Milí čtenáři,

v ruce držíte sbírku úloh 26. ročníku Fyzikálního Náboje. Ve sbírce se nachází všechny úlohy, se kterými jste se v tomto ročníku mohli na soutěži potkat. K úlohám přikládáme i vzorová řešení, ze kterých se můžete mnohé naučit. Pokud byste některému vzorovému řešení nerozuměli, neváhejte sa nám ozvat, vše objasníme.

Tato sbírka by nikdy nevznikla bez výrazné pomoci mnohých lidí, kteří se konec konců podíleli na celém vývoji Fyzikálního Náboje. Autory Fyzikálního Náboje jsou převážně studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě a většina z nich se také podílí na organizování Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS – https://fks.sk/). V České Republice s překladem a organizací pomohli převážně studenti Matematicko-fyzikální fakulty, kteří se podílejí na české verzi FKS, tedy FYKOSu.

Fyzikální Náboj pokračuje ve své mezinárodní tradici. V roce 2023 se do Náboje zapojily kromě Bratislavy také Košice, Praha, Ostrava, Budapešť, Gdańsk a Madrid. Výsledky vzájemného souboje si můžete prohlédnout na našich stránkách. Za mezinárodní spolupráci děkujeme lokálním organizátorům: Patrik Rusnák (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Brygida Mielewska a Kamil Żmudziński (Gdańsk) a José Francisco Romero García (Madrid).

FYKOS je korespondenční fyzikální soutěž. Přibližně jednou za měsíc zveřejňujeme zajímavé fyzikální úlohy, jejichž řešení nám můžete elektronicky poslat. My vám příklady obodujeme, opravíme a pošleme zpět. Ty nejlepší z vás zveme na začátku a na konci školního roku na týdenní zážitkové soustředění. Více informací najdete na stránce https://fykos.cz/.

Jménem celého organizačního týmu věříme, že jste si v roce 2023 Fyzikální Náboj užili a doufáme, že vás všechny uvidíme i příští rok! Ať už v roli soutěžících, nebo nových organizátorů.

Jakub Kliment – hlavní organizátor v ČR

Jaroslav Valovčan – hlavní organizátor

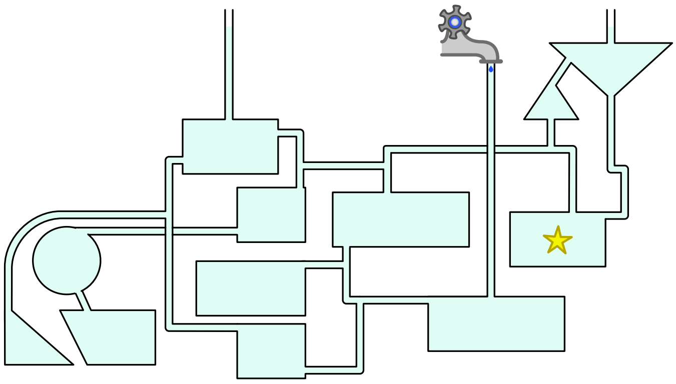
Sbírku sestavili:

Martin ‚Kvík' Baláž
Filip Brutovský
Jozef Csipes
Paulína ‚Jonka' Dujavová
Sára Folajtárová
Lucia ‚Želé' Gelenekyová
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Michal ‚Dvojka' Horanský
Jakub ‚Andrej' Kliment
Justína ‚Pľyš' Nováková
Patrik ‚PA3K' Rusnák
Adam Škrlec
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös
Matej Zigo

Výsledky soutěže, archiv úloh a další informace najdete na stránce https://physics.naboj.org/.

Zadání

1 U Matfyzu opravují vodovodní potrubí. Adam šel kolem pilně pracujících dělníků a všiml si zajímavé sítě potrubí a vodních nádrží, která je zobrazená na obrázku. Kolikátá v pořadí se naplní nádrž označená hvězdičkou, až dělníci pustí vodu z vodovodního kohoutku?



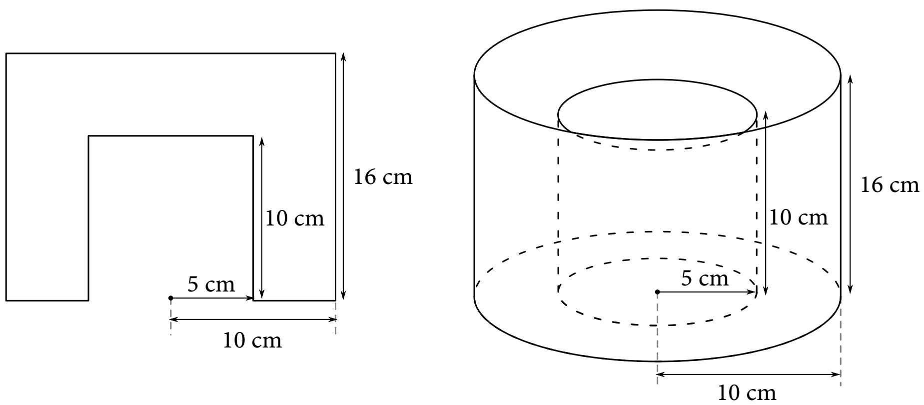
2 Průměrný člověk má 100 000 vlasů, přičemž každý vyroste o 15 cm za rok. O kolik metrů vlasů víc bude mít Průměrný člověk zítra v tento čas?

3 Tomáš se zase jednou díval v televizi na nějaké formule. Naladil si přímý přenos z Ameriky, kde komentátor při závodech oznámil, že 200 mil za hodinu je jedno fotbalové hřiště ze sekundu. Ihned si pomyslel, jak dobře to Američané mají vymyšlené s těmi jejich jednotkami. Radši si to však ověřil a zjistil, že komentátor vůbec neměl pravdu. O kolik fotbalových hřišť za sekundu se komentátor zmýlil?

Jedno hřiště amerického fotbalu je dlouhé 120 yardů a jedna míle je 1760 yardů.

4 Ani firma *Ziggo & Marinelli*, přední savojský výrobce mletých piškotů, se nevyhnula inflaci. Na rozdíl od konkurence však svoje výrobky nezdražili, jen vylepšili tvar nádoby. Ta má nově tvar válce s poloměrem 10 cm a výškou 16 cm, přičemž prostřední kruhová část jejího dna s poloměrem 5 cm je zvýšená o 10 cm.

Jaká je hustota mleté piškotoviny, pokud plné balení váží 350 g a jeho prázdný obal 40 g?

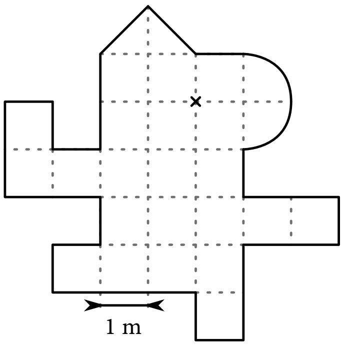


5 Juro často běhá. Nedávno si dokonce koupil chytré hodinky. Po měsíci používání mu pogratulovaly, že jeho rychlost při běhu dosáhla 17 km/h. Teď ale venku stále prší a Juro musí běhat doma na běžícím páse s délkou 2 m. Rychlost pásu nastavil na 5 m/s, rozklusal se a skočil přímo do jeho středu. Za jak dlouhý čas běžící Juro z pásu spadne?

6 Pistolník Sebastián stojí uprostřed náměstí kdesi na divokém západě a je obklíčen bandity. Dokázal by jim ještě uniknout, ale potřeboval by něčím odpoutat jejich pozornost. Naštěstí je po včerejší pitce po náměstí rozlitá kaluž ohnivé vody. Sebastiánovi stačí vystřelit z revolveru do země, aby celá kaluž vzplála. Plamen se po povrchu kaluže šíří všemi směry rychlostí 2 m/s.

Jak dlouho potrvá, než se celá kaluž rozhoří, když Sebastián střelí na místo označené křížkem?

Čtvrereček sítě má stranu dlouhou 1 m.



7 Charitativní běh Wings for Life probíhá následovně: všichni běžci vystartují ve stejný čas. Půl hodiny po nich vystartuje auto rychlostí 14 km/h, které po každé další půlhodině skokově zrychlí. Když auto dohoní některého z běžců, musí dotyčný svůj běh ukončit.

Historický rekord v takto uběhnuté vzdálenosti je 92,14 km. Jak dlouhou dobu trval tento rekordní běh, když se auto postupně pohybuje rychlostmi 14, 15, 16, 17, 18, 22, 26, 30 a 34 km/h a po dosažení této rychlosti už dále nezrychluje?

8 Odevzdejte součet čísel těch výroků, které jsou pravdivé:

1	Bežné jističe v bytě mají nominální hodnoty okolo 150 A.
2	Galvanický článek je zdroj stejnosměrného napětí.
4	Elektrická síla může působit i mezi izolanty.
8	Zahřívání vodičů snižuje jejich elektrický odpor.
16	Rozměr jednotky coulomb je ampér za sekundu.
32	Proudy menší než 1 A nejsou pro člověka nebezpečné.
64	Na paralelně zapojené dvojici rezistorů může být napětí různé.
128	Ačkoli je v zásuvce střídavé napětí, rychlovarná konvice by fungovala i na stejnosměrné.

9 Eva se po poslední návštěvě u Adama zapřísáhla, že mu vymaluje celý pokoj, takže si koupila pětilitrové vědro koncentrované barvy. Vědro je pomalované různými nápisy: vedle obrázků polárních plání a zmínek o nepřekonatelné alabastrové bělosti na něm svítí i údaj o hmotnosti obsahu 7,5 kg a oduševněné doporučení, že barvu je nejlepší ředit v poměru 0,5 kg vody na 1 kg barvy.

Eva se nechce obtěžovat s hledáním kuchyňské váhy a raději by na ředění použila pouze osvědčenou naběračku. V jakém **objemovém** poměru by měla barvu ředit?

Výsledek odevzdejte ve tvaru objem barvy : objem vody.

10 Organizátoři Náboje se v letních měsících řídí známým heslem

> *„Chladné drinky v ruce mají a brčkem z nich upíjejí."*

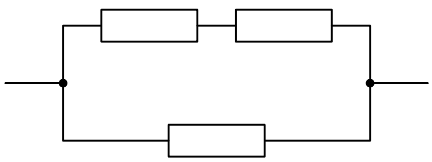
Proto jim Pľyš připravuje *Polibek babičky Justíny*, lahodný nápoj podávaný při teplotě 7 °C. Z vodovodu jí bohužel teče jen voda o teplotě 20 °C. Aby ji zchladila, hodila do ní kostku ledu s hmotností 1 kg a teplotou 0 °C.

Jaký objem vody s požadovanou teplotou může takto Pľyš vyrobit?

11 Maťo se Sárou se ve jménu fyziky rozhodli zažít na vlastní kůži stav beztíže. Pro tyto účely si zařídili výlet balonem, ze kterého plánovali vyskočit. Ve výšce 200 metrů se Maťo natěšeně vrhl přes palubu. Až po 3 sekundách si Sára všimla, že si zapomněl padák a zděšeně vykřikla. V jaké výšce bude Maťo, když ji uslyší?

Balon stojí celý čas na místě. Zpomalení kvůli odporu vzduchu zanedbejte.

12 Vzali jsme si tři stejné rezistory a změřili jejich odpor při sériovém a paralelním zapojení. Výsledky se lišily o 8 Ω. Jaký je odpor zapojení na obrázku?



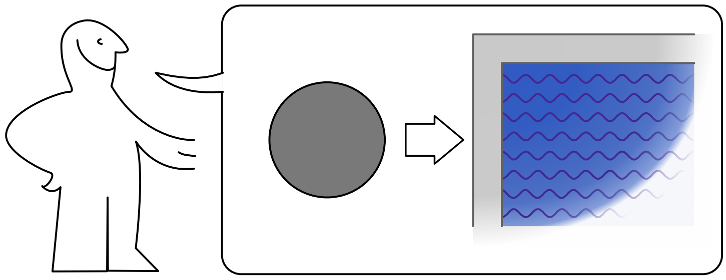
13 Hasič Fero slaňuje z vysoké budovy. Právě slezl na konec lana dlouhého 30 m. Když se teď plnou silou odrazí nohama od budovy, dokáže se dostat do horizontální vzdálenosti 8,4 m od zdi. Do jaké výšky dokáže Fero vyskočit svisle nahoru na rovné zemi?

14 Kubko se právě rozběhl na dálnici, když ho najednou začaly znepokojovat vibrace od kol. Co může způsobit například takový ventil od pneumatiky vážící 10 g? Jakou zdánlivou hmotnost by pociťovalo kolo, kdyby byl ventil vzdálený 20 cm od osy otáčení a auto by jelo rychlostí 500 km/h? Předpokládejte, že vzdálenost ventilu od osy otáčení je daleko větší než jeho vzdálenost od vnějšího okraje kola.

Za zdánlivou hmotnost považujeme hmotnost tělesa, které by na Zemi působilo na váhu stejně velkou silou.

15 Jonka byla na dovolené. U její chatky byl dokonce i obdélníkový bazén s rozměry $a \times b$. Při ubytování jí majitel suše oznámil, že bazén je třeba na noc zakrývat. Nechal jí ale pouze homogenní kruhový kryt s poloměrem $r \ll a, b$. Jonce je jasné, že celý bazén nezakryje, ale protože je poctivá, chce z něho alespoň zakrýt co největší část.

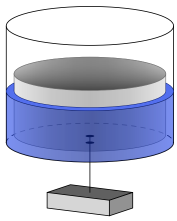
Jaká je největší možná plocha bazénu, kterou může zakrýt, aniž by kryt spadl do bazénu?



16 Marcel má už řidičský i letecký průkaz. Stále má ale příliš volného času a svou sbírku by rád rozšířil i o kapitánský průkaz. Zatím však pracuje jako jeřábník v přístavu. Nenechal si ale ujít příležitost a vymyslel nový systém na zdvihání kontejnerů. Ten je složený ze dvou vysokých válců s poloměry 1 m a 0,99 m vložených do sebe. Na spodku menšího, vnitřního, je připevněna tyč, která prochází skrze dno většího a drží kontejner. Kontejnery bude zdvihat tak, že do prostoru mezi válci naleje vodu.

