho pohyb neprebehne po elipse, ale po parabole. V takom prípade najvzdialenejší bod trajektórie neexistuje a naša analýza formálne nemá zmysel.

$\boxed{29.}$ Ako nám zadanie prezrádza, odporová sila pôsobiaca na cyklistu pri rýchlosti v je $F = kv^2$, kde k je nejaká konštanta. Tak isto vieme, že ak sa cyklista pohybuje rýchlosťou v proti sile F, jeho výkon musí byť $P = Fv$. To vieme napríklad z toho, že pre prácu, ktorú vykoná na nejakej dráhe d, platí $W = Fd$ a z definície výkonu tiež $W = Pt$.

Oholenie zmenilo cyklistovi jeho koeficient odporu k. Pred oholením ho označme k_0, po ňom k. Tiež označme $v_0 = 50\,\mathrm{km/h}$. Zo zadania dostávame, že $P = k_0v_0^3$ a $P - p = kv_0^3$, takže

$$k = k_0(P-p)/P\,.$$

Rýchlosť v, ktorou sa bude pohybovať pri plnom výkone, tiež ľahko vypočítame:

$$P = kv^3 = v^3k_0(P-p)/P \quad \Rightarrow \quad v = v_0\sqrt[3]{P/(P-p)}\,,$$

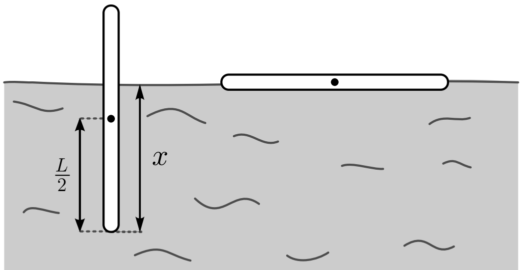
kde sme použili $P/k_0 = v_0^3$. No a na záver čas, ktorý mu bude trvať prejsť touto rýchlosťou 50 km bude:

$$T = 50\,\mathrm{km}/v = \sqrt[3]{(P-p)/P}\,\mathrm{hod}\,.$$

Pre zaujímavosť, pri profesionálnych cyklistoch sa hodnota P pohybuje okolo 450 W a pri rýchlostiach okolo 50 km/h môže byť p niekoľko málo wattov. Pre hodnotu $p = 3\,\mathrm{W}$ si cyklista oholením zlepší čas približne o 8 sekúnd. Skúste si pozrieť výsledky niektorej z časoviek na veľkých pretekoch a uvidíte, či môže byť takýto zisk dôležitý.

$\boxed{30.}$ Paličku budeme považovať za veľmi tenkú. Však od toho je to palička a nie brvno. Premyslime si, aké polohy by mohla palička v rovnováhe zaujať. Hneď sa nám ponúkajú dve polohy znázornené na obrázkoch. Polohy, v ktorých je palička šikmo, uvažovať netreba. Vtedy sa síce vztlaková a tiažová sila kompenzujú, no pôsobia pozdĺž rôznych priamok (pôsobiskom vztlakovej sily je ťažisko *ponorenej* časti paličky) a ich momenty síl vykompenzované nie sú. Šikmo plávajúca palička sa preto musí otočiť do jednej z polôh na obrázkoch. Z toho zároveň vyplýva, že vždy je stabilná práve jedna z týchto dvoch polôh a druhá musí byť labilná. Ktorá je ktorá určíme cez energie.

Nazvime polohy na obrázkoch ako „poloha hore“ a „poloha na hladine“. Palička bude preferovať polohu, ktorej celková potenciálna energia bude menšia. Podstatné tu je slovo celková, pretože pri výpočtoch nesmieme zabúdať na vodu, ktorá pri zmene polohy paličky zmení svoju polohu tiež.



