Dear readers,

in your hands you are holding the booklet of the 26th volume of Náboj Physics. The booklet contains all the physics problems you could have encountered during the competition this year, as well as the solutions to them, from which you can learn a lot. If you have any difficulty understanding any of them, do not hesitate to contact us; we will gladly clarify everything.

This booklet would not exist without the enormous effort of many people who participated in organising Náboj Physics. Most of us are students of Faculty of Mathematics, Physics and Informatics of Comenius University in Bratislava, and some of us also actively participate in organising the Physics Correspondence Seminar (FKS).

Náboj Physics continues with its international tradition. In the year 2023, Náboj Physics was held in Bratislava, Košice, Prague, Ostrava, Budapest, Gdańsk and Madrid. The results of this international clash can be found on our web site. For the international cooperation, we would like to thank to the local organisers: Patrik Rusnák (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Prague), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapest), Brygida Mielewska and Kamil Żmudziński (Gdańsk) and José Francisco Romero García (Madrid).

In the name of the entire team of organisers, we believe that you enjoyed Náboj Physics in 2023, and we hope that we see each other at Náboj next year. Either as competitors or organisers.

Jaroslav Valovčan
Chief organiser

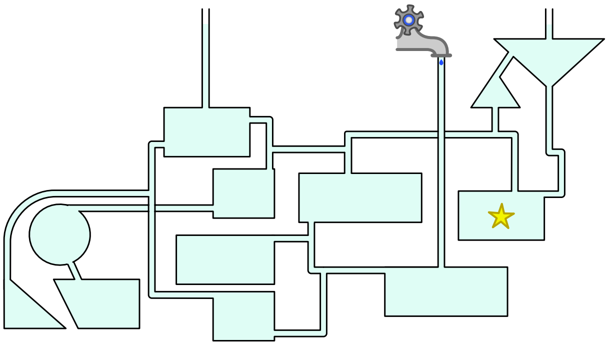
The booklet was contributed by:

Martin ‚Kvík' Baláž
Filip Brutovský
Jozef Csipes
Paulína ‚Jonka' Dujavová
Sára Folajtárová
Lucia ‚Želé' Gelenekyová
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Michal ‚Dvojka' Horanský
Jakub ‚Andrej' Kliment
Justína ‚Pľyš' Nováková
Patrik ‚PA3K' Rusnák
Adam Škrlec
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös
Matej Zigo

The results, the archive and other information can be found on the web site https://physics.naboj.org/.

Problemy

1 W pobliżu domu Adama trwa przebudowa wodociągu. Kiedy Adam przechodził obok spracowanych robotników, zauważył interesującą sieć rur i zbiorników na wodę, jak pokazano poniżej. Robotnicy rozpoczęli napełnianie sieci wodą. Ile zbiorników wypełni się wodą natychmiast po całkowitym napełnieniu zbiornika oznaczonego gwiazdką?

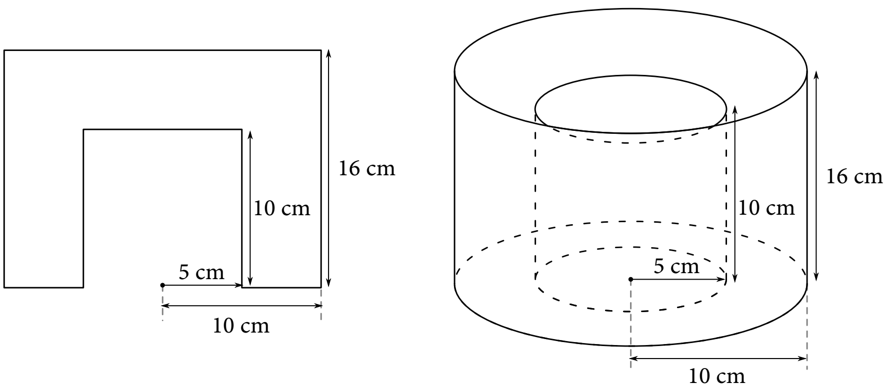


2 Janek Średnicki ma 100 000 włosów, z których każdy rośnie o 15 cm na rok. O ile zmienia się całkowita długość włosów Janka w ciągu jednego dnia?

3 Tomek włączył telewizor i dostroił się do transmisji na żywo ze Stanów Zjednoczonych. Komentator sportowy zauważył, że poruszając się z prędkością 200 mil na godzinę można pokonać długość jednego boiska do futbolu amerykańskiego w sekundę. Tomek był pod wielkim wrażeniem pomysłowości amerykańskiego systemu jednostek, przynajmniej do czasu, gdy sam sprawdził i odkrył, że komentator mylił się. O ile boisk piłkarskich na sekundę pomylił się komentator?

Boisko do futbolu amerykańskiego ma długość 120 jardów, a jedna mila to 1760 jardów.

4 Nawet firma Ziggo & Marinelli, wiodący producent mielonych ciastek, nie pozostała obojętna na inflację. W odróżnieniu od konkurencji nie podniosła cen swoich produktów; po prostu przeprojektowała kształt pojemnika. Nowy pojemnik ma kształt wydrążonego cylindra o promieniu 10 cm i wysokości 16 cm, natomiast środkowa okrągła część podstawy o promieniu 5 cm jest podniesiona o 10 cm. Jaka jest gęstość mieszanki mielonych ciastek, jeśli całe opakowanie waży 350 g a pusty pojemnik waży 40 g?

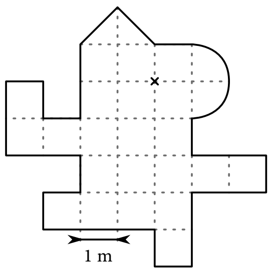


5 Jurek tak bardzo kocha bieganie, że kupił nawet smartwatch. Po miesiącu intensywnego użytkowania, jego zegarek pogratulował mu osiągnięcia prędkości biegowej 17 km/h. Ale teraz na zewnątrz pada deszcz i Jurek musi biegać na bieżni o długości 2 m. Nastawił prędkość bieżni na 5 m/s i zaczął biec dokładnie na jej środku. Po jakim czasie Jurek spadnie z bieżni?

6 Rewolwerowiec Seba stoi na środku rynku w miasteczku na Dzikim Zachodzie. Jednak jego radość ze zbliżającego się południa psuje fakt, że powoli osacza go grupa lokalsów. Jego ucieczka zależy teraz od skutecznego odwrócenia ich uwagi. Na szczęście, po wczorajszej balandze, na rynku znajduje się ogromna kałuża łatwopalnej whisky.

Seba strzela ze swojego niezawodnego rewolweru w miejsce oznaczone krzyżykiem. Whisky natychmiast zapala się, a płomienie rozprzestrzeniają się z szybkością 2 m/s. Ile czasu zajmie zapalenie się całej kałuży?

Kwadraty siatki mają długość boku równą 1 m.