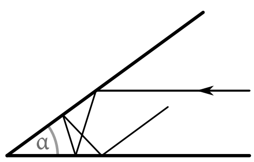
Kolik vody Marcel potřebuje, aby zdvihl kontejner s hmotností 10 t?

Tření ani únik vody okolo tyče neuvažujte. Hmotnost válců je vůči kontejneru zanedbatelně malá.



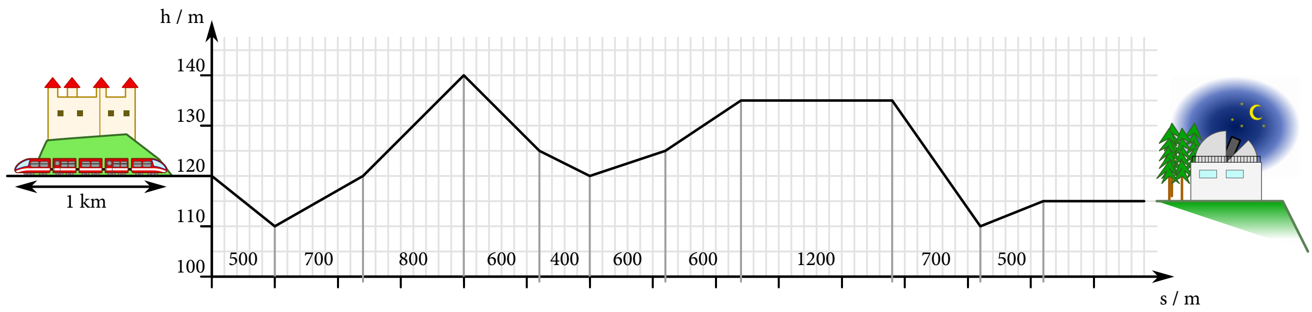
17 Enka vzala dvě zrcátka a postavila je tak, aby svírala úhel α. Pak mezi ně zasvítila laserem tak, že paprsek byl rovnoběžný s jedním ze zrcadel. Všimla si, že zpět od zrcadel se paprsek vrací přesně podél druhého zrcadla.

Jaké všechny úhly mohla zrcátka svírat?



18 Elektřina je pěkně drahá. Vedení železnic v rámci úsporných opatření nakázalo strojvedoucímu Kubkovi, aby do kopce příliš nepřidával a co nejvíce využil setrvačnosti. Kubkův vlak má délku 1000 m a hmotnost 1000 t. Jakou nejmenší rychlostí se musí rozjet ze stanice vlevo, aby setrvačností projel celou tratí na obrázku?

Kubkův vlak má konstantní délkovou hustotu. Tření ani odpor vzduchu neuvažujte. Pro malé úhly se nebojte použít aproximaci $\tan x \approx x$.



19 Pistolník Sebastián zase jednou stojí na náměstí obklíčený bandity a plánuje velkolepý únik v plamenech. Po náměstí je od včerejší pitky rozlitá ohnivá voda a Sebastián stojí právě uprostřed velké kruhové kaluže s poloměrem 5 m. Když vystřelí do libovolného místa kaluže, ohnivá voda se tam zapálí a plamen se bude šířit po hladině rychlostí 2 m/s.

Sebastián má poslední tři střely a potřeboval by, aby celá kaluž vzplála co nejdříve. Jak dlouho to bude trvat, když vystřelí na optimální místa?

Sebastián má nejrychlejší ruku na Západě a čas mezi jeho výstřely je zanedbatelný, stejně jako doba letu jeho střel.

20 Kutil Dano našel za zimního dne u kontejnerů dva téměř stejné kovové pásky dlouhé 1 m a tlusté 1 mm. Oba kovy jsou stejně pevné, jenom mají různé teplotní roztažnosti $8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$ a $10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}$. Pevně je k sobě připevnil při teplotě 0 °C.

Při jaké teplotě se z pásu stane kruhový prstenec?

Uvažujte, že pásky se roztahují pouze v podlouhlém směru.

21 Andrej kdesi vyhrabal tři rezistory: dva z nich byly očividně stejné a třetí se od nich lišil. Hned z nich začal skládat různá zapojení, přičemž vždy použil všechny tři. Podařilo se mu z nich složit zapojení s odpory 50, 60, 112, 140 a 245 Ω. Na jeden způsob však zapomněl.

Jaký odpor by mělo šesté zapojení, které se z těchto tří rezistorů dá sestavit?

22 Sluneční světlo nás obšťastňuje plošným výkonem záření 1366 W/m^2. Justína se však necítí obšťastňovaná sluníčkem, které na ni přes dokonale průsvitné čtvercové střešní okno se stranou 80 cm svítí. Svit naší nejbližší hvězdy jí začal vadit natolik, že si pořídila kus speciální folie s rozměry 1,5 m × 1 m, která propustí jenom 80 % světla.

Justína vzala nůžky, různě folii roztříhala a polepila okno ve vícerých vrstvách tak, aby oknem procházelo co nejméně světla, i za cenu, že počet vrstev folie nebude po celé ploše okna stejný. Jaký zářivý výkon bude procházet oknem do pokoje po této úpravě, když Slunce svítí kolmo na okno?

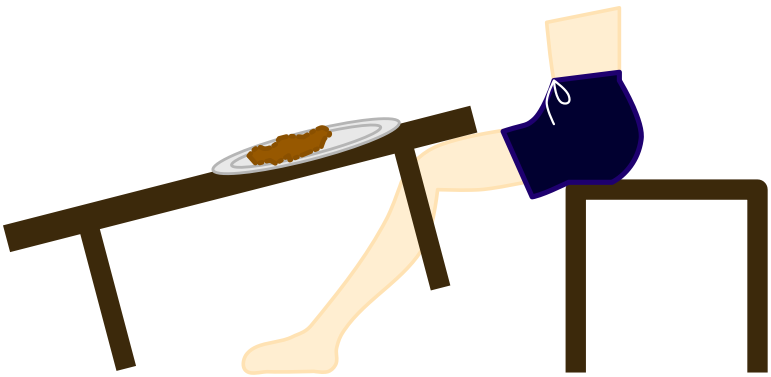
23 Sportovkyně Lucka začala trénovat skok do výšky. Když naposledy překonala svůj osobní rekord, dokázala vyskočit tak vysoko, že se její těžiště zdvihlo o 1 m, což se jí však zdálo příliš málo. Svůj rekord se tak pokusila zlepšit tím, že se ze Země přesunula na malou nerotující planetku ve tvaru koule s poloměrem 2,5 km. Jaká může být maximální hustota planetky, aby z ní Lucka při svých současných skokanských schopnostech byla schopna vyskočit a nikdy se nevrátit?

24 Mimozemšťan Dvojka získal grant a postavil si za něj velký dalekohled, kterým vyhledává planety u jiných hvězd. Kdyby se podíval směrem k nám, planety by sice přímo neviděl, všimnul by si ale, že Sluncem něco hýbe v radiálním směru. Například drobný pohyb s periodou jednoho roku by byl jistě způsoben tím, že Slunce a naše Země obíhají kolem společného těžiště. Jak velká je amplituda radiální rychlosti Slunce při oběhu Země?

Ostatní planety ignorujte. Mimozemšťan Dvojka má obrovské štěstí a jeho domovská planeta leží přímo v rovině oběžné dráhy Země a Slunce.

25 Adam má radost, že je konečně neděle a dostane k obědu řízek s bramborem (ne s rýží). Jeho nohy jsou však tak masivní, že po tom, co usedne, se stůl nakloní o úhel 30°. Talíř s řízkem začne klouzat a řízek na talíři také. Mezi stolem a talířem je koeficient smykového tření 0,4, mezi talířem a řízkem je koeficient smykového tření 0,3. Řízek má hmotnost m a talíř má hmostnost $2m$.

S jakým zrychlením se hýbe talíř na stole hned po naklonění?



26 Tomáš našel v maminčině dílně pružinu s tuhostí k a nulovou klidovou délkou. Protože ho její existence urážela, vsunul do ní o něčo užší pružinu s tuhostí K a klidovou délkou L a svařil jejich odpovídající konce k sobě.

Jakou má výsledný objekt tuhost a klidovou délku?

27 Když chceme hodnotu nějaké fyzikální veličiny narychlo odhadnout, nezajímá nás, jaké číselné konstanty se vztahují k veličině, kterou odhadujeme. Určete tímto způsobem frekvenci kmitání kytarové struny. Její hmotnost je je M, délka L a je napínána silou F.

28 Jarovi se do rukou dostal histogram počtu zemětřesení za rok podle magnitud. Data v něm byla seskupená po intervalech šířky 1. Jaro z něj vyčetl, že za daný rok se na Zemi vyskytlo 6200 zemětřesení s magnitudami 4,0 – 4,9 a 800 zemětřesení s magnitudami 5,0 – 5,9. Zajímalo by ho však, kolik bylo zemětřesení s magnitudou 5,0.

Jaro ví, že počet zemětřesení s magnitudou alespoň M je dán Gutenbergovým-Richterovým zákonem

$$N(m \geq M) = 10^{a-bM},$$

kde a a b jsou nějaké konstanty. Na základě tohoto poznatku se mu už hledaný počet zemětřesení podařilo dopočítat. Najděte ho i vy!

Magnitudy zemětřesení jsou zaokrouhlené na jedno desetinné místo, takže počet zemětřesení s magnitudou 5,0 *ve skutečnosti znamená počet zemětřesení v rozsahu magnitud* $4{,}95 \leq m < 5{,}05$. *Podobně interval magnitud* 4,0 – 4,9 *znamená* $3{,}95 \leq m < 4{,}95$.

29 Mirko změřil, že kotelna na Matfyzu dodává do radiátorů každou sekundu 10 l mysteriózní kapaliny s teplotou 80 °C, zpět se však každou sekundu vrátí jen 9,9 l ochlazené kapaliny. Chvíli nadával na neschopné klempíře, chvíli na nezodpovědné studenty, ale po projití celé budovy zjistil, že radiátory těsní a žádná kapalina z nich neuniká. Jaký je tepelný výkon kotelny?

Mysteriózní kapalina v radiátorech má na místě, kde vtéká zpět do kotelny, hustotu 1000 $\mathrm{kg/m^3}$, konstantní koeficient objemové teplotní roztažnosti $1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}$ a měrnou tepelnou kapacitu 4000 $\mathrm{J/(kg \cdot K)}$.

30 Když se Sysel nastěhoval do nového bytu, přinesl si s sebou i ukrutný nástroj na cvičení: pořádně tuhou pružinu s klidovou délkou 1 m. Když Sysel jeden její konec připevní na strop a zavěsí se na druhý konec, pružina se natáhne přesně o 2 m.

Zajímalo by ho, o kolik by klesl, kdyby oba konce pružiny připevnil na strop do vzájemné vzdálenosti 1 m a sám se zavěsil na střed pružiny.

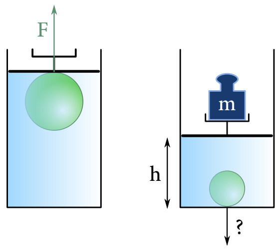
Výsledek odevzdávejte s přesností na dvě platné cifry. Při řešení se nebojte použít kalkulačku.

31 Andrej a Kubo se ostřelují elektrony. Andrej se najednou ocitl v nepříjemné situaci, kdy na něj letí elektron rychlostí $v = 3200\ \mathrm{m/s}$ a on se mu už nestačí vyhnout. Musí proto využít své nadpřirozené schopnosti a krátkodobě zapnout homogenní magnetické pole s indukcí $B = 8{,}9\ \mathrm{mT}$ ve svislém směru (kolmo na v).

Jak dlouho musí magnetické pole působit, aby elektron změnil svůj směr o 90° a trefil tak Kuba, který stojí nedaleko?

32 Krtko stojí s malou dušičkou před komisí u státnic. Pro jednoduchost ho modelujme jako svislý válec o průřezu $S = 50\ \mathrm{cm^2}$ plný vody a jeho dušičku jako balón s objemem $V = 50\ \mathrm{cm^3}$. Jeho myslící ústrojí pak bude píst uzavírající ho zvrchu, zatímco zespodu jej uzavírají podrážky. Zbytky duchaplnosti se v modelu projevují jako působení balónku na píst silou $F = 10\ \mathrm{mN}$.

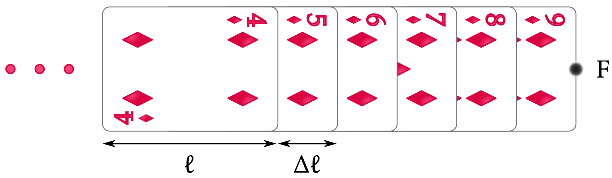
Komise mu znenadání položí zákeřnou otázku odpovídající závaží o hmotnosti $m = 10$ kg položenému na píst. Jeho dušička pomalu klesne na dno. Jak silně teď tlačí na podrážky, pokud se píst nachází ve výšce $h =$ 1,8 m nad dnem? Stlačování jeho dušičky probíhá izotermicky a rozměry balónku jsou malé v porovnání s rozměry válce. V místnosti, kde probíhají státnice, je tížívá atmosféra s normálním atmosférickým tlakem.



33 Kvik si po náročné směně na univerzitě rád dopřeje pořádnou dávku vzrušení. Sotva přijde domů, už otvírá svou oblíbenou limonádu s příchutí rukoly a cukety a usedá k televiznímu kanálu *PASIANS TV*. Je však extrémně unavený a ihned usne. Zdá se mu o šarmantní hráčce Justýně, která staví domeček z nekonečně mnoha karet. Tyto karty jsou uloženy na nekonečně dlouhém stole. Náhle se na něj krásná Justýnka otočí a ptá se:

„Jakou sílu musím vyvinout na zvednutí nejspodnější karty, pokud na ni působím na jejím vzdáleném konci směrem svisle nahoru a karty jsou uloženy jako na obrázku? Karty mají délku ℓ, hmotnost m a přečnívají o $\Delta\ell$."

Pomozte Kvikovi ke klidnému spánku a najděte odpověď na Justýninu otázku.