Ak budeme merať výšky ťažísk od hladiny, v polohe hore je výška ťažiska paličky $-(x-\frac{1}{2}L)$. Všimnite si, že toto číslo je kladné, ak je z paličky ponorená menej ako polovica, presne tak, ako očakávame. Pri prechode do polohy na hladine sa ťažisko paličky dostane do nulovej výšky, ale z hladiny sa na miesto, kde bola pred tým palička, musí dostať voda. Hmotnosť tejto vody je rovnaká ako hmotnosť paličky, pretože presne to je podmienka na rovnováhu tiažovej a vztlakovej sily. A po presune na miesto, kde bola palička sa ťažisko tejto vody dostane do výšky $-\frac{1}{2}x$. Pre potenciálne energie môžeme teda písať

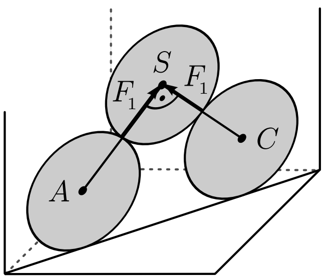
$$E_{|} = -mg(x - \tfrac{1}{2}L) \,,$$
$$E_{-} = -\tfrac{1}{2}mgx \,.$$

Ako už bolo povedané, palička bude ochotná plávať v polohe hore ak $E_{|} < E_{-}$, alebo

$$-x + \tfrac{1}{2}L < -\tfrac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad x > L$$

Toto znamená, že palička musí byt ponorená aspoň toľko, ako je dlhá a teda takto plávať nebude *nikdy*.

$\boxed{31.}$ Najprv zistime, akou silou tlačí každá z dolných gúľ na vrchnú. Sú to štyri rovnako veľké sily, no na určenie ich veľkosti F_1 potrebujeme poznať ich smer. Preto si nakreslime rez škatuľou ponad uhlopriečku podstavy.

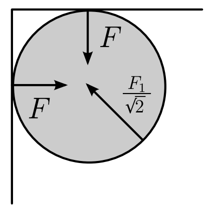


Uhol ASC na predošlom obrázku je pravý. Najjednoduchšie sa o tom možno presvedčiť tak, že si predstavíme ešte šiestu guľu, ktorá by sa dotýkala štyroch spodných gúľ zdola. Stredy všetkých šiestich gúľ tvoria vrcholy pravidelného osemstenu. Zo symetrie je preto jasné, že horná a najspodnejšia guľa spolu s dvojicou náprotivných gúľ na dne škatule tvoria rovnaký štvorec, aký tvoria štyri gule na dne škatule. Sily F_1 preto pôsobia pod uhlom $45\,^\circ$ k podložke.

Z rovnováhy zvislých zložiek síl pôsobiacich na hornú guľu máme:

$$4F_1 \sin 45\,^\circ = Mg \qquad \Rightarrow \qquad F_1 = \tfrac{1}{4}Mg\sqrt{2}\,.$$

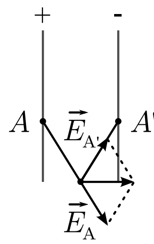
Rovnakou silou pôsobí aj vrchná guľa na každú guľu na dne škatule. Neodtlačí ich však, pretože na tieto gule ešte pôsobia aj steny škatule silami F, ktorých veľkosť vlastne chceme spočítať. Jednotlivé gule na dne škatule na seba nepôsobia žiadnymi silami, pretože sú od seba odtláčané hornou guľou.



Ak sa pozrieme na horizontálne zložky síl pôsobiacich na niektorú zo štyroch gúľ, zistíme že

$$F\sqrt{2} = F_1 \cos 45\,^\circ \qquad \Rightarrow \qquad F = \tfrac{1}{8}Mg\sqrt{2}\,.$$

$\boxed{32.}$ Elektrické pole v danom bode je dané ako súčet elektrických polí od všetkých bodov platní kondenzátora. Keď sa pozrieme na situáciu spredu, vidíme, že elektrické pole od ľubovoľného bodu A na jednej doske kondenzátora, sa v inom ako kolmom smere vyruší poľom od protiľahlého bodu A' na druhej doske. Tak isto sa môžeme na situáciu pozrieť zospodu alebo z ľubovoľného uhla s vždy rovnakým pozorovaním. Teda elektrické pole v úlohe smeruje kolmo na dosky od kladnej k zápornej.