7 *Wings for life* to bieg charytatywny, w którym obowiązują następujące zasady: wszyscy zawodnicy na całym świecie rozpoczynają rywalizację w tym samym momencie. Pół godziny później za biegaczami zaczyna jechać specjalny samochód „meta" z szybkością 14 km/h i po kolejnych półgodzinnych przedziałach czasu natychmiast przyspiesza do większej szybkości. Jeśli zawodnik zostanie doścignięty przez samochód, musi zejść z trasy.

Rekord trasy wynosi 92,14 km. Jak długo trwał bieg, jeżeli szybkość w półgodzinnych segmentach wynosiła 14, 15, 16, 17, 18, 22, 26, 30 i 34 km/h? Po osiągnięciu 34 km/h samochód już nie przyspiesza.

8 Podaj sumę liczb wszystkich prawdziwych stwierdzeń:

1	Zwykłe wyłączniki automatyczne w mieszkaniach mają prąd znamionowy o wartości nominalnej około 150 A.
2	Ogniwa galwaniczne są źródłami prądu stałego.
4	Pomiędzy izolatorami mogą występować siły elektryczne.
8	Opór przewodników elektrycznych zmniejsza się, gdy ich temperatura rośnie.
16	Kulomb jest wymiarowo równoważny amperowi na sekundę.
32	Prądy o natężeniu mniejszym niż 1 A nie są niebezpieczne dla człowieka.
64	Na opornikach połączonych równolegle możemy odczytać różne napięcia.
128	Pomimo tego, że gniazdka sieciowe dostarczają prąd zmienny, czajniki elektryczne działają również na prąd stały.

9 Po ostatniej wizycie w mieszkaniu Adama, Ewa przysięgła, że pod jego nieobecność odmaluje jego pokój. Kupiła pięciolitrowe wiadro z farbą, pokryte różnymi napisami: oprócz zdjęć równin arktycznych i niejasnych zapewnień o niewyobrażalnej bieli, na wiadrze znajduje się także waga zawartości, 7,5 kg, oraz odważne zalecenie, aby farbę rozcieńczyć w odpowiednich proporcjach: 0,5 kg wody na 1 kg farby.

Ewa jest zbyt leniwa, żeby sięgnąć po wagę kuchenną i wolałaby używać chochli. W jakim stosunku **objętościowym** powinna rozcieńczyć farbę wodą?

Podaj stosunek objętości farby do objętości wody.

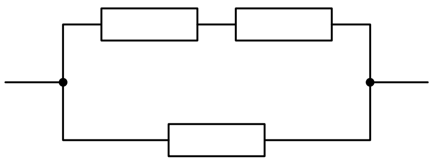
10 Jak informują nas kiepskie przeboje letnich dyskotek, wysoce wskazana jest troska o dobre nawadnianie się i schładzanie podczas upałów. Justyna przygotowuje pyszny napój o nazwie *Buziak Babuni*, serwowany w temperaturze 7 °C. Niestety, woda z kranu ma temperaturę 20 °C, więc aby ją schłodzić Justyna wrzuciła bryłę lodu o masie 1 kg i temperaturze 0 °C.

Jaką objętość wody o wymaganej temperaturze uda się jej wyprodukować tym sposobem?

11 Dla dobra nauki Sara i Mateusz postanowili na własnej skórze doświadczyć stanu nieważkości. Planowali skoczyć z balonu na ogrzane powietrze. Kiedy osiągnęli wysokość 200 metrów, Mateusz podekscytowany wyskoczył za burtę. Dopiero po 3 sekundach Sara zauważyła, że zapomniał spadochronu i krzyknęła z przerażenia. Na jakiej wysokości był Mateusz, kiedy usłyszał jej krzyk?

Balon traktujemy jako nieruchomy przez cały czas. Opóźnienie spowodowane oporem powietrza jest pomijalne.

12 Wzięliśmy trzy identyczne oporniki i zmierzyliśmy ich rezystancję zarówno w połączeniu szeregowym, jak i równoległym. Wyniki różniły się o 8 Ω. Jaki jest opór zastępczy układu przedstawionego na rysunku?



13 Strażak Wojtek zjeżdża po linie z wysokiego budynku. Właśnie dojechał do końca 30 m -owej liny. Jeśli teraz użyje nóg, aby z całej siły odepchnąć się od ściany, osiągnie maksymalną odległość poziomą wynoszącą 8,4 m od ściany.

Jak wysoko Wojtek mógłby skoczyć pionowo w górę gdyby stał na płaskim podłożu?

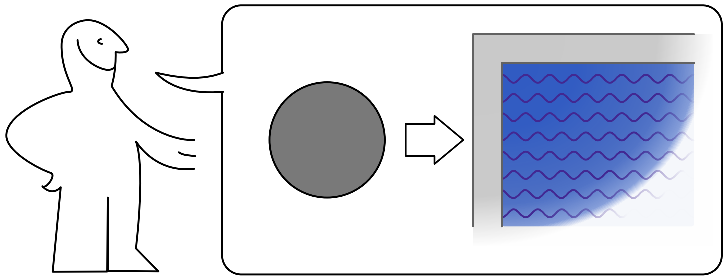
14 Jakub jedzie autostradą z dużą prędkością. Czuje wibracje pochodzące z jednego z kół i zaczyna się trochę niepokoić. Weźmy na przykład prosty wentyl opony, który ma masę 10 g. Oblicz pozorną masę wentyla odczuwalnego przez oponę, jeśli znajduje się on w odległości 20 cm od osi obrotu, kiedy samochód jedzie z prędkością 500 km/h. Załóżmy, że odległość wentyla od osi obrotu jest znacznie większa niż jego odległość od zewnętrznej krawędzi koła.

Pozorna masa przedmiotu to masa, która wywierałaby taką samą siłę na wagę, gdy spoczywa ona na ziemi.

15 Alicja jest na wakacjach. Przed jej apartamentem znajduje się prostokątny basen o wymiarach $a \times b$. Kiedy Alicja zameldowała się w hotelu, właściciel poinformował ją, że basen powinien być przykryty na noc. Niestety Alicja znalazła tylko okrągłą pokrywę o promieniu $r \ll a, b$.

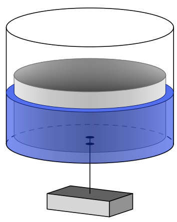
Zdała sobie sprawę, że nie będzie w stanie pokryć całego basenu, ale ponieważ jest osobą sumienną, nadal chce przykryć jak największą jego część.

Jaka jest największa możliwa powierzchnia basenu, którą można przykryć bez wpadnięcia pokrywy do basenu?



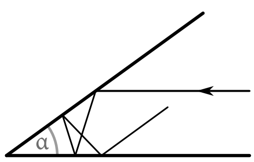
16 Marcel ma już licencję kierowcy i pilota, a teraz chce mieć też licencję kapitana statku. Musi jednak zaczynać od samego początku, więc na razie pracuje jako operator dźwigu w porcie. Ponieważ jest dość bystry, szybko opracował nowy sposób podnoszenia kontenerów. Jego system do podnoszenia składa się z lekkiego cylindra o promieniu 0,99 m włożonego do nieco większego cylindra o promieniu 1 m. Do środka dna mniejszego cylindra zamocowany jest pręt, który przechodzi on przez dno większego i na jego końcu znajduje się hak podnoszący pojemnik. Marcel wlewa teraz wodę do przestrzeni pomiędzy cylindrami, aż pojemnik oderwie się od ziemi. Ile potrzeba wody, aby podnieść pojemnik o masie: 10 t?