34 Když Sněhurka právě nedřímá, ráda se baví se sedmi trpaslíky na nehmotném kolotoči. Posadí se na osm sedadel rovnoměrně rozmístěných po obvodu kolotoče a roztočí se na rychlost jedné otáčky za tři sekundy. Tu náhle do středu kolotoče spadne ze stromu jablko. Sněhurka se zvedne ze sedadla a přeleze do jeho středu. Po tomto jejím manévru kolotoč zvětší svou rychlost a jednu otáčku vykoná jen za dvě sekundy.

Jaká je hmotnost jednoho trpaslíka, pokud ta Sněhurčina je 56 kg?

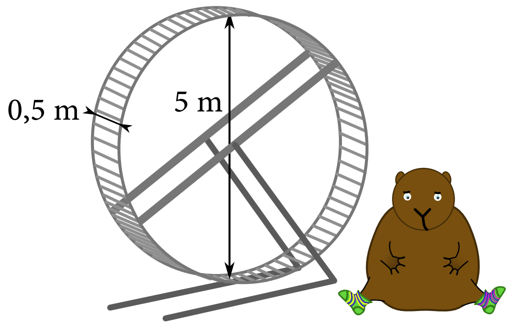
35 Marcel má dutý válec s objemem 10 ml a s obsahy podstav 1 cm^2. Vnitřek válce je vyplněný vzduchem za atmosferického tlaku a je rozdělený na dvě stejné poloviny volně pohyblivým diskem o hmotnosti 100 g se zanedbatelnou tloušťkou, přičemž vzduch kolem disku nemůže nijak pronikat.

Při Marcelově nešetrném zacházení s válcem se mu podařilo odtrhnout jednu z jeho podstav. Jaký je poměr period kmitání disku ve válci před a po odtržení podstavy válce?

Vzduch považujte za ideální dvojatomový plyn. Marcel se nachází v běžné atmosféře.

36 Přerostlý křeček v ponožkách zběsile běhá uvnitř svého kolečka. Kolečko takovou zátěž nevydrží a vyosí se. Náš křeček z něho naštěstí stihne včas vyskočit. Kolečko už však má své dny sečteny. Dopadne na zem a rozkutálí se rychlostí 1 m/s. Jakou rychlostí běhal křeček uvnitř kolečka před jeho vyosením, jestliže byl vzhledem k pevnému rámu kolečka v klidu?

Kolečko je složeno z kovových tyček s délkovou hustotou λ. Na obvodě je dvojice obručí s průměrem 5 m spojená padesáti rovnoměrně rozmístěnými tyčkami délky 0,5 m a k ose je přichycené pomocí dvojice tyčí kolmo protínajících osy kolečka s délkou rovnou průměru obručí.



37 Satelit o hmotnosti m obíhá okolo Slunce o hmotnosti M po kružnici s poloměrem R. V jednom momentě zapne motory, které po celý čas působí na raketu konstantní silou F, která je orientovaná vždy v radiálním směru od Slunce. Jaká musí tato síla být, aby se satelit při svém následném pohybu vzdálil od Slunce na maximální vzdálenost $2R$?

38 Zlato je extrémě kujné a opakovaným roztloukáním se z něj dají vyrobit velmi tenké lístky. Zároveň je chemicky odolné a velmi dobře odráží světlo. Kosmický dobyvatel Patrik přiletěl k neznámé hvězdě a chtěl by u ní nechat pozdrav budoucím civilizacím v podobě lístku z čistého zlata s hmotností m a hustotou ρ.

Jakou plošnou hustotu mustí mít tento lístek, jestliže Patrik chce, aby ho tlak záření hvězdy s teplotou T, hmotností M a poloměrem R udržel nehybně na místě ve vzdálenosti $D \gg R$ od hvězdy?

Uvažujte, že list odráží všechno světlo a že paprsky dopadají kolmo na jeho povrch.

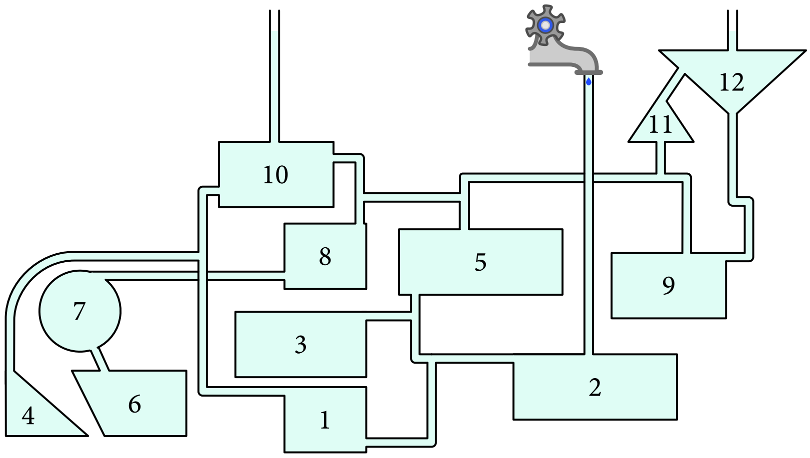
39 Galaxie M31 v Andromedě je od nás vzdálená přibližně 2 600 000 světelných let. Jakou rychlostí bychom se k ní museli vydat, aby nám cesta trvala stejně let lodního času?

40 Navzdory stereotypům se i ve městě najdou přející lidé ochotni pomoci svým sousedům. V souladu se stereotypy je ale město plné lidí jako je Dušan, kterému se nelíbí, že sousedka nad ním netopí, ani když je venku −5 °C. Dušanův strop je složen z betonu o tloušťce 20 cm a tepelné vodivosti 20 W/(m · K), nad ním jsou parkety o tloušťce 1 cm a vodivosti 2 W/(m · K). U Dušana je 25 °C a u sousedky 10 °C. Jak se změní teplota u sousedky, když Dušan na svůj strop velikosti 10 m^2 přibije 5 cm polystyrenu s vodivostí 1 W/(m·K)?

Dušan stále vytápí na stejnou teplotu. Sousedčin byt má kromě podlahy pouze vnější stěny.

Vzorová řešení

1 Na obrázku nižšie je zobrazené, v akom poradí sa nádrže naplnia. Vplyvom tiaže voda steká dolu a naplní sa najnižšia nádrž číslo 1. Potom voda postupuje vyššie a vytláča vzduch. Hladina v nádržiach a aj v potrubiach rastie a naplnia sa nádrže 2 a 3. Následne sa zaplní trojuholníková nádrž 4 a ako ďalšia nádrž číslo 5. Pri ďalšom stúpaní vodnej hladiny voda naplní vetvu s nádržami 6, 7 a 8 a po nich je už na rade naša vytúžená nádrž s poradovým číslom 9.



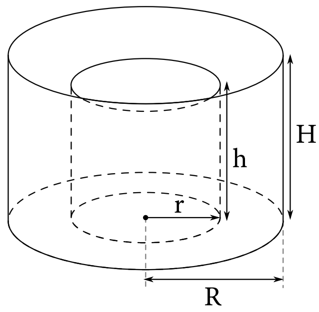
Obrázek 1.1: *Poradie plnenia nádob*

2 Ak jeden vlas narastie o 15 cm/y, za jeden deň narastie o $\frac{15}{365}$ cm. Toto stačí vynásobiť celkovým počtom vlasov a premeniť na metre, čiže odpoveďou je $100000 \cdot \frac{15}{365}$ cm/d ≐ 41 m/d.

3 Ak za hodinu prejdeme 200 míľ, za hodinu prejdeme $200 \cdot 1760 = 352\,000$ yardov. Za sekundu teda prejdeme $\frac{352000}{3600} = \frac{880}{9}$ yardov. Podľa komentátora to však je jedno futbalové ihrisko, čiže 120 yardov. Od tejto hodnoty sa komentátor líši o $120 - \frac{880}{9}$ yardov, teda $\frac{200}{9}$ yardov. Vo futbalových ihriskách to potom je $\frac{200}{9 \cdot 120}$ futbalových ihrísk za sekundu, čiže v základnom tvare $\frac{5}{27}$ futbalových ihrísk za sekundu.

4 Hustotu spočítame ako $\rho = \frac{m}{V}$. Ak nádoba váži m, hmotnosť piškót m_p (bez nádoby s hmotnosťou m_0) je $m_p = m - m_0$. Objem nádoby je rozdielom objemu valca a objemu vysunutého dna,

$$V = H\pi R^2 - h\pi r^2. \tag{4.1}$$



Obrázek 4.1: *Nádoba so zakreslenými rozmermi*

Hustota piškót je potom

$$\rho = \frac{m_p}{V} = \frac{m - m_0}{H\pi R^2 - h\pi r^2} \doteq 73\ \mathrm{kg/m^3}. \tag{4.2}$$

5 Najskôr si premeníme Jurovu rýchlosť na m/s,

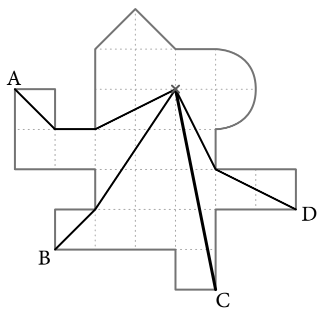
$$\frac{17\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{17\,000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{170}{36}\ \mathrm{m/s}. \tag{5.1}$$

Keď sa postaví na bežiaci pás, ktorý ide rýchlosťou $\frac{180}{36}$ m/s, vo výsledku pôjde rýchlosťou $\frac{10}{36}$ m/s.

Čas, za ktorý spadne z bežiaceho pásu, je čas, za ktorý prejde 1 m rýchlosťou $\frac{10}{36}$ m/s, teda

$$\frac{1\ \mathrm{m}}{\frac{10}{36}\ \mathrm{m/s}} = 3{,}6\ \mathrm{s}. \tag{5.2}$$

6 Aby sme zistili, kedy bude celá kaluž horieť, stačí vypočítať, ako dlho bude trvať, kým sa plameň dostane do jej najvzdialenejšieho bodu. Toto miesto nutne leží na obvode kaluže a hneď nájdeme niekoľko vhodných kandidátov.



Obrázek 6.1: *Potenciálne najvzdialenejšie body*

Pomocou Pytagorovej vety vypočítame, že najvzdialenejší je kandidátsky bod C, ktorý je vzdialený $\sqrt{26}$ m od miesta zapálenia. Oheň sa šíri rýchlosťou 2 m/s, preto bude celá kaluž horieť v čase $\frac{\sqrt{26}\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m/s}} \doteq 2{,}55$ s.

7 Ak si povieme, že bežec a zberacie auto vyštartujú súčasne, ale auto ide prvú polhodinu rýchlosťou 0 km/h, stačí nám určiť, za aký čas prejde auto 92,14 km. Za prvých deväť polhodín prejde

$$0\,\mathrm{km} + 7\,\mathrm{km} + 7{,}5\,\mathrm{km} + 8\,\mathrm{km} + 8{,}5\,\mathrm{km} + 9\,\mathrm{km} + 11\,\mathrm{km} + 13\,\mathrm{km} + 15\,\mathrm{km} = 79\,\mathrm{km}. \tag{7.1}$$

Po prejdení tejto vzdialenosti ide auto konštantnou rýchlosťou 34 km/h a zostáva mu prejsť 13,14 km. Celkový čas behu je teda

$$9 \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} + \frac{13{,}14\,\mathrm{km}}{34\,\mathrm{km/h}} \doteq 4{,}89\,\mathrm{h}. \tag{7.2}$$

8 Keďže čísla sú mocniny dvojky, musíme rozhodnúť o pravdivosti všetkých tvrdení.

***Bežné ističe v byte majú nominálne hodnoty okolo* 150 A.**

Výrok je **nepravdivý**. Štandardné hodnoty sú okolo 16 A. Pri napätí v zásuvke 230 V to predstavuje medzný výkon vyše 3500 W, teda asi štyri vysávače zapnuté naraz taký istič zhodia. Ističe na 150 A by poľahky zniesli 20 takých vysávačov a tento poznatok je v rozpore s bežnými domácimi skúsenosťami.

Galvanický článok je zdroj jednosmerného napätia.

Výrok je **pravdivý**. Galvanické články, napríklad bežná AA batéria, vyrábajú elektrickú energiu rozkladom elektrolytu, čo je proces, kde vieme jednoznačne určiť kladný a záporný pól. Ide teda o jednosmerné napätie.

Elektrická sila môže pôsobiť aj medzi izolantmi.

Výrok je **pravdivý**. Dobrým príkladom je demonštračný prístoj známy zo základoškolských hodín, elektroskop, kde sa odpudzujú dva nabité pásiky igelitu, teda izolantu. Teda aj izolant možno na povrchu nabiť. Už ste si niekedy treli nafúkaný balón o vlasy?

Zahrievanie vodičov znižuje ich elektrický odpor.

Výrok je **nepravdivý**. V tabuľkách možno poľahky nájsť, ako sa mení odpor s teplotou. Pri veľkej väčšine bežných materiálov používaných ako vodiče odpor s teplotou stúpa.

Rozmer jednotky coulomb sú ampére za sekundu.

Výrok je **nepravdivý**. Elektrický prúd, meraný v ampéroch, nám hovorí, koľko náboja (coulombov) tečie za jednotku času, preto je to presne naopak – ampére sú coulomby za sekundu.

Prúdy menšie ako* 1 A *nie sú pre človeka nebezpečné.

Výrok je **nepravdivý**. Už prúdy okolo 20 mA môžu byť pre človeka nebezpečné, najmä ak prechádzajú oblasťou srdca a vnútorných orgánov. Nejde tu však o prúd, ktorý prechádza obvodom predtým, než sa ho dotkneme. Odpor v samotnom obvode totiž môže byť malý, takže ním tečie veľký prúd aj pri malom napätí. Ak je odpor ľudského tela veľký, potečie cezeň len maličký prúd. Naopak, ak je napätie vysoké, ale zdroj nevie poskytnúť veľký prúd, opäť nám nič nehrozí. Typickým príkladom je napríklad iskra statickej elektriny, ktorá môže mať aj 10 000 V, ale prenesený náboj a teda aj prúd sú malé.[1]

[1] Obľúbená otázka znie, či zabíjajú ampére, alebo volty – viete, ako to je?

Na paralelne radených rezistoroch môže byť napätie rôzne.