Aká je jeho veľkosť? Predstavme si, že skúmame elektrické pole hlboko v kondenzátore v strede medzi platňami. Toto elektrické pole je tu dané súčtom elektrických polí od štyroch štvrťrovín kondenzátora a má veľkosť E. Od každej štvrťroviny je elektrické pole rovnaké, lebo štvrťroviny sú rovnaké a pole je len v smere kolmom na platne. Preto od jednej štvrťroviny má pole veľkosť $\frac{1}{4}E$, čo je aj výsledok našej úlohy.

33. Teraz sa naozaj tuho zamysli. Ako závisí časový rozdiel medzi prechodmi oboch družíc tým istým bodom od polohy tohoto bodu na dráhe? Máš? Tak fajn. Obidve družice obiehajú po tej istej dráhe, takže vykonávajú úplne rovnaký pohyb, len jedna je trochu omeškaná za druhou. Keďže je ich pohyb úplne identický, tak je toto omeškanie stále rovnaké, takže časový rozdiel je stále rovnaký.

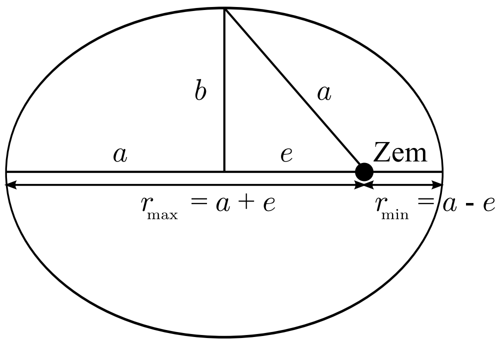
Teraz družice už naozaj pustíme na ich obežnú dráhu. Druhý Keplerov zákon (pre fyzikov zákon zachovania momentu hybnosti) hovorí, že čím je družica ďalej od planéty, tým ide pomalšie. Inak povedané $V_{\max} r_{\max} = V_{\min} r_{\min}$. Rozdiel medzi časmi prechodu prvej a druhej družice bodom najbližššie k planéte je rovnaký ako medzi časmi ich prechodu bodom najďalej od planéty (označím si ho t). Takže musí platiť:

$$D/v_{\max} = t = d/v_{\min} ,$$

pričom D je vzdialenosť medzi družicami v bode najďalej od planéty. Z druhého Keplerovho zákona vidím, že:

$$\frac{v_{\min}}{v_{\max}} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} ,$$

čo dosadím do predošlého vzťahu a dostanem: $D = d r_{\max}/r_{\min}$. Už len stačí zistiť pomer medzi vzdialenosťami najbližšie a najďalej od planéty v závislosti od malej a veľkej polosi.



Keď sa zamyslím nad tým, ako je definovaná elipsa, tak časom prídem na to, že z Pytagorovej vety platí $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, pričom e je excentricita, alias vzdialenosť planéty (ohniska elipsy) od jej stredu. Ďalšie zamyslenie ukáže, že:

$$\frac{r_{\min}}{r_{\max}} = \frac{a-e}{a+e} ,$$

do čoho už len dosadím za e, celé to dosadím do vzťahu pre D, a dostanem:

$$D = d\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} .$$

34. Pri riešení využijeme zákon zachovania energie. Nájdime, akou rýchlosťou sa pohybuje voda v momente, keď je hladina vody v zvislej trubici vo výške x. Ak sa dohodneme, že nulovú hladina je na úrovni vodorovnej trubice, tak pre energie platí

$$E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}xmg(x/h) = \tfrac{1}{2}mgx^2/h\,,$$
$$E_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}mv^2,$$

kde $m = Sh\rho$ je hmotnosť vody v trubici. Tieto výsledky sa však až nápadne podobajú pre energiu systému „závažie na pružine“, len namiesto tuhosti pružiny nám vyšla kombinácia veličín mg/h.