Zignoruj lepkość wody i wszelkie wycieki wokół pręta. Masa cylindrów jest zaniedbywalna.



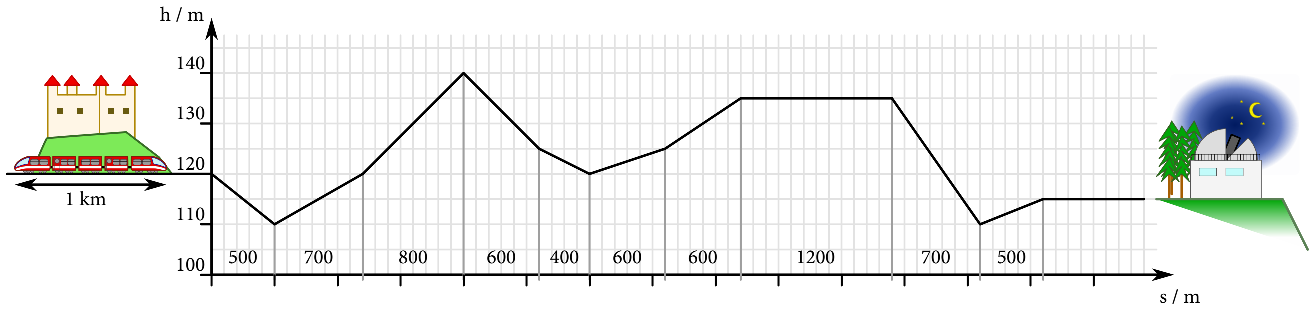
17 Irena wzięła dwa lustra i utworzyła między nimi kąt α. Następnie skierowała wiązkę lasera pomiędzy nimi, równolegle do jednego z luster. Wiązka odbiła się i wyszła z narożnika utowrzonego przez lustra w kierunku równoległym do drugiego lustra.

Jakie są możliwe kąty między zwierciadłami?



18 Ostatnio energia elektryczna stała się dość kosztowna. Aby zaoszczędzić pieniądze, Zarząd Kolei nakazał maszyniście nie przyspieszać zbyt mocno pod górę i starać się maksymalnie wykorzystywać pęd pociągu. Długość pociągu wynosi 1000 m a jego masa 1000 t. Do jakiej minimalnej prędkości maszynista powinien rozpędzić swój pociąg ze stacji z lewej strony zdjęcia, jeżeli ma pokonać całą widoczną trasę wykorzystując jedynie bezwładność pociągu?

Gęstość liniowa pociągu jest stała. Pomiń siłę tarcia i oporu powietrza. Skorzystaj z przybliżenia $\tan x \approx x$ *dla małych kątów.*



19 Po raz kolejny, rewolwerowiec Seba zostaje otoczony przez lokalsów na środku miejskiego rynku, gdzieś na Dzikim Zachodzie i planuje spektakularną ucieczkę. Stoi w samym środku okrągłej kałuży, bardzo łatwopalnej whisky, o promieniu 5 m.

Pozostały mu trzy strzały, aby podpalić całą kałużę. Jaki jest minimalny czas potrzebny na wykonanie tego zadania? Każdy strzał z rewolweru może podpalić kałużę w miejscu uderzenia, a płomień rozprzestrzenia się z prędkością 2 m/s.

Seba ma najszybszą rękę na całym Zachodzie. Czas między poszczególnymi strzałami oraz czas lotu jego pocisków można pominąć.

20 Pewnego mroźnego zimowego dnia, Daniel znalazł dwa prawie identyczne metalowe paski o długości 1 m i grubości 1 mm , które ktoś zostawił obok kosza na śmieci. Jedyną różnicą między tymi dwoma materiałami jest ich współczynnik rozszerzalności cieplnej, a konkretnie $8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ i $10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$. W temperaturze 0 °C, Daniel umieścił dwa metalowe paski obok siebie i zlutował je ze sobą.

W jakiej temperaturze ten bimetaliczny pasek przybierze kształt pierścienia?

Załóżmy, że paski rozszerzają się tylko wzdłuż swojej najdłuższej osi.

21 Karol znalazł na strychu trzy oporniki: dwa były dokładnie takie same i jeden był inny. Używając wszystkich trzech rezystorów, skonstruował pięć różnych obwodów elektrycznych o oporach zastępczych 50, 60, 112, 140 i 245 Ω. Nie zdawał sobie jednak sprawy, że można zbudować jeszcze jeden obwód.

Jaki byłby jego opór zastępczy?

22 Natężenie promieniowania słonecznego wynosi 1366 W/m². Jednak Julii to nie cieszy: nie cierpi, gdy na strychu robi się za gorąco i postanowiła zasłonić okno specjalną folią odblaskową, która tylko przepuszcza 80 % padającego światła.

Okno jest kwadratem o boku 80 cm. Julia kupiła prostokątny kawałek folii o rozmiarach 1,5 m×1 m, pocięła go na odpowiednio ukształtowane kawałki i pokryła okno wielowarstwowo, nawet jeśli oznaczało to, że niektóre obszary były pokryte większą liczbą warstw niż inne. Jaka jest minimalna moc, która teraz przejdzie przez okno, jeśli promienie słoneczne padają prostopadle do płaszczyzny okna?

23 Atletka Łucja rozpoczęła treningi do skoku wzwyż. Obecnie jest w stanie skakać z siłą wystarczającą do uniesienia jej środka masy o 1 m. Ale to jej nie wystarczy. Chciałaby poprawić swój rekord, skacząc na małej, nierotującej, kulistej asteroidzie o promieniu 2,5 km. Jaka jest maksymalna gęstość asteroidy, aby Łucja mogła wyskoczyć prosto w górę i nigdy nie wrócić?

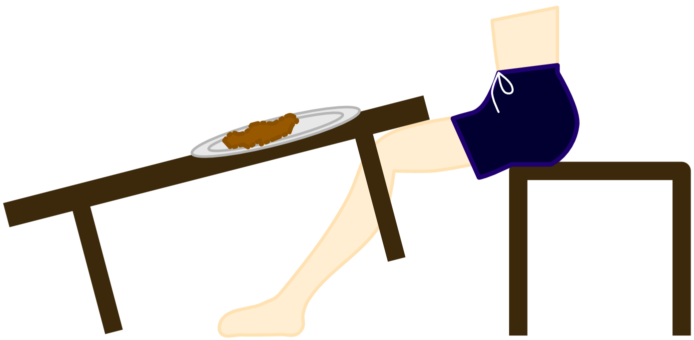
24 Kosmitka Cathy otrzymała fundusze rządowe, które pozwoliły jej zbudować duży teleskop. Teraz wykorzystuje go do poszukiwania planet w pobliżu innych gwiazd. Gdyby spojrzała na przykład na nasz Układ Słoneczny, zauważyłaby, że Słońce lekko się chwieje w kierunku radialnym. Ruch sinusoidalny trwający jeden rok wskazywałoby na istnienie naszej Ziemi, krążącej ze Słońcem wokół wspólnego barycentrum.