Výrok je **nepravdivý**. Ak máme dva paralelne radené rezistory, ich svorky sú vodivo spojené. Vieme, že ak sú dve miesta spojené vodivo, napätie medzi nimi je nulové a teda napätia v oboch miestach sú rovnaké. Napätie medzi pravou a ľavou svorkou každého z rezistorov teda bude predstavovať rovnakú hodnotu. Príkladom rezistora zo života môže byť napríklad žiarovka. Tých často zapájame viac, s úmyslom, aby každá z nich bola zapojená na 230 V – a práve preto sú zapojené paralelne a i jednotlivé elektrické zásuvky sú zapojené paralelne; ak by sme napríklad dve žiarovky zapojili sériovo, na každej z nich by bolo polovičné napätie a teda by svietila s menším výkonom.

Hoci v zásuvke je striedavé napätie, rýchlovarná kanvica by fungovala aj na jednosmerné.

Výrok je **pravdivý**. Rýchlovarná kanvica je, okrem nádoby na vodu, len jedna odporová špirála spínaná bimetalickým teplotným spínačom – zjednodušene je tam teda len spínač a jeden rezistor, ktorý sa zahrieva a od neho sa zohrieva voda. No a rezistory sa predsa zahrievajú aj pri zaťažení jednosmerným prúdom, takže kanvica by fungovala aj pri zapojení na zdroj jednosmerného napätia.

Súčet čísel pravdivých výrokov je teda 2 + 4 + 128 = 134.

9 Ak 5 l farby váži 7,5 kg, hustota farby je $\frac{7{,}5\ \mathrm{kg}}{5\ \mathrm{l}} = 1{,}5\ \mathrm{kg/l}$. Hustota vody je 1 kg/l, takže pomer hustôt farby a vody je 3 : 2. Preto, ak do dvoch rovnakých nádob nalejeme rovnakú hmotnosť farby a vody, ich objemy budú v pomere 2 : 3. Teraz prilejeme ešte jednu takú hmotnosť farby do nádoby s farbou, čím dostaneme požadovaný hmotnostný pomer 2 : 1. Tým sa pomer objemov zmení na 4 : 3, čo je kýžený výsledok.

10 Pľyš si musí do džbánu napustiť z vodovodu hmotnosť vody m, do ktorej vhodí blok ľadu s hmotnosťou $m_{\text{❄}}$. Aby sa všetok ľad roztopil, musí prijať teplo $m_{\text{❄}} l_{\text{❄}}$, kde $l_{\text{❄}}$ je merné skupenské teplo topenia ľadu. Potom sa tento roztopený ľad, teda voda, zohreje o $\Delta T_{\text{❄}}$, čiže prijme teplo $m_{\text{❄}} c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\text{❄}}$, kde $c_{\mathrm{H_2O}}$ je merná tepelná kapacita vody. Všetko toto teplo prijme od vody z vodovodu, ktorá sa ochladí o $\Delta T_{\mathrm{H_2O}}$, čiže ľadu dokopy odovzdá teplo $m c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\mathrm{H_2O}}$.

Prijaté a odovzdané teplo sa rovnajú, takže

$$m_{\text{❄}} l_{\text{❄}} + m_{\text{❄}} c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\text{❄}} = m c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\mathrm{H_2O}}. \tag{10.1}$$

Odtiaľ vyjadríme hmotnosť vody z vodovodu

$$m = \frac{m_{\text{❄}} l_{\text{❄}} + m_{\text{❄}} c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\text{❄}}}{c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\mathrm{H_2O}}}. \tag{10.2}$$

S hodnotami zo zadania dostávame hodnotu $m \doteq 6{,}68$ kg. Okrem vody z vodovodu však má Pľyš v džbáne aj 1 kg vody z ľadu, teda dokopy 7,68 kg vody, čo je 7,68 l.

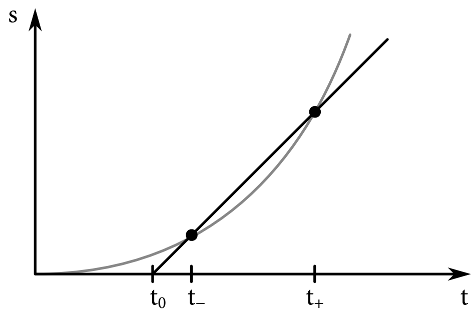
11 Označme si čas Sárinho zúfalého výkriku t_0. Hlavnou myšlienkou riešenia úlohy je, že zvuk s konštantnou rýchlosťou dobehne rovnomerne zrýchľujúceho Maťa s náskokom t_0. V čase t, keď zvuk dobehne Maťa, dráha prejdená Maťom bude rovná dráhe prejdenej rovnomerne sa šíriacou zvukovou vlnou, čiže

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gt^2 &= c(t - t_0) \\ \frac{1}{2}gt^2 - ct + ct_0 &= 0. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Toto je kvadratická rovnica s dvomi riešeniami

$$t_\pm = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2gct_0}}{g}. \tag{11.2}$$

Numerické hodnoty hľadaného času sú $t_+ \approx 66{,}79$ s a $t_- \approx 3{,}14$ s. Fyzikálne dáva zmysel riešenie $t = t_-$, lebo to je moment, kedy zvuk predbieha Maťa – riešenie t_+ opisuje situáciu, kedy by Maťo vďaka neustálemu zrýchľovaniu (zanedbávame odpor vzduchu) zvuk opäť predbehol.



Obrázek 11.1: *Prejdené dráhy Maťka a zvukovej vlny Sárinho výkriku*

Keď už poznáme čas t, môžeme ho dosadiť do rovnice pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu,

$$s = \frac{1}{2}gt_-^2 \approx 48{,}4 \text{ m}. \tag{11.3}$$

Maťo vyskočil z výšky $h = 200$ m, takže v čase t, keď začuje Sárin výkrik, bude už len vo výške $h - s \approx 151{,}6$ m.

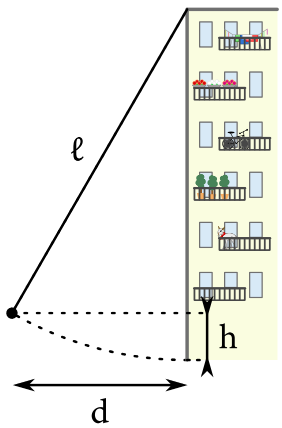
12 Označme si hodnotu odporu rezistora R. Ak máme sériové zapojenie, odpor rezistorov sčítavame, čiže celkový odpor bude $3R$. Pri paralelnom zapojení sa nám sčítavajú prevrátené hodnoty rezistorov, takže odpor je rovný $R/3$. Tieto hodnoty sú rozdielne o 8 Ω, takže vieme zostaviť rovnicu

$$8\ \Omega = 3R - \frac{R}{3}. \tag{12.1}$$

Riešením tejto rovnice je $R = 3\ \Omega$. Schéma na obrázku v zadaní úlohy je paralelným zapojením dvoch vetiev s odpormi R a $2R$, takže jej odpor môžeme vypočítať ako

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \Rightarrow \quad R' = 2\ \Omega. \tag{12.2}$$

13 V oboch prípadoch si Fero odrazom dodá rovnakú kinetickú energiu. Tá bude v najvyššom bode celá premenená na potenciálnu, znova rovnakú, a teda rovnaké bude aj prevýšenie najvyššieho bodu pri oboch skokoch. To vieme s pomocou obrázku ľahko určiť ako $h = \ell - \sqrt{\ell^2 - d^2} = 1{,}2$ m.



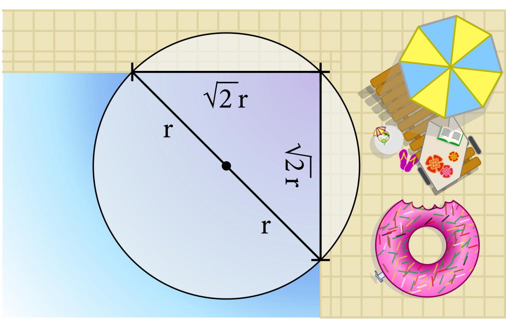
Obrázek 13.1: *Geometria Ferovho odrazu od budovy v najvyššom bode*

14 Keď sa koleso točí, ventil sa točí spolu s ním. Vo vzťažnej sústave s počiatkom v strede kolesa a točiacej sa tak, aby v nej ventil stál, naň pôsobí fiktívna sila $F = \frac{mv^2}{r}$ v smere od počiatku, známa aj ako odstredivá. Keďže sa ale ventil v tejto neinerciálnej vzťažnej sústave nehýbe, koleso naň pôsobí rovnakou silou naspäť. Keď sa auto rozbieha, z pohľadu časti kolesa, ktoré drží ventil, sa zdá, že ventil mení zdanlivú hmotnosť, no to sa mení len rýchlosť otáčania. Zdanlivú hmotnosť teda vypočítame ako

$$m_z = \frac{F}{g} = \frac{mv^2}{rg}.$$

Po premenení rýchlosti z km/h na m/s a dosadení dostávame výsledok $m_z \approx 98{,}3$ kg.

15 Treba si uvedomiť, že ak má Jonka k dispozícii iba jeden kryt, najväčšiu plochu bazéna zakryje práve vtedy, keď ho položí do rohu, a to práve tak, aby stred kruhu vyčnieval čo najviac nad vodu. Táto situácia je znázornená na obrázku 15.1.



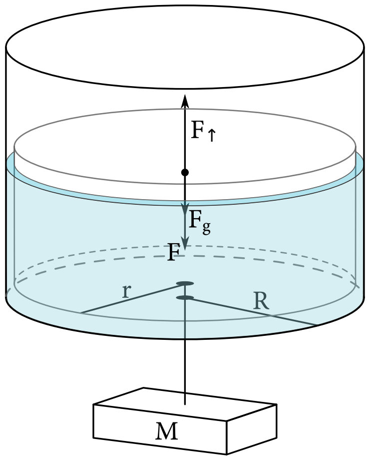
Obrázek 15.1: *Kryt v optimálnej polohe*

Ťažisko krytu musí ležať na spojnici bodov, ktoré sú priesečníkom obvodu krytu a okraja bazéna. V tejto situácii zároveň roh bazénu leží na obvode krytu.[2] Ak by Jonka kryt ešte o kúsok posunula, už by sa prevrhol do bazéna. Stačí nám teda vypočítať obsah plochy, ktorá je v tomto prípade krytom zakrytá. Táto plocha je zložená z polkruhu a pravouhlého trojuholníka. Obsah polkruhu je jednoducho $\frac{1}{2}\pi r^2$.

O pravouhlom trojuholníku vieme, že jeho prepona má dĺžku $2r$ a jeho zvyšné dve strany majú dĺžku $\sqrt{2}r$, lebo platí Pytagorova veta $\sqrt{\left(\sqrt{2}r\right)^2 + \left(\sqrt{2}r\right)^2} = 2r$. Obsah tohto pravouhlého trojuholníka potom je $\frac{1}{2}(\sqrt{2}r)^2 = r^2$. Celková plocha vody zakrytej krytom teda je

$$\frac{1}{2}\pi r^2 + r^2. \tag{15.1}$$

16 Nakreslime a napíšme si všetky sily, ktoré pôsobia na osi valca.



Obrázek 16.1: *Marcelov žeriav so zakreslenými pôsobiacimi silami*

Dostaneme

$$F_g + F = F_\uparrow, \tag{16.1}$$

kde F_g je gravitačná sila, F je sila od kontajnera a $F_\uparrow$ je vztlaková sila vody. Po vyjadrení jednotlivých síl dostávame

$$mg + Mg = \rho_{\mathrm{H_2O}} g h S_1, \tag{16.2}$$

kde h je výška ponorenej časti valca a S_1 je obsah podstavy menšieho valca. Aby sme našli objem, potrebujeme zistiť h,

$$h = \frac{m + M}{\rho_{\mathrm{H_2O}} S_1}. \tag{16.3}$$

Vieme, že hmotnosť menšieho valca je zanedbateľná oproti kontajneru, takže

$$h \approx \frac{M}{\rho_{\mathrm{H_2O}} S_1}. \tag{16.4}$$

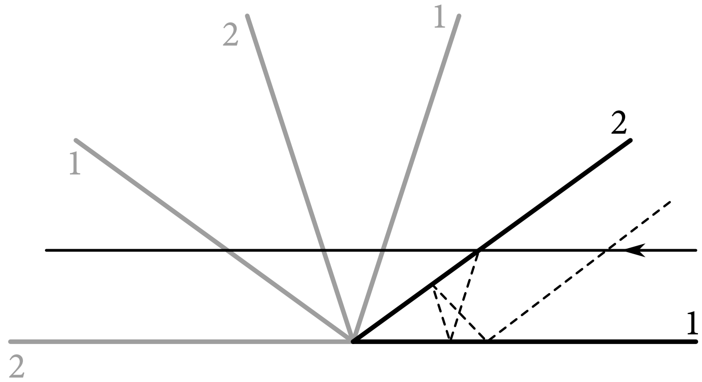
[2] lebo Tálesova veta

Objem vody bude nakoniec iba objem medzivalčia, čiže

$$V = h(S_2 - S_1) = \frac{M}{\rho_{\mathrm{H_2O}} r^2}\left(R^2 - r^2\right) \doteq 203\,\mathrm{l}. \tag{16.5}$$

17 Namiesto počítania komplikovanej geometrie si uvedomíme, že nám priestor medzi zrkadlami stačí niekoľkokrát odzrkadliť cez jedno zo zrkadiel. Potom totiž môžeme uvažovať, že lúč svetla putuje po rovnej trajektórii ako na obrázku.

Na konci musí byť lúč svetla rovnobežný s druhým zrkadlom. To znamená, že uhol 180° musí byť uhlami α rozdelený na celý počet častí. Zdalo by sa teda, že prípustné hodnoty α budú hodnoty $\frac{180°}{n}$, kde n sú prirodzené čísla. Avšak na to, aby bol lúč na konci rovnobežný s druhým zrkadlom, je potrebné, aby zrkadlo, ktoré sa zobrazí na uhol 180°, bolo práve to druhé zrkadlo.