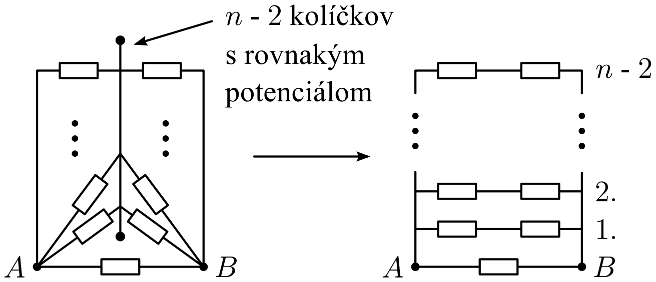
To však znamená, že priebeh $x(t)$ bude počas vytekania úplne rovnaký, ako pre závažie na pružine s tuhosťou mg/h, ktorá bola na počiatku stlačená práve o h. Perióda kmitov by vyšla:

$$T = 2\pi\sqrt{h/g}\,.$$

Pohyb vody v trubici od odstránenia prepážky po vytečenie z trubice však zodpovedá iba jednej štvrtiny periódy, preto

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{h/g}\,.$$

$\boxed{35.}$ Desivé, čo? Tu je dôležité uvedomiť si, že všetkých $n-2$ kolíčkov, na ktoré pri meraní nepripájame svorky ohmmetra, je úplne ekvivalentných. Z tejto „symetrie“ vypláva, že na všetkých týchto kolíčkoch je rovnaký elektrický potenciál. To však znamená, ako sme to už čítali vo vzoráku úlohy č. 21, že vodičmi spájajúcimi tieto kolíčky neprechádza žiadny prúd a preto ich môžeme odpojiť. Ak si body, medzi ktorými meriam odpor, označím ako A a B, tak sme práve schému zjednodušili nasledovne:

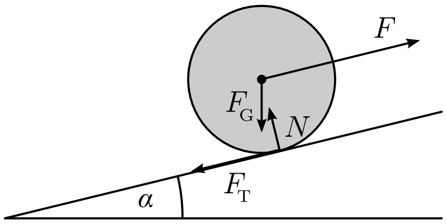


No a aha ho, je z toho jednoduché paralelné zapojenie, takže:

$$R_\mathrm{celkom}^{-1} = R^{-1} + \tfrac{1}{2}(n-2)R^{-1},$$

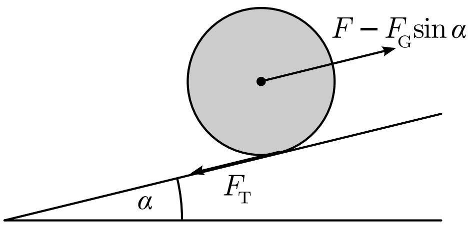
Po drobných úpravách dostaneme $R_\mathrm{celkom} = 2R/n$.

$\boxed{36.}$ Najprv si nakreslime sily pôsobiace na valec. Okrem sily F zo zadania ide o gravitačnú silu $F_\mathrm{G} = Mg$, treciu silu F_T a silu od podložky N.



Obr. 2: Sily pôsobiace na valec

Sila N bude práve taká veľká, aby kompenzovala zložku gravitačnej sily kolmú na podložku (teda $N = F_\mathrm{G} \cos\alpha$). Ani jedna z týchto síl neprispieva k roztáčaniu valca, preto ich už ďalej nemusíme uvažovať a budeme sa zaoberať výlučne silami pôsobiacimi v smere rovnobežnom s podložkou.



Obr. 3: Zložky síl pôsobiacich na valec rovnobežné s naklonenou rovinou

Aby valec neprešmykoval, musia byť zrýchlenie a a uhlové zrýchlenie ε vo vzťahu: $R\varepsilon = a$. Zrýchlenie *ťažiska* vypočítame z Newtonovho zákona $F_\mathrm{v} = Ma$, kde F_v je súčet všetkých síl pôsobiacich na valec. V našom prípade teda:

$$F_\mathrm{v} = F - F_\mathrm{G} \sin\alpha - F_T \,.$$

Uhlové zrýchlenie vypočítame z rovnice $M = I\varepsilon$, kde M je súčet momentov síl pôsobiacich na valec a I je moment zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Jediná sila s nenulovým momentom je trecia sila: $M = RF_\mathrm{T}$, moment zotrvačnosti valca je $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Po dosadení do rovnice $R\varepsilon = a$ za a a ε a zopár úpravách dostávame:

$$F_\mathrm{T} = \tfrac{1}{3}(F - F_\mathrm{G} \sin\alpha) \,.$$

Ak je koeficient trenia f, pre treciu silu platí:

$$F_\mathrm{T} \leq Nf = F_\mathrm{G} f \cos\alpha \,.$$

Po dosadení dostávame podmienku:

$$f F_\mathrm{G} \cos\alpha \geq \tfrac{1}{3}(F - F_\mathrm{G} \sin\alpha) \,,$$

teda:

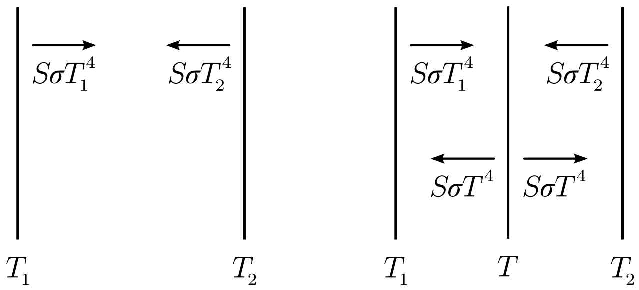
$$f \geq \frac{1}{3}\left(\frac{F}{Mg} - 1\right) \operatorname{tg}\alpha \,.$$

$\boxed{37.}$ Ako platňu 1 označme platňu s teplotou T_1, podobne pre druhú platňu. Do priestoru medzi platňami vyžaruje platňa 1 tepelným výkonom $\sigma S T_1^4$ smerom k platni 2, platňa 2 tepelným výkonom $\sigma S T_2^4$ smerom k platni 1. Tu sme využili predpoklad zo zadania, podľa ktorého sú platne veľmi blízko pri sebe v porovnaní s tým, aké sú veľké.

Medzi platňami bude teda nenulový tok tepla, podľa zadania P_1, pre ktorý platí

$$P_1 = \sigma S \left(T_1^4 - T_2^4\right) .$$

Teraz medzi platne vložíme tretiu platňu a tá bude pohlcovať teplo, ktoré na ňu vyžarujú zvyšné dve platne a sama bude vyžarovať teplo, ktoré bude prislúchať jej teplote T.



V ustálenom stave vyžiari stredná platňa toľko tepla, koľko ho pohltí, takže

$$\sigma S\, T^4 = \sigma S \left(T_1^4 + T_2^4\right) \quad \Rightarrow \quad T^4 = \tfrac{1}{2}(T_1^4 + T_2^4) .$$

Medzi platňou 1 a strednou platňou teraz bude výsledný tok tepla smerom k strednej a s veľkosťou $\sigma S\,(T_1^4 - T^4)$. Medzi strednou platňou a platňou 2 bude tiecť výsledný tok tepla smerom k platni 2 a s veľkosťou $\sigma S\,(T^4 - T_2^4)$. Prirodzene, tieto dva toky sú rovnaké, pretože v rovnováhe sa na strednej platni nezachytáva žiadne teplo. Dosadením za T do jedného z týchto dvoch vzťahov potom dostaneme

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\sigma S \left(T_1^4 - T_2^4\right) = \tfrac{1}{2} P_1 .$$

$\boxed{38.}$ Všimnime si, že koberec roztočený okolo stredu si môžeme predstaviť ako štyri nezávisle sa pohybujúce koberce roztočené okolo (spoločného) vrchola. Tieto koberce však majú len polovičnú dĺžku strany a štvrtinovú hmotnosť, preto bude treba preškálovať aj ostatné veličiny. Konkrétne nás bude zaujímať, ako sa preškáluje uhlové zrýchlenie spočítané ako $\varepsilon = M_\mathrm{T}/J$.

Malý koberec si možno matematicky predstaviť ako zmenšenie veľkého koberca. Pomyselne si rozdeľme malý aj veľký koberec rovnakým spôsobom na množstvo malých častí. Prirodzene nám vznikne zobrazenie, ktoré každej časti veľkého koberca priradí časť malého koberca (a naopak).