Jaka jest amplituda składowej radialnej prędkości Słońca, spowodowanej orbitowaniem Ziemi wokół niego?

Zignoruj wpływy innych planet. Rodzinna planeta Kosmitki Cathy znajduje się w płaszczyźnie orbity Ziemi.

25 Adam cieszy się, że w końcu jest niedziela i na obiad zje schabowego z ziemniakami. Najgorsze jest to, że jego nogi są na tyle długie, że gdy siada, stół przechyla się pod kątem 30°. Talerz ze schabowym zaczyna się zsuwać, jak również schabowy na talerzu zaczyna się zsuwać. Współczynnik tarcia między stołem a talerzem wynosi 0,4, a współczynnik tarcia między talerzem a sznyclem wynosi 0,3. Masa schabowego wynosi m, a masa talerza $2m$.

Jakie jest przyspieszenie talerza natychmiast po tym, jak Adam usiądzie?



26 Tomek wziął sprężynę o współczynniku sprężystości k i zerowej długości spoczynkowej oraz nieco węższą sprężynę o współczynniku K i długości spoczynkowej L. Następnie umieścił drugą sprężynę wewnątrz pierwszej i zespawał ich odpowiednie końce.

Jaki jest współczynnik sprężystości i długość spoczynkowa powstałego obiektu?

27 Jeśli trzeba szybko oszacować wartość jakiejś wielkości fizycznej, często korzystne jest zignorowanie stałych liczbowych i określenie jedynie jej wymiaru. Oszacuj w ten sposób częstotliwość drgającej struny gitary, jeśli jej masa wynosi M, długość L, a naciąg struny wynosi F.

28 Jurek analizuje histogram przedstawiający liczbę trzęsień ziemi o danej sile (magnitudzie) w ciągu roku. Dane pogrupowano w odstępach o szerokości 1. Wywnioskował z tego, że wystąpiło 6200 trzęsień ziemi o magnitudzie 4,0 – 4,9 i 800 trzęsień ziemi o magnitudzie 5,0 – 5,9. Zastanowiło go jednak, ile było trzęsień ziemi o magnitudzie 5,0.

Jurek wie, że liczba trzęsień ziemi o sile co najmniej M opisana jest prawem Gutenberga-Richtera

$$N(m \geq M) = 10^{a-bM},$$

gdzie a i b są stałymi.

Na podstawie Jurka spostrzeżeń, oblicz interesującą go liczbę trzęsień ziemi.

Siłę trzęsienia ziemi zaokrągla się do pierwszego miejsca po przecinku, co oznacza, że liczba trzęsień ziemi o magnitudzie 5,0 *w rzeczywistości odnosi się do liczby trzęsień ziemi o dokładnej sile z przedziału* $4{,}95 \leq m < 5{,}05$. *Podobnie, zakres magnitudy* 4,0 – 4,9 *oznacza* $3{,}95 \leq m < 4{,}95$.

29 Daniel zauważył, że co sekundę kotłownia zasila instalację grzewczą budynku 10 l tajemniczej cieczy o temperaturze 80 °C, ale tylko 9,9 l schłodzonej cieczy wraca do kotłowni.

Jaka jest moc ciepłowni, jeśli rurociąg nie ma nieszczelności? Tajemnicza ciecz w rurach ma gęstość 1000 kg/m^3 w miejscu powrotu do ciepłowni, stały współczynnik objętościowy rozszerzalności cieplnej $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ K^{-1} a jej ciepło właściwe wynosi 4000 J/(kg · K).

30 Kiedy Patryk przeprowadził się do nowego mieszkania, zabrał ze sobą swój przyrząd do ćwiczeń - sprężynę o długości spoczynkowej 1 m. Jeśli przymocowałby jeden koniec sprężyny do sufitu i zawiesił się na jej drugim końcu, sprężyna rozciągnęłaby się dokładnie o 2 m.

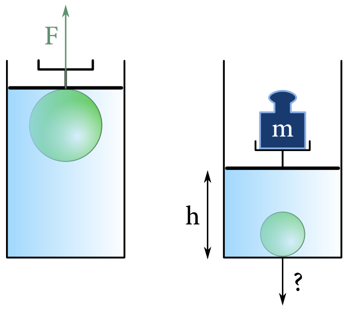
Patryk zastanawia się, jak daleko byłby od sufitu, gdyby zamocował oba końce sprężyny do sufitu w odległości ok 1 m i zawisł trzymając za środek sprężyny.

Wynik należy podać z dokładnością do co najmniej dwóch cyfr znaczących. Zachęcamy do korzystania z kalkulatora.

31 Andrzej i Jakub strzelają do siebie elektronami. Andrzej jest w trudnej sytuacji, znalazł się na drodze elektronu poruszającego się z dużą prędkością $v = 3200$ m/s. Teraz musi uciec się do wykorzystania swoich nadprzyrodzonych zdolności – na krótki czas wytwarza jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B = 8{,}9$ mT w kierunku pionowym (prostopadle do v). Jak długo musi wytwarzać pole magnetyczne, aby elektron zmienił swój kierunek o 90° i zamiast w niego uderzył w Jakuba?

32 Pionowy cylinder o polu podstawy $S = 50$ cm^2 wypełniony jest wodą i zamknięty od góry tłokiem. W cylindrze zamknięto balonik o objętości $V = 50$ cm^3 , który unosi się u góry, wywierając na tłok siłę $F = 10$ mN skierowaną ku górze.

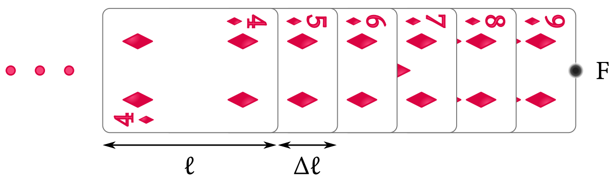
W pewnym momencie na tłoku postawiono ciężarek o masie $m = 10$ kg i balon powoli zaczął opadać na dno. Jaka siła działa na dno cylindra jeśeli tłok znajduje się teraz na wysokości $h = 1{,}8$ m względem dna? Przyjmij, że proces sprężania był izotermiczny, a rozmiary balonika są bardzo małe w porównaniu z wysokością i średnicą cylindra. Cylinder otoczony jest powietrzem pod standardowym ciśnieniem atmosferycznym.