Obrázek 17.1: *Riešenie s práve štyrmi odrazmi*

Rýchlo si uvedomíme, že táto podmienka nám hovorí, že číslo n musí byť nepárne. Prípustné hodnoty uhla α sú teda

$$\alpha = \frac{180°}{2n+1}, \tag{17.1}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

18 Vlak sa rozbehne na začiatku na rýchlosť v, a teda má určitú kinetickú energiu. Keďže trenie ani odpor vzduchu nehrajú rolu, mechanická energia vlaku sa zachováva. Preto mu stačí mať takú rýchlosť, aby jeho ťažisko tesne prešlo najvyšším bodom svojej trajektórie. Trajektória ťažiska sa však líši od výškového profilu trate. Na prvý pohľad vieme určiť, že do úvahy prichádzajú dve miesta: vrchol vo výške 140 m a rovinka vo výške 135 m. Do väčšej výšky sa už očividne nemá ako ani kde dostať.

Ak spočítame veľkosti sklonov, vidíme, že všetky sú pomerne malé, najprudšie klesanie je iba $\frac{25}{700}$. Pre malé uhly môžeme rozdiel medzi skutočnou dĺžkou vlaku a jej priemetom do vodorovnej roviny zanedbať, čo nám trochu zjednoduší výpočet. Rovnako môžeme ignorovať výšku ťažiska vlaku nad koľajnicami, keďže tá bude vždy rovnaká a výsledok od jej hodnoty nezávisí.

Pozrime sa najprv na najvyšší bod trate. Sklony na oboch stranách sú rovnako veľké, 25 ‰, takže ťažisko vlaku bude najvyššie vtedy, keď bude vrcholom práve prechádzať jeho stred. Ak je dĺžková hustota vlaku konštantná, ťažiská prednej aj zadnej polovice vlaku sú rovnako vysoko, a teda aj ťažisko celého vlaku je v tej istej výške. Stačí nám teda spočítať výšku ťažiska jednej z polovíc, čo bude

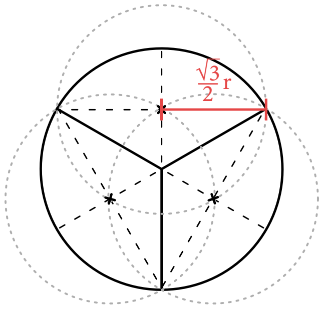
$$h_\wedge = \frac{140\ \text{m} + (140\ \text{m} - 0{,}025 \cdot 500\ \text{m})}{2} = 133{,}75\ \text{m}. \tag{18.1}$$

Toto je však očividne menej, než je výška rovinky vpravo, na ktorú sa vlak vojde celý. Výška jeho ťažiska na nej bude teda triviálne $h_- = 135$ m.

Ostáva nám už len vyjadriť rozdiel výšok ťažiska na začiatku a v maximálnej výške, čo bude

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_- \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_-} \approx \sqrt{2 \cdot 10\ \text{m/s}^2 \cdot 15\ \text{m}} = \sqrt{300}\ \text{m/s} \doteq 17{,}3\ \text{m/s}. \tag{18.2}$$

19 Označme rýchlosť šírenia sa plameňa v a čas, za ktorý sa vznieti všetka ohnivá voda, t. Našou úlohou je pokryť kaluž troma kruhmi s polomerom vt a kruhy umiestniť tak, aby sme minimalizovali potrebné t. Skúsme rozdeliť kaluž na tri časti, pričom každú z nich zapáli rôzna Sebastiánova strela. Chceme, aby tieto tri časti boli čo najmenšie v zmysle toho, aký polomer má kružnica, ktorá ich kompletne prekrýva. Symetria kaluže nám umožňuje rozdeliť ju na tri rovnako veľké kruhové výseky, a zamyslenie sa nás môže presvedčiť, že kompaktnejšie dielce zvoliť nemožno. Miesta najvhodnejšieho dopadu striel možno nájsť ako stred kružníc prekrývajúcich jednotlivé výseky.



Obrázek 19.1: *Anatómia Sebastiánovej zápalnej činnosti.*

Krátke cvičenie z geometrie nám odhalí, že najdlhšia vzdialenosť ktorú musí plameň prejsť má dĺžku $\frac{\sqrt{3}}{2}r$, kde r je polomer kaluže. Celá kaluž bude teda horieť v čase $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r}{v} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ s $\doteq 2{,}17$ s.

20 Keďže hrúbka pásikov je tisíckrát menšia ako ich dĺžka, zanedbáme, že pásiky zmenou teploty menia hrúbku, a mení sa len ich dĺžka. Nech má po skruhovatení vnútorný pásik polomer r_1 a vonkajší r_2. Ak ich hrúbku označíme h, pre polomery platí $r_2 = r_1 + h$. Pásik s pôvodnou dĺžkou l_0 a teplotnou rozťažnosťou α sa po zmene teploty o ΔT predĺži o $l_0 \alpha\, \Delta T$, čiže jeho nová celková dĺžka bude

$$l_0 + l_0 \alpha\, \Delta T = l_0 (1 + \alpha\, \Delta T). \tag{20.1}$$

Ak má tvar kružnice s polomerom r, táto dĺžka je rovná $2\pi r$. Pre dva Danove novonadobudnuté pásiky to je

$$\begin{aligned} l_0(1 + \alpha_1\, \Delta T) &= 2\pi r_1, \\ l_0(1 + \alpha_2\, \Delta T) &= 2\pi r_1 + 2\pi h, \end{aligned} \tag{20.2}$$

kde sme využili, že $r_2 = r_1 + h$. Od prvej rovnice odčítame druhú a vyjadríme

$$\Delta T = \frac{2\pi h}{l_0(\alpha_2 - \alpha_1)}. \tag{20.3}$$

To znamená, že pásiky musíme zohriať alebo ochladiť o ΔT. Pre hodnoty zo zadania to je $\Delta T \doteq 314$ K. Keďže boli zlisované pri teplote 0 °C ≐ 273 K, musíme ich zohriať o ΔT, keďže ani taký frajer ako Dano ich nevie ochladiť pod absolútnu nulu. Zlisované pásiky preto nadobudnú tvar kruhového prstenca pri teplote 314 °C.

21 Pri riešení tejto úlohy sa nevyhneme tipovaniu. To ale neznamená, že nemôžeme tipovať inteligentne. Spolu existuje šesť možných zapojení. Tipneme si, že najmenší a najväčší odpor má čisto paralelné a čisto sériové zapojenie. Tie majú postupne odpory

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + 2R_2} \qquad \text{a} \qquad 2R_1 + R_2, \tag{21.1}$$

kde R_1 je odpor dvoch rovnakých rezistorov a R_2 je odpor tretieho.

Ak by sme ale uvážili, že najmenší a najväčší odpor je 50 Ω a 245 Ω, dostaneme sústavu dvoch rovníc, ktorá nemá riešenie. To znamená, že hodnota, ktorá nám chýba, musí byť práve tá najmenšia alebo tá najväčšia. Potrebujeme teda nejako odhadnúť, ktoré zapojenie zodpovedá druhému najmenšiemu, resp. druhému najväčšiemu odporu.

Ako prvé si môžeme všimnúť, že paralelné zapojenie komponentov má vždy menší odpor, než jednotlivé komponenty, a sériové naopak vyšší. V prípade dvoch paralelných vetiev je výsledný odpor vždy nižší než odpory v jednotlivých vetvách. V prípade sériového zapojenia je výsledný odpor vyšší než jednotlivé odpory zapojené v sérii. To nám dovoľuje predpokladať, že menšie odpory zodpovedajú paralelným zapojeniam a väčšie odpory sériovým zapojeniam, čím sa znižuje počet možností, ktoré potrebujeme preskúmať.

Ďalej si všimnime, že keďže paralelné zapojenie zmenšuje odpor, neoplatí sa nám zapájať doň malé odpory. Ak teda dva rovnaké rezistory majú menší odpor než ten tretí, dá sa predpokladať, že paralelné zapojenie dvoch rovnakých rezistorov a k nim do série tretieho bude mať druhý najväčší odpor.

Okrem toho si môžeme uvedomiť, že ak jedna vetva paralelného zapojenia má výrazne väčší odpor než tá druhá, prúd tečie zväčša cez vetvu s menším odporom, ktorá kladie len malý odpor. V limitnom prípade, keď ide odpor tejto vetvy do nuly, prúd môže cez zapojenie tiecť prakticky bez odporu a druhou vetvou prúd vtedy netečie. Na základe toho možno usudzovať, že ak dva rovnaké rezistory majú väčší odpor než ten tretí, sériové zapojenie dvojice rovnakých rezistorov v jednej vetve a k nim paralelne menší odpor bude mať druhý najmenší odpor.

Tým sme zredukovali počet prípadov, ktoré treba preskúmať, na štyri:

- Ak chýba najmenší odpor, najväčší odpor zodpovedá sériovému zapojeniu všetkých troch rezistorov. Vtedy chýbajúci odpor zodpovedá paralelnému zapojeniu všetkých troch rezistorov.
  - Ak majú rovnaké rezistory menší odpor než tretí, paralelné zapojenie dvoch rovnakých rezistorov a k nim tretieho do série zodpovedá druhému najväčšiemu odporu.

  - Ak majú rovnaké rezistory väčší odpor než tretí, sériové zapojenie dvoch rovnakých rezistorov v jednej vetve a k nim paralelne tretieho zodpovedá najmenšiemu známemu odporu.[3]

- Ak chýba najväčší odpor, najmenší odpor zodpovedá paralelnému zapojeniu všetkých troch rezistorov. Vtedy chýbajúci odpor zodpovedá sériovému zapojeniu všetkých troch rezistorov.
  - Ak majú rovnaké rezistory menší odpor než tretí, paralelné zapojenie dvoch rovnakých rezistorov a k nim tretieho do série zodpovedá najväčšiemu známemu odporu.[4]
  - Ak majú rovnaké rezistory väčší odpor než tretí, sériové zapojenie dvoch rovnakých rezistorov v jednej vetve a k nim paralelne tretieho zodpovedá druhému najmenšiemu odporu.

Poďme preskúmať tieto možnosti. Môžeme si pritom ešte všimnúť, že najväčší odpor na zozname je výrazne väčší než ďalšie dva. Na základe toho možno usudzovať, že bude zodpovedať sériovému zapojeniu všetkých troch rezistorov a že ďalšie dva v poradí budú prislúchať zapojeniam jedného rezistora sériovo pripojeného k dvojici paralelných rezistorov. Preto začneme prvými dvoma možnosťami.

Odpor sériového zapojenia troch odporov už poznáme. Odpor paralelného zapojenia dvojice rezistorov s rovnakým odporom R_1 a k nim do série odporu R_2 má odpor $\frac{R_1}{2} + R_2$. Vyriešením sústavy dvoch rovníc dostaneme odpory $R_1 = 70\ \Omega$ a $R_2 = 105\ \Omega$. Ľahko overíme, že zvyšné odpory zo zadania zodpovedajú niektorému zo zapojení rezistorov s takýmito odpormi. Ďalšie možnosti skúmať nemusíme – riešenie sme už našli.

Chýbajúci odpor zodpovedá paralelnému zapojeniu všetkých troch rezistorov, teda 26,25 Ω.

22 Akú stratégiu zvoliť pri polepovaní okna? Je jasné, že fóliou budeme vedieť pokryť celú plochu okna dvakrát a ešte nám nejaké odrezky zostanú. Ako s nimi naložiť, aby to bolo čo najviac efektívne? Ak máme kúsok fólie, treba ho nalepiť tam, kde je doteraz najmenej vrstiev – ak odtieni konštantnú *pomernú časť* svetla, oplatí sa ho dať tam, kde je svetla *absolútne* viac.

Plocha fólie je 1,5 m², plocha okna zas $S = 0{,}64\ \mathrm{m}^2$. Na dvojnásobné prekrytie teda spotrebujeme 1,28 m² fólie a $0{,}22\ \mathrm{m}^2 =: S_3$ nám zvýši na tretiu vrstvu, takže práve dvakrát bude prekryté $S_2 = S - S_3 = 0{,}42\ \mathrm{m}^2$.

Výkon prežiarený viacerými vrstvami vypočítame jednoducho – každá vrstva prepustí 80 % svetla, ktoré na ňu dopadne, oknom s dvoma vrstvami fólie preto prejde $\alpha_2 = 80\ \% \cdot 80\ \% = 64\ \%$ žiarenia, a cez tri vrstvy $\alpha_3 = 80\ \% \cdot 64\ \% = 51{,}2\ \%$ žiarenia.

Celkový prechádzajúci výkon žiarenia bude súčtom oboch plôch násobeným zodpovedajúcimi výkonmi, čiže

$$P' = (\alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3)P = \left(0{,}64 \cdot 0{,}42\ \mathrm{m}^2 + 0{,}512 \cdot 0{,}22\ \mathrm{m}^2\right) \cdot 1366\ \mathrm{W/m^2} \doteq 521\ \mathrm{W}. \tag{22.1}$$

23 Počas skoku platí zákon zachovania mechanickej energie. Nech má Lucka v momente odlepenia sa od podložky nulovú potenciálnu energiu a nejakú kinetickú energiu. V najvyššom bode skoku vo výške h sa na moment zastaví, teda má len potenciálnu energiu mgh, kde m je Luckina hmotnosť. To znamená, že jej kinetická energia v momente odlepenia sa od podložky je rovná mgh.