Teraz skúmajme, ako sa pri tomto zobrazení preškálujú fyzikálne veličiny. Nové vzdialenosti budú polovičné, tj. $r' = \frac{1}{2}r$. Plocha každej časti koberca, ako aj jeho hmotnosť, sa zmenšia štvornásobne. Pre moment zotrvačnosti malého koberca preto dostávame:

$$J' = \sum_i m_i' r_i'^2 = \tfrac{1}{16} \sum_i m_i r_i^2 = \tfrac{1}{16} J ,$$

kde index i označuje jednotlivé časti kobercov.

Pozrime sa, ako sa preškáluje moment trecej sily. Každá časť tlačí na podložku štyrikrát menšou silou pri polovičnom ramene. Celkový moment trecej sily sa preto preškáluje ako:

$$M'_{\mathrm{T}} = \sum_i F'_{\mathrm{T},i} r'_i = \tfrac{1}{8} \sum_i F_{\mathrm{T},i} r_i = \tfrac{1}{8} M_{\mathrm{T}}$$

a uhlové zrýchlenie $\varepsilon' = M'_{\mathrm{T}}/J' = 2\varepsilon$ bude preto dvojnásobné.

Nakoniec môžeme odpovedať na zadanú otázku. Malý koberec sa zastaví za čas $t' = \omega/\varepsilon' = \frac{1}{2}t$, teda za polovičný čas. Na základe úvah z prvého odstavca vieme, že za ten istý čas sa zastaví aj koberec pôvodnej veľkosti roztočený okolo stredu.

$\boxed{39.}$ Začneme zdanlivo z iného súdka, ktorý je ale v skutočnosti presne ten súdok o ktorom je táto úloha. Svetlo sa z bodu A do bodu B pohybuje po takej dráhe, ktorá trvá najkratší čas zo všetkých možných dráh. Tzv. Fermatov princíp. Pri prechode svetla z jedného prostredia, kde je jeho rýchlosť n krát väčšia (index lomu) ako v druhom prostredí, je dráha, ktorá trvá najkratší čas zalomená, pričom pre uhly od kolmice dopadu platí $\sin\alpha/\sin\beta = n$. tzv. Snellov zákon lomu. To, čo rieši chlapec je ale presne rovnaká úloha: ako sa dostať za najkratší čas k dievčaťu pričom prechádza rozhraním „za ktorým“ je už jeho rýchlosť n krát menšia. Ak ešte stále analógiu nevidíte, predstavte si dievča na obrázku pod osou kvetinárstiev vo vzdialenosti y a presvedčte sa že, je to rovnaká úloha. Chlapec musí teda bežať tak, aby pre uhly pred a po nákupe platil zákon lomu. Keď označíme vzdialenosť kvetinárstva v ktorom chlapec nakúpi materiál od začiatku radu ako l, a vyjadríme sínusy pomocou pomerov strán v trojuholníkoch, dostávame:

$$\frac{l/\sqrt{x^2+l^2}}{(z-l)/\sqrt{(z-l)^2+y^2}} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{1}$$

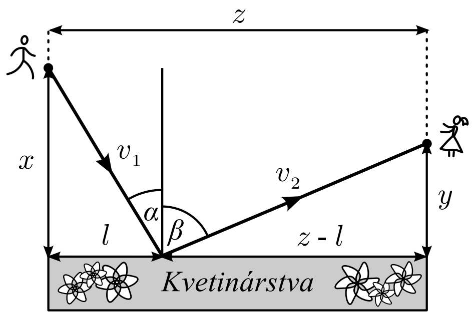
V ideálnom svete by sme túto rovnicu vyriešili, získali tak l a celkový čas chlapca dostali ako:

$$t = \frac{\sqrt{x^2+l^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(z-l)^2+y^2}}{v_2}\,.$$

Keď sa ale schuti zahryzneme do spomínanej rovnice zistíme, že je kvartická a nevieme s ňou pohnúť. Skúsime sa na ňu ale pozrieť odborným okom[1]. Skúsime riešenie uhádnuť. Hádame ale s istou dávkou umu a predpokladu, že človek, čo zadával tento príklad nebol úplné zviera[2]. Chlapec sa s kyticou pohybuje pomalšie a keďže $y < x$, môžeme hádať že kúpi kyticu kdesi tak aby $l > \frac{1}{2}z$, t. j. tak aby vzdialenosť behu s kyticou bola menšia. Ak poznáme pytagorejské trojuholníky, do očí nám hneď padne skúsiť $l = 800$. Potom totiž máme dva trojuholníky so stranami $(600, 800, 1000)$ a $(300, 400, 500)$.