33 Po ciężkim dniu na uczelni, Kamil lubi zafundować sobie mocną dawkę emocji. Gdy tylko wraca do domu, otwiera swoją ulubioną lemoniadę o smaku rukoli i cukinii i zasiada do oglądania TV PASJANS. Jest jednak bardzo zmęczony i natychmiast zasypia. Śni mu się urocza hazardzistka Wiola, która buduje stos z nieskończonej ilości kart. Karty te są układane na nieskończenie długim stole. Nagle piękna Wiola odwraca się do niego i pyta:

„Jakiej siły muszę użyć, aby podnieść najniższą kartę, jeśli przyłożę ją do najdalszego końca karty pionowo do góry, a karty są ułożone jak na rysunku? Karty mają długość ℓ, masę m i są przesunięte względem siebie o $\Delta\ell$

Pomóż Kamilowi spokojnie zasnąć i znajdź odpowiedź na pytanie Wioli.



34 Kiedy Królewna Śnieżka nie śpi, lubi bawić się z siedmioma krasnoludkami na bezmasowej karuzeli. Siedzą oni na ośmiu krzesełkach, równomiernie rozmieszczonych na obwodzie koła i zaczynają obracać się wykonując jeden obrót przez trzy sekundy.

Nagle w sam środek karuzeli wpada jabłko. Śnieżka wstaje z siedzenia i idzie po nie. Po dotarciu do centrum, karuzela wykonuje jeden obrót w dwie sekundy.

Jaką masę ma pojedynczy krasnal, jeżeli Królewna Śnieżka ma masę 56 kg?

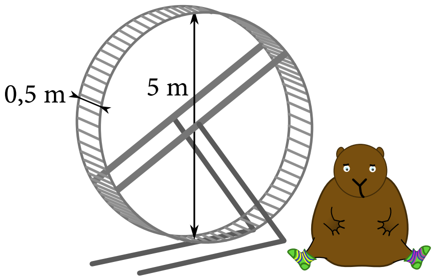
35 Sabina ma wydrążony walec o objętości 10 ml. Pole powierzchni podstawy walca wynosi 1 cm^2. Walec wypełniony jest powietrzem pod ciśnieniem atmosferycznym. Cienki, swobodnie poruszający się dysk o masie 100 g dzieli go na dwie hermetyczne połowy.

Sabina nie ma uprawnień do obsługi tak delikatnego przyrządu i po chwili, jakimś cudem, udało jej się podważyć jedną z podstaw. Jaki był stosunek okresów drgań krążka wewnątrz cylindra przed i po usunięciu podstawy?

Powietrze traktuj jak idealny gaz dwuatomowy. Sabina przebywa w warunkach atmosfery standardowej.

36 Chomik – olbrzym szaleńczo biega w swoim kole, w efekcie czego przekraczona została wytrzymałość zawiasów i koło wyrwało się z mocowań. Chomik wypadł na zewnątrz, a koło spadło na podłogę, przyspieszając do stałej prędkości 1 m/s. Jaka była prędkość biegu chomika, jeśli początkowo znajdował się w spoczynku względem pomieszczenia?

Koło zbudowane jest z metalowych prętów o gęstości liniowej λ. Jego obwód tworzy para obręczy o średnicy 5 m połączonych pięćdziesięcioma szczeblami o długości 0,5 m. Każda obręcz jest przymocowana do osi za pomocą pręta o długości równej średnicy obręczy, a pręt przecina prostopadle oś obręczy.



37 Satelita o masie m porusza się wokół Słońca o masie M po orbicie kołowej o promieniu R. W pewnym momencie odpala silnik, który zaczyna pchać satelitę ze stałą siłą F, skierowaną radialnie w kierunku od Słońca.

Jak duża powinna być ta siła, aby satelita osiągnął maksymalną odległość $2R$ od Słońca?

38 Złoto jest niezwykle plastyczne i można je rozprasować na bardzo cienkie arkusze. Ponadto jest stabilne chemicznie i bardzo dobrze odbija światło. Patryk - Kosmiczny Zdobywca własnie przybył na nowo odkrytą gwiazdę o temperaturze T, masie M i promieniu R. Jako pozdrowienie dla przyszłych cywilizacji chciałby zostawić tam list wyryty na cienkiej tabliczce, wykonanej z czystego złota o masie m i gęstości ρ.

Jaką gęstość powierzchniową musi mieć arkusz, aby ciśnienie promieniowania gwiazdy utrzymywało go w stałej odległośc $D \gg R$ od gwiazdy?

Załóżmy, że arkusz odbija całe światło i że padające promienie świetlne są zawsze prostopadłe do jego powierzchni.

39 Galaktyka Andromedy jest oddalona od nas o 2 600 000 lat świetlnych. Jak szybko musielibyśmy się przemieszczać, aby z naszej perspektywy podróż zajęła nam tyle lat?

40 Wbrew stereotypom nawet w dużych miastach można spotkać miłych i pomocnych ludzi. Ale jest też Bob. Nie podoba mu się sąsiadka mieszkająca nad nim, bo nie włącza ogrzewania nawet w zimie, kiedy jest −5 °C na zewnątrz. Sufit Boba ma 20 cm grubości i jest wykonany z betonu o przewodności cieplnej 20 W/(m · K). Powyżej sufitu, jest drewniana podłoga o grubości 1 cm o przewodności cieplnej 2 W/(m · K).

Temperatura w mieszkaniu Boba jest utrzymywana na poziomie 25 °C, co skutkuje 10 °C w mieszkaniu sąsiadki. Jaka będzie temperatura w mieszkaniu sąsiadki po dołożeniu przez Boba warstwy styropianu o grubości 5 cm o przewodności cieplnej 1 W/(m · K), na sufit o powierzchni 10 m^2?

Bob lubi utrzymywać stałą temperaturę w swoim mieszkaniu. Oprócz podłogi, mieszkanie sąsiadki ma tylko ściany zewnętrzne.

Rozwiązania

1 The picture below shows the order in which the tanks are filled. Due to gravity, the water flows down and fills the lowest tank numbered 1. Then the water moves up and displaces the air. The water level in the tanks as well as in the pipes rises, and we fill tanks 2 and 3. Then the triangular tank number 4 fills up, followed by the tank 5. As the water level rises further, the water fills the branch with tanks 6, 7 and 8, and finally the starred tank is filled as ninth.

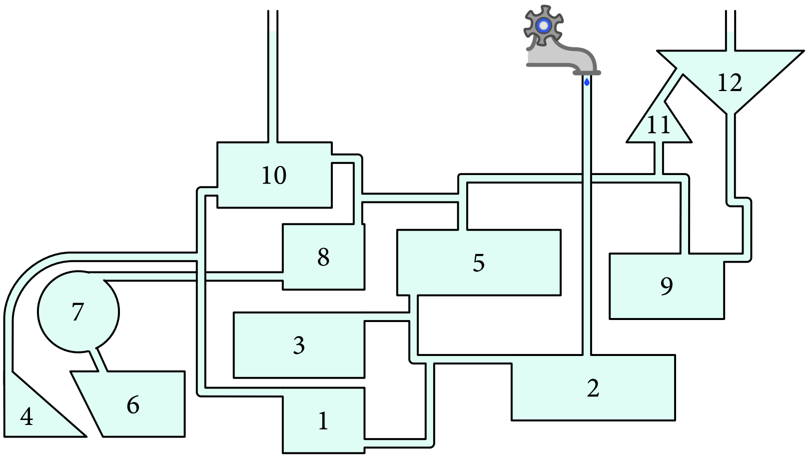


Figura 1.1: *Tank filling order*

2 If one hair grows 15 cm/y, it will grow $\frac{15}{365}$ cm in one day. To get the answer, we simply multiply this by the total number of hairs and convert to metres to obtain $100000 \cdot \frac{15}{365}$ cm/d $\doteq 41$ m/d.