Ak chce Lucka skokom opustiť planétku, musí odletieť až do nekonečna. Tu už nemôžeme použiť vzťah pre potenciálnu energiu v homogénnom gravitačnom poli ako pri skoku na Zemi, ale musíme poctivo počítať

[3] Odpor paralelného zapojenia všetkých troch rezistorov, ktoré má určite menší odpor, je neznámy.
[4] Odpor sériového zapojenia všetkých troch rezistorov, ktoré má určite väčší odpor, je neznámy.

s radiálnym poľom planétky. V hraničnom prípade, keď má planétka najväčšiu možnú hmotnosť, aby Lucka vedela odskočiť, príde Lucka do nekonečna a po nekonečne dlhom čase sa tam zastaví. Luckina potenciálna energia na povrchu planétky je $-\frac{GMm}{R}$, kde M je hmotnosť planétky a R je jej polomer, a pri výskoku získa kinetickú energiu rovnú mgh. V nekonečne Lucka stojí a potenciálnu energiu má definitoricky nulovú. Kvôli zachovaniu energie sa súčet kinetickej a potenciálnej energie v momente odlepenia sa od planétky rovná ich súčtu v nekonečne, teda

$$mgh - \frac{GMm}{R} = 0 + 0. \tag{23.1}$$

Odtiaľ vyjadríme hmotnosť planétky v hraničnom prípade,

$$M = \frac{Rgh}{G}, \tag{23.2}$$

a následne hustotu

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3gh}{4\pi R^2 G} \approx 5618\ \mathrm{kg/m^3}.$$

24 Hmotnosť Slnka označme $M_\odot$ a hmotnosť Zeme $M_\oplus$. Ich vzájomná vzdialenosť je R. Oba tieto objekty obiehajú okolo spoločného ťažiska nejakou uhlovou rýchlosťou. Najskôr ale budeme musieť nájsť polohu ich spoločného ťažiska. Označme vzdialenosť medzi Slnkom a ťažiskom r. Potom platí

$$M_\odot r = M_\oplus (R - r) \tag{24.1}$$

a odtiaľ

$$r = \frac{M_\oplus}{M_\odot + M_\oplus} R. \tag{24.2}$$

Slnko obieha okolo ťažiska po kružnici s polomerom r a rýchlosťou v. Sila, ktorá toto spôsobuje, je gravitačná, a po tomto uvedomení si dostávame rovnicu

$$M_\odot \frac{v^2}{r} = G\frac{M_\odot M_\oplus}{R^2}, \tag{24.3}$$

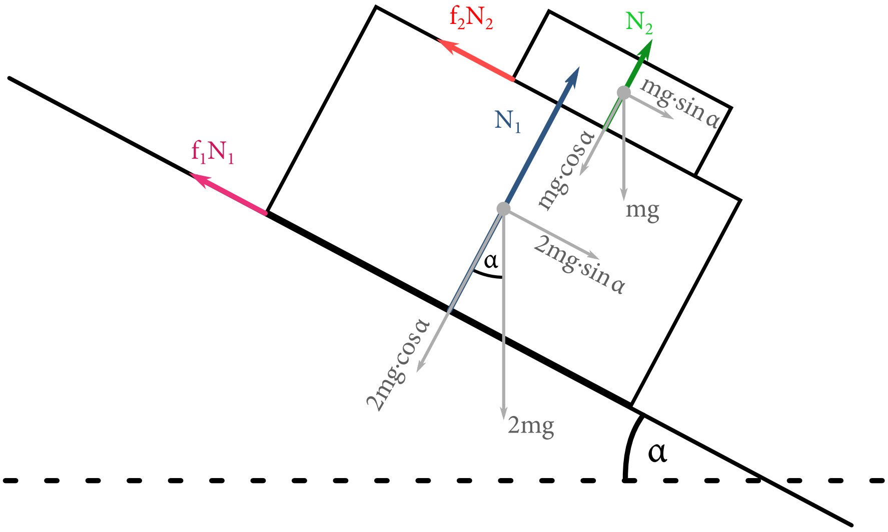
do ktorej už len dosadíme polomer r z rovnice 24.2 a vyjadríme v. Dostaneme

$$v = \sqrt{G\frac{M_\oplus^2}{R(M_\odot + M_\oplus)}}, \tag{24.4}$$

čo po dosadení číselných konštánt dáva $v \approx 9\ \mathrm{cm/s}$. Keď sa Slnko pohybuje kolmo na smer k mimozemskému pozorovateľovi, je jeho radiálna rýchlosť nulová. Keď sa pohybuje v smere k alebo od pozorovateľa, je jeho radiálna rýchlosť $\pm v$. Preto práve v je amplitúda radiálnej rýchlosti Slnka.

25 Pri zakreslení síl, ktoré pôsobia na tanier a rezeň, narazíme na hlavnú netriviálnu myšlienku úlohy. Aké je relatívne zrýchlenie taniera a rezňa? V skutočnosti má rezeň väčšie alebo rovné zrýchlenie ako tanier, dôvod si teraz rozoberme. Pozrime sa na situáciu, keď f_1, teda koeficient šmykového trenia medzi tanierom a stolom, je nulový. V tom prípade sa tanier a rezeň budú hýbať so zrýchlením $g \sin\alpha$. Teda ich relatívne zrýchlenie bude nulové a rezeň sa vzhľadom k tanieru nebude hýbať.

Túto situáciu si položme do horizontálneho smeru. Nič sa nebude hýbať. Keď pridáme silu, ktorá nám bude reprezentovať treciu šmykovú silu medzi tanierom a stolom (F_t), čiže silu, ktorá pôsobí iba na tanier, ľahko si všimneme, že rezeň bude chcieť zotrvať vzhľadom ku stolu na mieste. Bude naň teda pôsobiť trecia sila od taniera (T), ktorá mu bude brániť v zotrvaní. T nebude spôsobovať väčšie zrýchlenie, ako spôsobuje F_t. Vidíme, že rezeň pôjde rýchlejšie dole ako tanier.



Obrázek 25.1: *Náčrt síl pôsobiacich na tanier a rezeň.*

Z obrázka vidíme všetky sily a môžeme ísť písať pohybové rovnice pre tanier,

$$2ma = 2mg\sin\alpha - (2m+m)g f_1 \cos\alpha + mg f_2 \cos\alpha, \tag{25.1}$$

kde f_2 je koeficient šmykového trenia medzi tanierom a rezňom.

Prvý člen na pravej strane rovnice 25.1 predstavuje zložku tiažovej sily, ktorá posúva tanier smerom dole zo stola, druhý predstavuje šmykovú treciu silu medzi tanierom a stolom (pre hmotnosť $3m$, lebo zhora na tanier tlačí aj rezeň) a tretí reakčnú silu na šmykovú treciu silu medzi rezňom a tanierom.

Po dosadení hodnôt a vyjadrení a dostávame výsledné zrýchlenie taniera $a \approx 1{,}08\ \mathrm{m/s^2}$.

26 Celkovú dĺžku výslednej sústavy pružín si označme ℓ. Potom sila, ktorou je naťahovaná prvá z pružín je jednoducho $k\ell$ a sila, ktorou je druhá z pružín stĺáčaná, je $K(L-\ell)$. Tieto dve sily nám stačí dať do rovnosti a dostaneme

$$k\ell = K(L-\ell) \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{KL}{k+K}. \tag{26.1}$$

Teraz si predstavme, že túto sústavu pružín natiahneme o dĺžku $\Delta\ell$, takže jej výsledná dĺžka bude $\ell + \Delta\ell$. Aká bude výsledná sila? Prvá z pružín bude natiahnutá silou $k(\ell+\Delta\ell)$ a druhá bude stlačená silou $K(L-\ell-\Delta\ell)$. Tieto dve sily pôsobia opačnými smermi, teda ich veľkosti musíme odčítať. Výsledná sila teda je

$$F = k(\ell+\Delta\ell) - K(L-\ell-\Delta\ell). \tag{26.2}$$

Napokon využijeme rovnicu 26.1, čím sa nám rovnica zjednoduší na tvar

$$F = (K + k)\,\Delta\ell \tag{26.3}$$

a z toho už vidíme, že výsledná tuhosť je $K + k$.

27 Podľa zadania máme zjavne frekvenciu vyjadriť len pomocou zadaných veličín. Predpokladajme teda, že struna kmitá s frekvenciou

$$f \sim F^a M^b L^c \text{ pre nejaké } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{27.1}$$

Znamienko rovnosti sme nenapísali práve preto, že nás teraz zaujímajú len závislosti od fyzikálnych veličín, a nie to, či sa vo vzťahu nachádza aj násobenie nejakým číslom. To rozmerovou analýzou nemáme ako určiť. Hodnoty a, b, c zvolíme tak, aby náš súčin veličín vo vzťahu 27.1 mal fyzikálnu jednotku frekvencie, čiže s^{-1}. Okrem toho, newton je v základných jednotkách vyjadrený ako $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$.

Pravú stranu vzťahu 27.1 prepíšeme do fyzikálnych jednotiek ako

$$\left(\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}\right)^a \mathrm{kg}^b \mathrm{m}^c = \mathrm{kg}^{a+b} \mathrm{m}^{a+c} \mathrm{s}^{-2a}, \tag{27.2}$$

čo má byť to isté, ako jednotka frekvencie, čiže

$$\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{kg}^{a+b} \mathrm{m}^{a+c} \mathrm{s}^{-2a}. \tag{27.3}$$

Aby táto rovnosť platila, musia sa exponenty pri jednotlivých fyzikálnych jednotkách rovnať. Preto pri pohľade na sekundy vidíme, že $a = \frac{1}{2}$, odkiaľ je hneď jasné, že $b = -\frac{1}{2}$ a $c = -\frac{1}{2}$. Preto gitarová struna kmitá s frekvenciou $f \sim \sqrt{\frac{F}{ML}}$.

Pre zaujímavosť, ak by sme to zrátali poriadne, dostali by sme, že základná frekvencia kmitania gitarovej struny je $f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{ML}}$.

28 Zo zadania vieme, že

$$N(m > M) = 10^{a-bM}, \tag{28.1}$$

takže pre počet zemetrasení v intervale 4,0 – 4,9 zrejme platí

$$\begin{aligned} N(3{,}95 \le m < 4{,}95) &= N(m \ge 3{,}95) - N(m \ge 4{,}95) \\ &= 10^{a-3{,}95b} - 10^{a-4{,}95b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-4{,}95b}\left(10^b - 1\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-4{,}95}(\beta - 1), \end{aligned} \tag{28.2}$$

kde sme zaviedli označenie $10^a \equiv \alpha$ a $10^b \equiv \beta$. Analogicky pre interval 5,0 – 5,9 máme

$$\begin{aligned} N(4{,}95 \leq m < 5{,}95) &= N(m \geq 4{,}95) - N(m \geq 5{,}95) \\ &= 10^{a-4{,}95b} - 10^{a-5{,}95b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-5{,}95b}\left(10^b - 1\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-5{,}95}(\beta - 1). \end{aligned} \tag{28.3}$$

Pre hľadaný počet zemetrasení s magnitúdom 5,0 platí

$$\begin{aligned} N(4{,}95 \leq m < 5{,}05) &= N(m \geq 4{,}95) - N(m \geq 5{,}05) \\ &= 10^{a-4{,}95b} - 10^{a-5{,}05b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-4{,}95b}\left(1 - 10^{-0{,}1b}\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-4{,}95}\left(1 - \beta^{-0{,}1}\right). \end{aligned} \tag{28.4}$$

Z podielu rovníc 28.2 a 28.3 dostávame

$$\beta = \frac{N(3{,}95 \leq m < 4{,}95)}{N(4{,}95 \leq m < 5{,}95)}. \tag{28.5}$$

Z rovnice 28.2 navyše vyplýva, že

$$\alpha \cdot \beta^{-4{,}95} = \frac{N(3{,}95 \leq m < 4{,}95)}{\beta - 1}. \tag{28.6}$$

Pre hľadaný počet zemetrasení preto dostávame

$$N(4{,}95 \leq m < 5{,}05) = N(3{,}95 \leq m < 4{,}95) \cdot \frac{1 - \beta^{-0{,}1}}{\beta - 1}, \tag{28.7}$$

čo po vyčíslení pre hodnoty zo zadania dáva $N(4{,}95 \leq m < 5{,}05) \approx 170$.

29 Kotolňa svojím výkonom zohrieva Matfyz, čiže chceme zistiť, koľko joulov prejde za sekundu z mysterióznej kvapaliny v radiátoroch do vzduchu vnútri budovy. Ak kvapalina zmení teplotu o ΔT, jej objem sa zmení o $V_0 \beta \, \Delta T$, kde V_0 je jej pôvodný objem a β je súčiniteľ objemovej teplotnej rozťažnosti mysterióznej kvapaliny.[5]

Zmena teploty je teda

$$\Delta T = \frac{\Delta V}{V_0 \beta}. \tag{29.1}$$

[5] V skutočnosti je závislosť exponenciálna, ale keďže táto hodnota je oproti zmene teploty malá, môžeme ju linearizovať.

Teplo, ktoré kvapalina ochladením odovzdá, je jednoducho

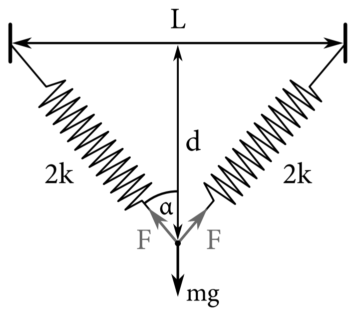
$$Q = mc\,\Delta T, \tag{29.2}$$

kde m je hmotnosť mysterióznej kvapaliny a c je merná tepelná kapacita mysterióznej kvapaliny. Zhodou okolností, alebo skôr vďaka milosrdnosti autora úlohy, má ochladená kvapalina rovnakú hustotu ako voda, čiže vytekajúcich 9,9 l za sekundu má hmotnosť $m = 9{,}9$ kg. Po dosadení do rovnice 29.2 zistíme, že $Q \approx 2{,}2$ MJ. Keďže toto teplo kvapalina odovzdá budove podľa zadania každú sekundu, výkon kotolne je približne 2,2 MW.

$\boxed{30}$ Najskôr si uvedomme, že ak sa Syseľ s hmotnosťou m zavesí na pružinu s tuhosťou k, potom jej predĺženie bude

$$\Delta L = \frac{mg}{k}. \tag{30.1}$$

Výšku, o ktorú klesne, ak sa zavesí za stred pružiny ako v zadaní, si označme d, viď obrázok 30.1. Celú pružinu si môžeme rozdeliť na dve pružiny tuhosti $2k$. Pokojová dĺžka každej z nich je $\frac{L}{2}$ a skutočná dĺžka každej z nich je $\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2}$.