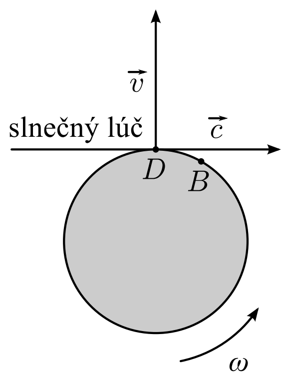
[1] http://www.professionaleye.com/

[2] Niektorí ho síce volajú Hroch, ale doktori nám potvrdili, že je človek.



Dosadením do rovnice pre lom veľmi rýchlo zistíme, že tento tip vyšiel, lebo túto rovnicu spĺňa. Tieto hodnoty potom dávajú celkový čas 4 minúty a 10 sekúnd. Poučenie na záver. Chlapci, ak prebehnete jeden a pol kilometra týmto tempom, budete spotený ako kôň a smrdieť ako dva kone. Pred poriadnym faux pas vás na rande zachráni len kvalitný dezodorant, spomínaná kytica a kvalitná výhovorka prečo ste sa museli hnať ako tri kone aby ste prišli načas.

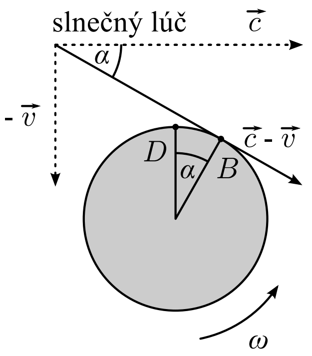
$\boxed{40.}$ Keďže sa Zem hýbe okolo Slnka, svitanie uvidíme ešte predtým ako sa v dôsledku rotácie Zeme presunieme na jej stranu privrátenú k Slnku. Inými slovami, z obrázka 4 môžeme odpozorovať, že tým, že sa Zem pohybuje rýchlosťou v okolo Slnka aj odvrátená strana Zeme stihne zraziť nejaké lúče predtým než utečú do temnoty vesmíru.



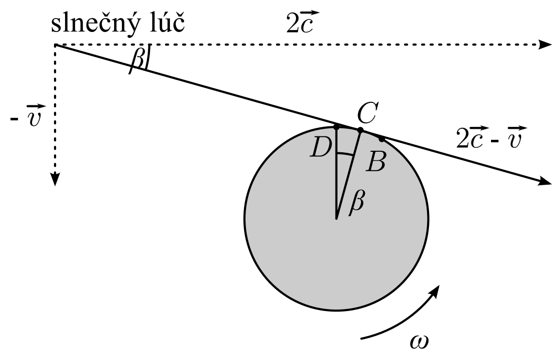
Obr. 4: Odvrátená strana stihne zraziť nejaké lúče

Keď prejdeme do sústavy spojenej s ťažiskom Zeme znázornenej na obrázku 5, slnečné lúče budú prichádzať pod uhlom α oproti pôvodnému smeru. Z trojuholníka pre skladanie rýchlostí platí $\operatorname{tg}\alpha = v/c$. Prvý ranný slnečný lúč teda uvidíme už v bode B a nie v bode D, ako by sme naivne mohli predpokladať. Ak by bola rýchlosť svetla dvojnásobná uhol dopadu lúčov β by bol menší (viď. obrázok 6), platilo by preň $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}v/c$ a miesto prvého ranného rozbresku by bolo posunuté do bodu C. Keď si teda sedím v noci a osamote počítam do rána najnovšie FKS, v prvom prípade uvidím slnko už v bode B, zatiaľ čo v druhom prípade budem musieť čakať kým sa vďaka rotácií Zeme dotočím do bodu C. Zem sa otáča uhlovou rýchlosťou ω a teda mi táto cesta bude trvať $T = (\alpha - \beta)/\omega$. Vyjadrené pekne pomocou veličín čo sme používali, dostaneme

$$T = \frac{\operatorname{arctg}(v/c) - \operatorname{arctg}(v/2c)}{\omega} \,. \tag{2}$$