3 If we travel 200 miles per hour, which is $200 \cdot 1760 = 352\,000$ yards per hour, in one second we move $\frac{352000}{3600} = \frac{880}{9}$ yards. The commentator said that this distance is one football field and he is wrong by $120 - \frac{880}{9} = \frac{200}{9}$ yards. In units of football fields this is simply $\frac{200}{9 \cdot 120} = \frac{5}{27}$ of a football field per second.

4 The density is $\rho = \frac{m}{V}$. If the container weighs m, the mass of the biscuits m_b (without the container m_0) is $m_b = m - m_0$. The volume of the container is the difference between the volumes of the cylinder and the raised circular part of its base,

$$V = H\pi R^2 - h\pi r^2. \tag{4.1}$$

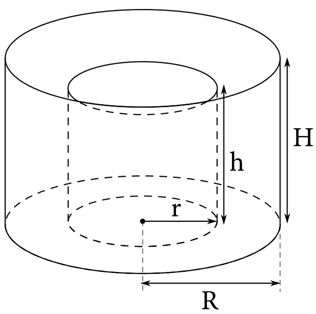


Figura 4.1: *The container with dimensions shown*

The density of the biscuits is therefore

$$\rho = \frac{m_b}{V} = \frac{m - m_0}{H\pi R^2 - h\pi r^2} \doteq 73\ \mathrm{kg/m^3}. \tag{4.2}$$

5 Firstly, let us convert George's velocity to metres per second:

$$\frac{17\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{17\,000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{170}{36}\ \mathrm{m/s}. \tag{5.1}$$

When he steps on the treadmill going at the speed $\frac{180}{36}$ m/s, the difference of the speeds is $\frac{10}{36}$ m/s.

The time needed for him to fall off the treadmill is the time it takes him to cover 1 m at the speed of $\frac{10}{36}$ m/s, so

$$\frac{1\ \mathrm{m}}{\frac{10}{36}\ \mathrm{m/s}} = 3{,}6\ \mathrm{s}. \tag{5.2}$$

6 The whole puddle will be engulfed in flames, when fire reaches the furthermost point. This point lies on the circumference of the puddle and we immediately see some candidates.

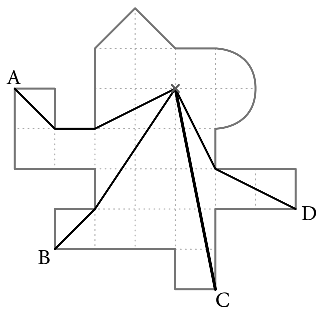


Figura 6.1: *Candidates for the furthermost point*

Using the Pythagorean theorem, we calculate that the furthermost point is C located $\sqrt{26}$ m from the point of ingition. Fire spreads at speed of 2 m/s, therefore whole puddle will be in flames $\frac{\sqrt{26}\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m/s}} \doteq 2{,}55$ s after ignition.

7 If we suppose that the runner and the car start at the same time, but the car's speed is 0 km/h the first half-hour, then it is enough to determine the time it takes the car to travel 92,14 km. In the first 9 half-hours it travels

$$0\ \mathrm{km} + 7\ \mathrm{km} + 7{,}5\ \mathrm{km} + 8\ \mathrm{km} + 8{,}5\ \mathrm{km} + 9\ \mathrm{km} + 11\ \mathrm{km} + 13\ \mathrm{km} + 15\ \mathrm{km} = 79\ \mathrm{km}. \tag{7.1}$$

After reaching this distance the car is driving at 34 km/h and it still needs to travel 13,14 km. The total running time is then

$$9 \cdot 0{,}5\ \mathrm{h} + \frac{13{,}14\ \mathrm{km}}{34\ \mathrm{km/h}} \doteq 4{,}89\ \mathrm{h}. \tag{7.2}$$

8 Since the numbers are all different powers of two, you have to determine the truthfulness of all statements.

***Common circuit breakers in an apartment have a rated current nominal of about* 150 A.**

The statement is **false**. Standard values are around 16 A. For the voltage in a mains socket 230 V it means a power limit of 3500 W, so four hoovers vacuuming simultaneously would trip the breaker. Breakers at 150 A would easily handle 20 hoovers, which disagrees the common experience.

Galvanic cells are sources of direct current.

The statement is **true**. Galvanic cells, such as a common AA battery, produce electric energy by electrolytic decomposition, which is a process with a given cathode and anode. Therefore, direct current is produced.

Electric forces can occur between insulators.

The statement is **true**. A good example is an electroscope, a basic demonstration of electrostatic force, where two charged plastic balls repel. Therefore, even insulators can be charged on the surface. Have you ever rubbed a balloon against your hair?

Resistivity of electric conductors decreases when they heat up.

The statement is **false**. You can easily search up values of resistivity at different temperatures for any type of conductor in literature. For the majority of common materials, their resistivity increases with rising temperature.

The coulomb is dimensionally equivalent to ampere per second.

The statement is **false**. Electric current, measured in amperes, tells us how much charge (coulombs) passes through per unit time, therefore it's the other way around – amperes are coulombs per second.

Currents smaller than* 1 A *are not dangerous to humans.

The statement is **false**. Even currents as small as 20 mA can be dangerous to humans, especially if passing through one's heart and internal organs. This isn't necessarily related to the current passing through the circuit before we touch it, though. The resistivity in the circuit can be small, therefore huge current can be passing through it even at small voltage. If the resistivity of a human body is large, a small amount of current would pass through it from that small voltage. Conversely, if the voltage is great, but the source cannot produce a large current, we're once again in the clear. A typical example is spark discharge, which can even have 10 000 V, but the transferred charge, and therefore also current, are small.[1]

Two resistors connected in parallel can experience different voltages.

The statement is **false**. Two resistors in parallel are have their ends connected. We know that two points connected by a wire have zero electric potential between them, so the ends of the two resistors have the same voltages. The voltages across both resistors will be the same. A real-life example would be a lightbulb. We often use multiple lightbulbs, with the intention of having each at a 230 V voltage – and this is why they're always in parallel. Even electric sockets are connected in parallel; if we connected two lightbulbs in series, each of them would have half the voltage from the socket, and they would shine at a lower power.

[1] A common question goes: who's the killer, amperes or volts? Do you know?