Obrázek 30.1: *Geometria zaveseného Sysľa*

Sila F, ktorou každá z pružiniek pôsobí na Sysľa, je potom

$$F = 2k\left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2} - \frac{L}{2}\right). \tag{30.2}$$

Aby bol Syseľ v rovnováhe, sily od pružiniek sa musia vyrovnať s tiažovou silou. Musí teda platiť rovnica

$$mg = 2F\cos\alpha, \tag{30.3}$$

kde z geometrie vidíme, že

$$\cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2}}. \tag{30.4}$$

Keď za silu F a $\cos\alpha$ dosadíme z rovníc 30.2, 30.3, dostaneme

$$mg = 4k\left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2} - \frac{L}{2}\right)\frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2}}. \tag{30.5}$$

Túto rovnicu teraz vydelíme tuhosťou k a využijeme rovnicu 30.1,

$$\Delta L = 4\left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2} - \frac{L}{2}\right)\frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2}}$$
$$-4Ld = \sqrt{L^2 + 4d^2}(\Delta L - 4d) \tag{30.6}$$

a toto umocníme, aby sme sa zbavili odmocniny:

$$\left(L^2 + 4d^2\right)(\Delta L - 4d)^2 = 16L^2d^2. \tag{30.7}$$

Po roznásobení dostaneme kvartickú rovnicu

$$L^2\,\Delta L^2 - 8L^2\,\Delta Ld + 4\,\Delta L^2d^2 - 32\,\Delta Ld^3 + 64d^4 = 0 \tag{30.8}$$

s neznámou d. Tá sa síce analyticky rieši dosť ťažko, ale po dosadení všetkých číselných konštánt $L = 1$ m a $\Delta L = 2$ m ju vieme vyriešiť numericky.

Najjednoduchší spôsob ako nájsť koreň rovnice numericky je binárnym vyhľadávaním. Označme ľavú stranu rovnice 30.8 ako funkciu $f(d)$. Najskôr si tipneme zopár hodnôt pre d a vyčíslime $f(d)$. Dostaneme

$$f(0) = 4, \quad f(1/2) = -4 \quad \text{a} \quad f(1) = 4. \tag{30.9}$$

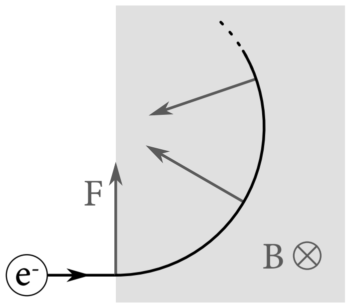
Zo znamienok týchto výsledkov vyplýva, že jeden koreň bude ležať v intervale 0 – 0,5 m a druhý v intervale 0,5 – 1 m. Ďalej postupujeme tak, že tieto intervaly budeme deliť na polovicu a podľa znamienka funkcie $f(d)$ zakaždým zúžime interval, až kým nedosiahneme požadovanú presnosť.

Dostaneme dva korene, $d = 0{,}2655$ m a $d = 0{,}9416$ m. Po dosadení naspäť do rovnice 30.6 však zistíme, že prvé z riešení jej nevyhovuje. Toto riešenie teda nie je fyzikálne správne a vzniklo v kroku, kde sme rovnicu 30.6 umocnili na druhú. Teda výška, o ktorú Syseľ klesne, je $d \approx 0{,}94$ m.

31 Na elektricky nabité častice pôsobí silovo elektrické aj magnetické pole. Kým pôsobenie elektrického poľa je jednoducho priťahovaním alebo odpudzovaním analogickým gravitácii, pôsobenie magnetického poľa na nabitú časticu sa riadi zložitejším vzťahom

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{31.1}$$

Popíšme našu situáciu v kartézskych súradniciach. Povedzme, že elektrón prilieta v smere osi $+x$ a magnetické pole pôsobí všade v smere rovnobežnom s osou $-z$ (taká je najbežnejšia konvencia). Potom v okamihu zapnutia magnetického poľa bude sila pôsobiť v smere $+y$. Ako sa dráha elektrónu zakrivuje do smeru $+y$, smer tejto sily sa otáča tiež tak, aby bol vždy kolmý aj na okamžitý smer letu elektrónu, aj na magnetické pole. A keďže elektrón spočiatku má z-zložku rýchlosti nulovú a z-zložka sily je nulová vždy, elektrón zostane uväznený v rovine xy. A keďže sila (a teda aj zrýchlenie) je vždy kolmá na smer rýchlosti, veľkosť rýchlosti sa nemení, iba sa otáča jej smer, a to konštantnou rýchlosťou, keďže veľkosť žiadnej veličiny v silovom zákone sa nemení. Ide teda o pohyb po kružnici.



Obrázek 31.1: *Trajektória elektrónu*

Keďže pohyb je vždy kolmý na smer poľa, takže veľkosť sily F spočítame jednoducho tak, že vektorový súčin v rovnici 31.1 nahradíme jednoduchým súčinom veľkostí rýchlosti a indukcie. Keďže toto je sila spôsobujúca pohyb po kružnici, môžeme ju dať do rovnosti s výrazom pre dostredivé zrýchlenie a vyjadriť R,

$$m_e \frac{v^2}{R} = q_e v B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m_e v}{q_e B}. \tag{31.2}$$

Tomuto sa hovorí Larmorov polomer. Zaujíma nás, za aký čas prejde elektrón po štvrťkružnici s polomerom R, ktorej dĺžka je triviálne $\frac{\pi}{2}R$. Je to

$$t = \frac{\pi}{2v} R = \frac{\pi}{2v} \frac{m_e v}{q_e B} = \frac{\pi m_e}{2 q_e B}. \tag{31.3}$$

Všetky veličiny v tomto výraze poznáme – elementárny náboj, hmotnosť elektrónu, indukciu magnetického poľa – a vyčíslime $t \approx 1$ ns.

32 Označme hmotnosť balóna M. Potom platí $F = V\rho g - Mg$, kde ρ je hustota vody. Nápodobne, sila ktorou nakoniec balón tlačí na dno je $F' = Mg - V'\rho g$, keďže voda ako kvapalina sa nestlačí a nezmení svoju hustotu. Zadanie hovorí, že stláčanie balóna prebieha izotermicky, a teda pre tlaky v jednotlivých prípadoch platí $pV = p'V'$.

Ostáva nám identifikovať hodnoty tlakov. Na počiatku je balón vystavený atmosférickému tlaku $p = p_{\mathrm{atm}}$, keďže na balón tlak vody pôsobí rovnako ako na piest. Na dne je tlak zvýšený jednak pôsobením zaťaženého piestu mg/S, a jednak vodným stĺpcom, ktorý je už nad balónom.

Pre V' teda dostávame

$$\begin{gathered} p_{\mathrm{atm}} V = p'V' = (p_{\mathrm{atm}} + mg/S + h\rho g)V' \\ V' = \frac{p_{\mathrm{atm}}}{p_{\mathrm{atm}} + mg/S + h\rho g} V \end{gathered} \tag{32.1}$$

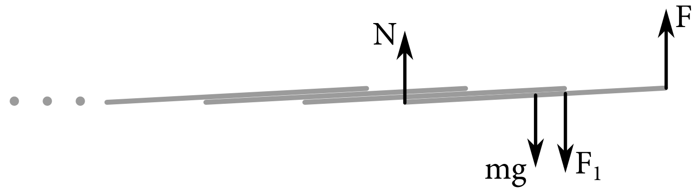
Tento výsledok ostáva dosadiť do vzťahu pre F' a získame

$$F' = Mg - V'\rho g = (V - V')\rho g - F = \frac{V\rho g}{1 + \frac{p_{\mathrm{atm}}/g}{m/S + h\rho}} - F \approx 0{,}126\ \mathrm{N}. \tag{32.2}$$

33 Nekonečne veľa kariet sa náročne označuje, ale my si ich označme. Karta, ktorá je naspodku, je naša prvá karta. Keď ju chceme nadvihnúť o maličký kúsok, musí vyjsť celkový moment síl pôsobiacich na túto kartu nulový vzhľadom na os otáčania. To je v našom prípade okraj karty, ktorý sa nachádza pod ostatnými kartami,

$$F\ell = \frac{1}{2}mg\ell + (\ell - \Delta\ell)F_1, \tag{33.1}$$

pričom F je sila, ktorou pôsobí Justínka na kartu a F_1 je sila, ktorou pôsobí druhá karta (a cez ňu všetky ďalšie karty) na prvú.



Obrázek 33.1: *Sily pôsobiace na karty*

Pri nekonečnom počte karát môžeme predpokladať, že $F = F_1$. Ak totiž Justínka vytiahne prvú kartu, v nekonečnom zostatku je stále nekonečne veľa kariet, ktoré potrebuje nadvihnúť. S týmto predpokladom sa z rovnice 33.1 dostávame k výsledku

$$F = \frac{mg\ell}{2\,\Delta\ell}. \tag{33.2}$$

34 Na celú situáciu sa pozrieme v neinerciálnej vzťažnej sústave s počiatkom v osi otáčania kolotoča a rotujúcou rovnako ako kolotoč. Preto kolotoč v tejto vzťažnej sústave bude stáť. Keď ešte Snehulienka sedí na svojom pôvodnom mieste vo vzdialenosti r, v tejto neinerciálnej sústave na ňu pôsobí odstredivá sila $F_o = m\omega^2 r$. Ak sa chce premiestniť do stredu, musí prekonať túto silu. Tá však pôsobí v radiálnom smere, a teda má nulový moment.

Navyše, keď sa začne pohybovať, príde do hry ďalšia fiktívna sila, a to Coriolisova. Tá má veľkosť $F_c = 2m\omega v_\perp$, kde $v_\perp$ je zložka Snehulienkinej rýchlosti kolmá na os rotácie. Táto sila je zároveň kolmá na $v_\perp$. Ak sa Snehulienka začne presúvať, musí prekonávať aj túto silu, a teda pôsobí na kolotoč reálnou silou s nenulovým momentom. Táto sila bude preto roztáčať trpaslíkov. Preto sa energia nezachováva (Snehulienka koná prácu). Zachováva sa ale moment hybnosti, lebo na kolotoč pôsobí jediná vonkajšia sila, a to sila od zeme cez tyč, ktorá je upevnená v osi otáčania, a teda určite nepôsobí žiadnym momentom.

Snehulienkin moment hybnosti na konci manévra je nulový a z rovnosti momentov hybností dostávame

$$(m_s + 7m_t)\omega_1 r^2 = 7m_t\omega_2 r^2, \tag{34.1}$$

kde m_s je hmotnosť Snehulienky, m_t je hmotnosť jedného trpaslíka, ω_1 je uhlová rýchlosť na začiatku a ω_2 uhlová rýchlosť po Snehulienkinom manévri.

Zo zadania vieme, že $\omega_1 = \frac{2}{3}\omega_2$, odkiaľ dostávame $(m_s + 7m_t) = \frac{3}{2} \cdot 7m_t$. Jeden trpaslík má teda hmotnosť

$$m_t = \frac{2}{7} m_s = 16\ \text{kg}. \tag{34.2}$$

35 Vychýľme disk zo stredovej polohy o Δx. V neporušenom valci v stlačenej komore v dôsledku vychýlenia disku vzrastie tlak o $\Delta p(\Delta x)$ a vo zväčšenej komore poklesne tlak o rovnakú hodnotu[6]. Na disk preto pôsobí sila veľkosti $F_1(\Delta x) = 2\,\Delta p(\Delta x) S$, ktorá sa pokúša vrátiť disk do stredovej polohy. V priblížení malých výchyliek je závislosť $\Delta p(\Delta x)$ lineárna.

Vo valci s odtrhnutým dnom sa v dôsledku vychýlenia disku o Δx zo stredovej polohy tlak v neporušenej komore zmení síce opäť o $\Delta p(\Delta x)$, no v porušenej komore už zostane atmosférický tlak. Sila pôsobiaca na disk je preto teraz už len

$$F_2(\Delta x) = \Delta p(\Delta x) S = \frac{1}{2} F_1(\Delta x). \tag{35.1}$$

Popísaná situácia je ekvivalentná tomu, ako keby bol disk pripevnený raz k pružine s vhodnou tuhosťou k_1 a v druhom prípade k pružine s tuhosťou $k_2 = \frac{1}{2}k_1$. Keďže pre periódu malých kmitov závažia na pružine platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, kde m je hmotnosť závažia a k je tuhosť pružiny, hľadaný pomer periód bude

$$q = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{35.2}$$

36 Akým mechanizmom sa koleso vôbec rozhýbe po dopade na zem? Nuž, ak má koleso hmotnosť m, tlačí na zem silou mg. Okrem toho sa zemi zdá, že koleso sa pohybuje – keďže sa točí uhlovou rýchlosťou ω_0, jeho povrch sa v bode dotyku hýbe voči ťažisku kolesa aj voči zemi rýchlosťou $R\omega_0$, kde $R = 2{,}5$ m je polomer kolesa. Z toho vyplýva, že na koleso bude v bode dotyku pôsobiť trecia sila veľkosti fmg (kde f je koeficient šmykového trenia) v smere rovnobežnom s povrchom zeme, proti smeru otáčania kolesa. Ťažisko kolesa začne rovnomerne zrýchľovať vo vodorovnom smere s rýchlosťou $v_x(t) = at = fgt$, no moment trecej sily tiež bude rovnomerne spomaľovať otáčanie kolesa, takže priebeh jeho uhlovej rýchlosti bude

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{fmgR}{I} t, \tag{36.1}$$

kde I je moment zotrvačnosti kolesa.

Trecia sila, samozrejme, nepôsobí donekonečna – prestane tak činiť v okamihu, keď koleso prestane prešmykovať. Toto nastane, keď sa obvodová rýchlosť $R\omega(t)$ na okraji kolesa vyrovná s posuvnou rýchlosťou $v_x(t)$ a koleso sa ustáli vo valivom pohybe. Vyjadrime čas t_v, v ktorom toto nastane,

$$R\left(\omega_0 - \frac{fmgR}{I} t_v\right) = fgt_v \quad \Rightarrow \quad t_v = \frac{R\omega_0}{fg\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}. \tag{36.2}$$

[6] Toto celé platí len v prípade malých výchyliek, kedy možno závislosť zmeny tlaku na výchylke linearizovať.

Konečná posuvná rýchlosť kolesa je potom jednoducho

$$v_v = v_x(t_v) = fgt_v = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{mR^2}{I}}. \tag{36.3}$$

Toto je známa veličina; to, čo chceme nájsť, je rýchlosť škrečka pred odtrhnutím kolesa v_s, čo je jednoducho počiatočná obvodová rýchlosť $R\omega_0$,

$$v_s = R\omega_0 = v_v\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right). \tag{36.4}$$

Ako vidíme, potrebujeme ešte zistiť hmotnosť a moment zotrvačnosti kolesa. Moment zotrvačnosti sa dá poskladať lineárne, tyčku po tyčke. Pre všetkých 50 malých tyčiek a pre dve obruče ho určíme jednoducho: všetky ležia v rovnakej vzdialenosti od osi otáčania – aj keď si ich rozkúskujeme na malé čiastočky, každá čiastočka je vo vzdialenosti R od osi otáčania. Ich celkový moment zotrvačnosti je teda $50\lambda AR^2 + 2\lambda(2\pi R)R^2$, kde A je dĺžka malej tyčky.