Obr. 5: Klasická rýchlosť svetla



Obr. 6: Rýchlosť svetla $2c$

Keď sa nám nechce hádzať číselká do kalkulačky, môžeme si pomôcť ešte nasledovnou úvahou. Pre malé hodnoty x je $\mathrm{arctg}(x)$ približne rovné x. Pomer v/c je určite malé číslo a keď vyjadríme rýchlosť obehu okolo Slnka ako $v = 2\pi r_{\mathrm{SZ}}/t_{\mathrm{rok}}$, kde r_{SZ} je vzdialenosť Zeme od Slnka a t_{rok} je rok a uhlovú rýchlosť obehu okolo vlastnej osi vyjadríme ako $\omega = 2\pi/t_{\mathrm{deň}}$, kde $t_{\mathrm{deň}}$ je deň. Využijúc $r_{\mathrm{SZ}}/c \approx 8$ minút, dostaneme $T = \frac{4}{365}$ minúty, čiže asi $\frac{2}{3}$ sekundy. Ak pôvodný vzťah naťukáme do kalkulačky dostaneme 0,68 sekundy. Ain't bad!

Situácia je v skutočnosti omnoho zložitejšia, pretože z dôvodu konečnej vzdialenosti Slnka od Zeme slnečné lúče v skutočnosti nedopadajú kolmo na vektor rýchlosti Zeme.

$\boxed{41.}$ Pri kruhovom pohybe okolo planéty plynie z rovnosti gravitačnej a odstredivej sily

$$\begin{aligned} \frac{mv_{\mathrm{k}}^2}{R} &= A\frac{mM}{R^2} + B\frac{mM}{R^3}\,, \\ v_{\mathrm{k}}^2 &= A\frac{M}{R} + B\frac{M}{R^2}\,. \end{aligned}$$

Ďalej vieme, že aby sonda unikla z gravitačného poľa planéty, musí jej byť udelená taká (úniková) rýchlosť, aby príslušná kinetická energia bola väčšia alebo rovná rozdielu jej potenciálnej energie $\Delta E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(r \to \infty) - E_{\mathrm{p}}(r = R)$ medzi veľmi veľkou vzdialenosťou a vzdialenosťou R. Rozdiel potenciálnych energií ΔE určíme ako integrál sily po dráhe

$$\begin{aligned} \Delta E_{\mathrm{p}} &= \int_R^\infty \left(A\frac{mM}{r^2} + B\frac{mM}{r^3} \right) \mathrm{d}r \\ &= \left[-A\frac{mM}{r} - \frac{1}{2}B\frac{mM}{r^2} \right]_{r=R}^{r=\infty} \\ &= A\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}B\frac{mM}{R^2}\,. \end{aligned}$$

Všimnite si, že prvá časť ΔE_{p} je rovnaká, ako pre „obyčajné“ gravitačné pole úmerné $1/r^2$. Niet sa čomu čudovať. Veď presne z tejto časti gravitačnej sily sme tento výraz dostali aj v našom prípade! Tu vlastne stačilo využiť známy výsledok a zaobišli by sme sa aj bez integrálov. Pre člen sily úmerný $1/r^3$ sa však bez integrovania zaobísť nedá.

Pre únikovú rýchlosť dostávame rovnicu

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{u}}^2 = A\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}B\frac{mM}{R^2}$$
$$v_{\mathrm{u}}^2 = 2A\frac{M}{R} + B\frac{M}{R^2},$$

Tým pádom sme získali dve lineárne rovnice o dvoch neznámych, ktoré bez problémov vyriešime. Pre gravitačné konštanty A a B vyjde

$$A = \frac{R}{M}\left(v_{\mathrm{u}}^2 - v_{\mathrm{k}}^2\right)$$
$$B = \frac{R^2}{M}\left(2v_{\mathrm{k}}^2 - v_{\mathrm{u}}^2\right),$$