Even though mains sockets provide alternating current, electric kettles would work with direct current as well.
The statement is **true**. An electric kettle is just a jug with a resistive spiral connected to a bimetallic thermal switch… and in a simpler model, it is just a switch and a resistor that heats up and transfers the heat to the water. Resistors heat up under both direct and alternating currents, so a kettle would work just the same even when connected to a source of direct current.

The sum of the numbers of all true statements is therefore 2 + 4 + 128 = 134.

9 If 5 l of colour weigh 7,5 kg then the density of colour is $\frac{7{,}5\ \mathrm{kg}}{5\ \mathrm{l}} = 1{,}5\ \mathrm{kg/l}$. The density of water is 1 kg/l, which means that the ratio of the densities of the colour and water is 3 : 2. Therefore, if we pour one mass unit of the colour and one of water into two separate containers, their volumes will be in a ratio of 2 : 3. Now we add one more mass unit of colour, which yields a mass ratio of 2 : 1. By doing so, the volume ratio changes to 4 : 3, what is our final result.

10 Granny Justine has to pour mass m of tap water in a jug in which she then puts a block of ice of mass $m_{❄}$. In order to melt the whole icy block, it has to absorb heat equal to $m_{❄} l_{❄}$, where $l_{❄}$ is specific latent heat of fusion of water. Then, the melted ice, also known as water, heats by $\Delta T_{❄}$, so it absorbs heat $m_{❄} c_{\mathrm{H_2O}} \Delta T_{❄}$, where $c_{\mathrm{H_2O}}$ is specific heat capacity of water. All this heat is absorbed from the tap water, which cools by $\Delta T_{\mathrm{H_2O}}$ so it gives away heat of $m c_{\mathrm{H_2O}} \Delta T_{\mathrm{H_2O}}$ to the ice.

Heat absorbed by the ice is equal to heat given away by the tap water, thus

$$m_{❄} l_{❄} + m_{❄} c_{\mathrm{H_2O}} \Delta T_{❄} = m c_{\mathrm{H_2O}} \Delta T_{\mathrm{H_2O}}. \tag{10.1}$$

We solve for mass of the tap water

$$m = \frac{m_{❄} l_{❄} + m_{❄} c_{\mathrm{H_2O}} \Delta T_{❄}}{c_{\mathrm{H_2O}} \Delta T_{\mathrm{H_2O}}}. \tag{10.2}$$

The values from the problem statement give $m \doteq 6{,}68$ kg. Apart from tap water, the jug contains also 1 kg of water which stems from the ice, so, all in all, there is 7,68 kg of water in the jug which is 7,68 l.

11 Let t_0 denote the time of Sarah's scream. The main idea here is that Sarah's sound, which propagates at a constant velocity c, will overtake linearly accelerating Matt at some time t at which the distances traversed by both Matt and the sound of the scream will be the same

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g t^2 &= c(t - t_0) \\ \frac{1}{2} g t^2 - ct + ct_0 &= 0. \end{aligned} \tag{11.1}$$

This is a quadratic equation with two roots

$$t_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2gct_0}}{g}. \tag{11.2}$$

The numerical values of these roots are $t_+ \approx 66{,}79$ s and $t_- \approx 3{,}14$ s respectively. Physically, these correspond to when the sound first overtakes Matt and, much later, when constantly accelerating Matt overtakes the sound again (since we're disregarding air friction). Hence $t = t_-$.

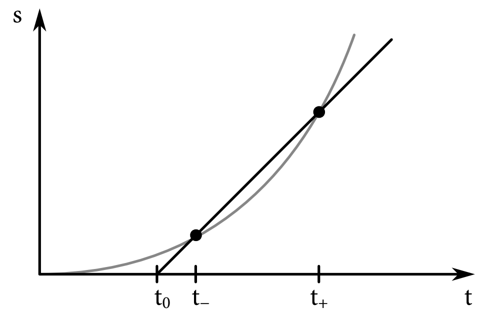


Figura 11.1: *Distances travelled by Matt and Sarah's scream*

Now that we know time t, we can substitute it into the equation of linearly accelerated motion

$$s = \frac{1}{2} g t_-^2 \approx 48{,}4 \text{ m}. \tag{11.3}$$

Matt jumped from the height $h = 200$ m, therefore at time t when he hears Sarah's roar he will be at height of $h - s \approx 151{,}6$ m.

12 Let us denote the value of the resistor's resistance R. If we have a series connection, we sum the resistances of the resistors, so the total resistance will be $3R$. In parallel connection, we are summing reciprocal values of the resistances, so the resistance is equal to $R/3$. These values differ by 8 Ω, so we can construct the equation

$$8\ \Omega = 3R - \frac{R}{3}. \tag{12.1}$$

The solution of this equation is $R = 3\ \Omega$. The diagram in the figure in the problem statement is a parallel connection of two branches with resistances R and $2R$, so its total resistance can be calculated as

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \Rightarrow \quad R' = 2\ \Omega. \tag{12.2}$$

13 Wojtek zużywa tę samą ilość energii kinetycznej na jego skok, co na odepchnięcie się od ściany. W najwyższym punkcie swojego skoku, cała energia kinetyczna zamieni się w energię potencjalną, która w obu przypadkach będzie taka sama. Oznacza to, że wysokość skoku będzie jednakowa. Wysokość skoku pożna określić z geometrii obrazu jako $h = \ell - \sqrt{\ell^2 - d^2} = 1{,}2$ m.

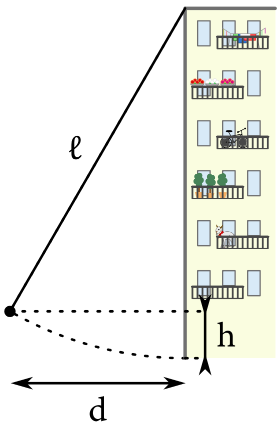


Figura 13.1: *Geometria skoku Strażaka Wojtka*

14 If the wheel rotates, the tyre valve rotates with it. It means that in the frame reference of the rotating wheel with the origin in the centre of the tyre the valve stands still. The fictitious centrifugal force acting on the valve is $F = \frac{mv^2}{r}$ which is oriented from the origin. However, the valve is not moving, so there must be opposite force with the same magnitude from the wheel. When the car accelerates, in the frame reference of the wheel it seems that the valve changes its weight, however the only thing that changes is the frequency of rotating wheel. The apparent weight can be computed as

$$m_a = \frac{F}{g} = \frac{mv^2}{rg}.$$

After the unit conversion from km/h to m/s and using the given values we get $m_a \approx 98{,}3$ kg.

15 It is necessary to realize that if Julia has only one cover, she will cover the greatest area of the pool if she places it into the corner of the pool so that its centre protrudes over the water as much as possible. This situation is depicted in the figure below. The centre of mass must be located on the line segment connecting the two points that are the intersections of the cover's circumference with the perimeter of the pool. In this case, the corner of the pool also lies on the circumference of the cover.[2] If Julia moved the cover a little more over the water, it would fall into the pool. Therefore it is enough to calculate the area of water that is covered. This area consists of a semicircle and a right triangle. The area of a semicircle is simply $\frac{1}{2}\pi r^2$.