Zložitejšie je to s dvomi priemerovými tyčkami. Každá má hmotnosť $2R\lambda$ a v tabuľkách sa dočítame, že moment zotrvačnosti tyče s dĺžkou X a hmotnosťou M rotujúcej okolo osi prechádzajúcej cez jej stred kolmej na samotnú tyč je $\frac{1}{12}MX^2$.

Platí $X = 2R$; dosadíme hodnotu hmotnosti a zistíme, že jedna priemerová tyč má moment zotrvačnosti $\frac{2}{3}\lambda R^3$. Teda celkový moment zotrvačnosti kolesa je

$$I = \lambda R^2\left(50A + \left(4\pi + \frac{4}{3}\right)R\right). \tag{36.5}$$

Chytro si vyjadríme hmotnosť kolesa z jeho rozmerov a dĺžkovej hustoty ako

$$m = \lambda(50A + (4\pi + 4)R), \tag{36.6}$$

a teda rýchlosť škrečka je rovná

$$v_s = v_v\left(1 + \frac{50A + (4\pi + 4)R}{50A + \left(4\pi + \frac{4}{3}\right)R}\right) \doteq 2{,}11\ \mathrm{m/s}. \tag{36.7}$$

37 Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že satelit uletí do nekonečna. Avšak, treba si uvedomiť, že pri voľbe dostatočne malej sily ostane satelit stále viazaný k Slnku. Jeho dráhou už síce nebudú kužeľosečky, ale bude to nejaká ohraničená krivka, a radiálna vzdialenosť od Slnka teda bude mať definované maximum. Hľadáme takú veľkosť sily F, aby toto maximum bolo vo vzdialenosti $2R$ od Slnka.

Vieme, že pred tým, ako satelit zapol motory, sa pohyboval obežnou rýchlosťou $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ po kruhovej trajektórii s polomerom R. Po zapnutí motorov sa síce jeho trajektória drasticky zmenila, ale stále platí zákon zachovania momentu hybnosti, pretože sila F pôsobila iba v radiálnom smere. Rýchlosť satelitu vo vzdialenosti $2R$ si označme v. Keďže toto je najvzdialenejší bod jeho trajektórie od Slnka, rýchlosť bude kolmá na spojnicu so Slnkom. Potom bude platiť

$$v_0R = v2R, \tag{37.1}$$

a teda

$$v = \frac{v_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{R}}. \tag{37.2}$$

Ďalej využijeme zákon zachovania energie. Tu si ale musíme dať pozor, lebo sila F tiež koná nejakú prácu. Na to si trajektóriu satelitu rozdelíme na veľa malých úsekov $\Delta\vec{s}$, na každom spočítame prácu $\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$, a potom všetky ΔW sčítame dokopy. Avšak ak si $\Delta\vec{s}$ rozložíme na radiálnu a priečnu zložku, vďaka skalárnemu súčinu môžeme ΔW rátať ako jednoduchý súčin sily F a zmeny radiálnej vzdialenosti od Slnka. Preto celková práca, ktorú sila vykoná od okamihu zapnutia motorov až po dosiahnutie maxima je FR (vzdialenosť satelitu od Slnka sa zmenila o R). Potom zákon zachovania energie môžeme zapísať v tvare

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{2R} - FR. \tag{37.3}$$

Za počiatočnú rýchlosť v_0 dosadíme obvodovú rýchlosť $\sqrt{\frac{GM}{R}}$, za rýchlosť v dosadíme z rovnice 37.2 a vyjadríme silu F. Vyjde

$$F = \frac{1}{8}\frac{GMm}{R^2}. \tag{37.4}$$

38 Uvedomme si, aké sily pôsobia na zlatú platňu. V prvom rade máme gravitačnú silu danú Newtonovým gravitačným zákonom. V druhom rade sa od platne odrážajú fotóny z hviezdy, ktoré jej tým odovzdávajú hybnosť. Využijeme alternatívnu formu 2. Newtonovho zákona, $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, kde Δp je zmena hybnosti. Zmena hybnosti fotónov, ktoré sa odrazia za čas Δt od platne, je $\Delta p = \frac{2E}{c}$, kde E je energia, ktorá dopadne na platňu. Fotóny majú po kolmom[7] odraze rovnakú hybnosť v opačnom smere, preto zmena ich hybnosti je dvojnásobná.

Ak hviezda vyžiari energiu E_c, na platňu vo vzdialenosti D dopadne

$$E = \frac{A}{4\pi D^2}E_c, \tag{38.1}$$

kde A je zatiaľ neznáma plocha platne.

Vyžiarenú energiu vieme zistiť pomocou Stefanovho-Boltzmannovho zákona pre žiarenie dokonale čierneho telesa ako

$$E_c = P\,\Delta t = \sigma T^4 S\,\Delta t = \sigma T^4 4\pi R^2\,\Delta t. \tag{38.2}$$

Keďže list má byť nehybný, sila spôsobená žiarením musí byť v rovnosti s gravitačnou silou. Odtiaľ dostávame rovnosť

$$\frac{GMm}{D^2} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2E}{c\,\Delta t} = \frac{2A\sigma T^4 4\pi R^2}{4\pi D^2 c}, \tag{38.3}$$

a teda vyjadríme plošnú hustotu

$$\frac{m}{A} = \frac{2\sigma T^4 R^2}{GMc}. \tag{38.4}$$

[7] Pre $D \gg R$ môžeme hviezdu považovať za bodový zdroj

Môžeme si všimnúť, že plošná hustota platne nezávisí na vzdialenosti od hviezdy. To sa dalo čakať, nakoľko obe sily klesajú úmerne D^{-2}.

39 Na tento problém, ako je to časté v špeciálnej teórii relativity, sa dá ísť dvojak: rigorózne alebo trikovo. Označme lodný čas trvania cesty ako $\tau = 2\,600\,000$ rokov a vzdialenosť galaxie M31 od Zeme ako $D = c\tau = 2\,600\,000$ svetelných rokov.

Rigorózny postup

Na vec sa pozrieme v dvoch vzťažných sústavách, a v každej si napíšeme časopriestorové súradnice Zeme a galaxie M31. V zemskej sústave nech je Zem na $t = 0, x = 0$. Nech je galaxia M31 na $t = t_G, x = D$, kde D je udaná vzdialenosť, a potom $t_G = \frac{D}{v}$, kde v je hľadaná rýchlosť lode. Vo vzťažnej sústave lode sa tieto súradnice zmenia podľa Lorentzovej transformácie. Zem je stále na $t' = 0$, $x' = 0$, no galaxia M31 je teraz na

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vD}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(D - vt), \tag{39.1}$$

kde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ je Lorentzov faktor.

Keďže v tejto sústave je loď nehybná, rozdiel časových súradníc galaxie M31 a Zeme (rovný t') je zároveň vlastným (a teda aj lodným) časom, ktorý loď nameria ako dĺžku trvania svojej cesty – teda $t' = \tau$. Dosadíme odvodený vzťah pre t a vyjadríme rýchlosť ako

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma D\left(\frac{1}{v} - \frac{v}{c^2}\right) = \frac{1}{v}\gamma D\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{v}\gamma D\gamma^{-2} = \frac{D}{v\gamma}, \\ \frac{D}{\tau} &= \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{c^2}{\frac{c^2}{v^2} - 1}}, \\ v &= \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2\tau^2}{D^2}}}. \end{aligned} \tag{39.2}$$

Ale $\frac{\tau}{D}$ je jednoducho prevrátená hodnota rýchlosti svetla c^{-1} (tak boli tieto veličiny zadané – pokojne sme si mohli zvoliť inú hodnotu τ, a výsledok by bol odlišný), a teda

$$v = \frac{c}{\sqrt{2}}. \tag{39.3}$$

Trikový postup

Keďže nás zaujíma lodný, čiže vlastný čas, predstavme si, že sme na palube lode a zamyslime sa, aké relativistické efekty pociťujeme. Pohybujúce sa hodiny spomalia, ale to nás nezaujíma. Okrem toho sa vzdialenosti medzi pohybujúcimi sa bodmi skrátia o Lorentzov faktor – a toto presne spôsobí, že sa nám vzdialenosť do cieľa bude zdať kratšia. Teda ak sa hýbeme rýchlosťou v, pozorovaná vzdialenosť do cieľa je rovná

$D_0 = D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ a uplynulý čas $\tau = \frac{D_0}{v}$. Podľa zadania však $\tau = \frac{D}{c}$, preto

$$\frac{D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} = \frac{D}{c} \tag{39.4}$$

a z tohto už rýchlo vytrieskame očakávaný výsledok z rovnice 39.3.

40 Ak máme stenu s plochou S a hrúbkou h a s tepelnou vodivosťou λ a udržiavame jej strany na teplotách t_1 a t_2, množstvo tepla, ktoré ňou pretečie za jednotku času, je

$$P = \frac{\lambda S}{h}(t_2 - t_1). \tag{40.1}$$

Pre praktickosť definujme súčiniteľ $\lambda S/h =: X$. Pozrime sa na zreťazenie dvoch stien so súčiniteľmi X_1 a X_2. Z kontinuity prenášaného tepla vieme, že

$$P = X_2(t_2 - t) = X_1(t - t_1), \tag{40.2}$$

kde t je teplota ich rozhrania. Tú možno vyjadriť ako

$$t = \frac{X_1 t_1 + X_2 t_2}{X_1 + X_2} \tag{40.3}$$

a pomocou nej tepelný tok

$$P = \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2}(t_2 - t_1). \tag{40.4}$$

Vidíme, že môžeme definovať efektívny súčiniteľ pre obe steny spolu,

$$X_{12} \coloneqq \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2}. \tag{40.5}$$

S touto prípravou sa môžeme vrhnúť na príklad samotný.

Pred inštaláciou polystyrénu bol tepelný tok od Dušana k susede

$$P = \frac{X_{\text{parkety}} X_{\text{betón}}}{X_{\text{parkety}} + X_{\text{betón}}}\left(t_{\text{u Dušana}} - t_{\text{u susedy}}\right) = X_{\text{parkety + betón}}\left(t_{\text{u Dušana}} - t_{\text{u susedy}}\right). \tag{40.6}$$

Ak zanedbáme kúrenie susedy osobne, rovnako veľký tepelný tok prechádza aj cez jej ostatné steny von,

$$P = X\left(t_{\text{u susedy}} - t_{\text{vonku}}\right), \tag{40.7}$$

kde X je (zatiaľ) neznámy súčiniteľ popisujúci tepelné straty susedy do vonkajšku. S jeho neznámosťou sa vieme popasovať za pomoci predchádzajúcich dvoch rovníc a určiť ho ako:

$$X = X_{\text{parkety + betón}} \frac{t_{\text{u Dušana}} - t_{\text{u susedy}}}{t_{\text{u susedy}} - t_{\text{vonku}}}. \tag{40.8}$$

Po zateplení sa súčiniteľ popisujúci tepelný tok medzi Dušanom a susedou zmení na

$$X_{\text{parkety + betón + polystyrén}} = \frac{X_{\text{parkety + betón}} X_{\text{polystyrén}}}{X_{\text{parkety + betón}} + X_{\text{polystyrén}}}. \tag{40.9}$$

Znova nastane rovnováha medzi tepelným tokom od Dušana k susede a od susedy von,

$$X_{\text{parkety + betón + polystyrén}}\left(t_{\text{u Dušana}} - t'_{\text{u susedy}}\right) = X\left(t'_{\text{u susedy}} - t_{\text{vonku}}\right). \tag{40.10}$$

Vďaka nášmu usilovnému preznačovaniu vieme vyjatriť teplotu u susedy po Dušanovom zateplení ako

$$t'_{\text{u susedy}} = \frac{X t_{\text{vonku}} + X_{\text{parkety + betón + polystyrén}} t_{\text{u Dušana}}}{X + X_{\text{parkety + betón + polystyrén}}}. \tag{40.11}$$

Dosadíme a zistíme, že teplota u susedy bude po novom 0,625 °C.

Výsledky

1 9

2 41 m

3 $\frac{5}{27}$

4 0,073 g/cm^3 = 73 kg/m^3

5 3,6 s = 10^{-3} h

6 $\frac{\sqrt{26}}{2}$ s ≐ 2,55 s

7 4,89 h = 17 591 s *alebo* 4 hodiny, 53 minút, 11 sekúnd

8 134

9 4 : 3

10 7,68 l

11 151,6 m. *Uznajte výsledky v intervale* 150 – 152 m.

12 2 Ω

13 1,2 m

14 98,3 kg. *Uznajte výsledky v intervale* 96 – 99 kg.

15 $\frac{\pi}{2}r^2 + r^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)r^2$

16 203 l, uznajte aj 0,2 m^3 = 200 l

17 $\frac{180°}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$

18 $\sqrt{300}$ m/s ≐ 17,32 m/s. *Uznajte výsledky v intervale* 17,15 – 17,35 m/s.

19 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ s ≐ 2,17 s

20 314 °C

21 26,25 Ω

22 521 W

23 5618 kg/m³, *uznajte výsledky v intervale* 5612 – 5727 kg/m³.

24 9 cm/s

25 *Uznajte výsledky v intervale* 1,08 – 1,10 m/s².

26 *Dĺžka* $L\frac{K}{k+K}$, *tuhosť* $k+K$. *Uznajte, len ak oba výrazy sú správne. Ak je správny len jeden, neupozorňujte na to, ktorý je chybný.*

27 $\sqrt{\frac{F}{ML}}$

28 170

29 2,2 MW

30 0,94 m

31 1,0 ns

32 0,126 N, *(prvé tri platné cifry riešenia)*

33 $\frac{mg\ell}{2\,\Delta\ell}$

34 16 kg

35 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

36 2,11 m/s

37 $\dfrac{GMm}{8R^2}$

38 $\dfrac{GMmc}{2R^2\sigma T^4}$

39 $\dfrac{c}{\sqrt{2}}$

40 0,625 °C