[2] thanks to Thales's theorem

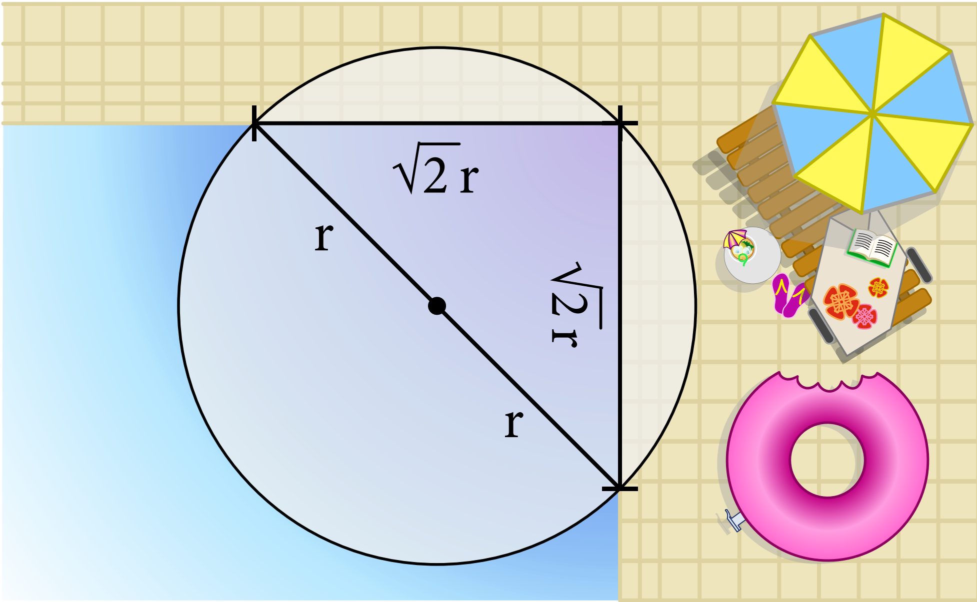


Figura 15.1: *The cover in optimal location*

We know that the right triangle's hypotenuse has a length of $2r$ and its other two sides have a length of $\sqrt{2}r$ because the Pythagoras' theorem must hold: $\sqrt{\left(\sqrt{2}r\right)^2 + \left(\sqrt{2}r\right)^2} = 2r$. The area of this triangle is $\frac{1}{2}(\sqrt{2}r)^2 = r^2$. The total area covered by the circle is then

$$\frac{1}{2}\pi r^2 + r^2. \tag{15.1}$$

16 Let us draw and write down all the forces that act on the axis of the cylinder:

$$F_g + F = F_{\mathrm{vz}}, \tag{16.1}$$

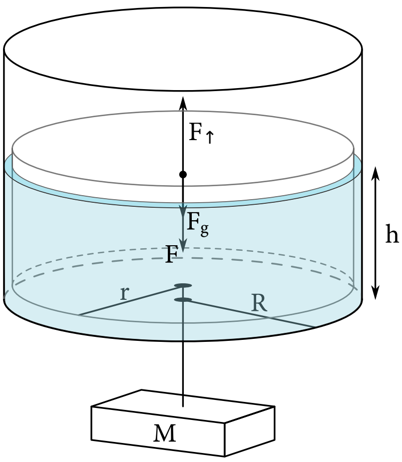


Figura 16.1: *Marcel's crane with forces*

where F_g is the gravitational force, F is the force from the container, and F_{vz} is the buoyant force of the water. After expressing the individual forces, we get

$$mg + Mg = \rho_{H_2O} g h S_1, \tag{16.2}$$

where h is the height of the submerged part of the cylinder and S_1 is the base of the smaller cylinder. To find the volume, we need to find h,

$$h = \frac{m + M}{\rho_{H_2O} S_1}. \tag{16.3}$$

We know that the mass of the smaller cylinder is negligible compared to the container, so

$$h \approx \frac{M}{\rho_{H_2O} S_1}. \tag{16.4}$$

The volume of water will eventually be just the volume difference of the cylinders, so

$$V = h(S_2 - S_1) = \frac{M}{\rho_{H_2O} r^2}(R^2 - r^2) \doteq 203\,\mathrm{l}. \tag{16.5}$$

17 Instead of calculating complicated geometry, we realise that we just need to mirror the space between the mirrors a few times. Then we can consider that a ray of light travels along a straight trajectory as in the picture.

At the end, the ray of light must be parallel to the other mirror. This means that the angle 180° must be divided into a whole number of parts by the angles α. Thus, it would seem that the valid values of α would be $\frac{180^\circ}{n}$, where n are natural numbers. However, for the ray at the end to be parallel to the other mirror it is necessary, that the mirror which appears at an angle 180° is the other mirror.

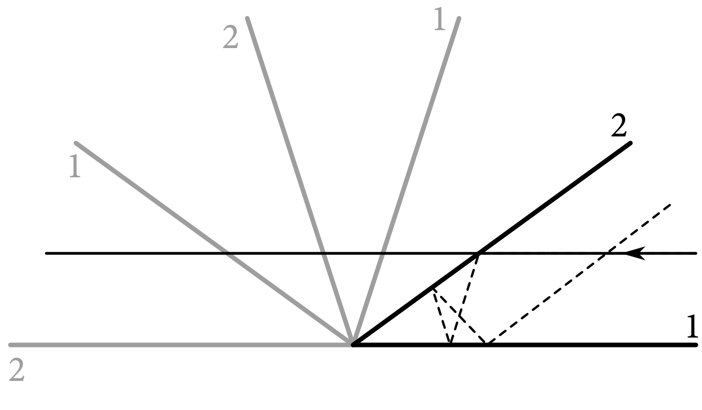


Figura 17.1: *Solution with just four reflections*

We quickly realise that this condition tells us that the number n must be odd. Therefore the valid values of the angle α are

$$\alpha = \frac{180^\circ}{2n + 1}, \tag{17.1}$$

where $n \in \mathbb{N}$.

18 The train starts off with speed v and thus has a certain amount of kinetic energy. Since neither friction, nor air resistance play a role, total mechanical energy of the train is conserved. Therefore it only needs to travel at such a speed so that its centre of mass just passes over the highest point of its trajectory. However, since the train is not a point mass, the trajectory of its centre of mass differs from the altitude profile of the track. At a glance, we can determine that two areas come into consideration as highest: the peak at 140 m and the plateau at 135 m. Obviously, there is no way or place to get any higher.

When we calculate the slopes, we can see that they are all quite small, the steepest drop is only $\frac{25}{700}$. For small angles we can neglect the difference between the actual length of the train and its projection onto the horizontal plane, which will simplify the calculation somewhat. Then we can also ignore the height of the train's centre of gravity above the rails, as this will always be the same.

Let us first look at the highest point of the track. The slopes on both sides are equal, 25 ‰, so the train's centre of gravity will be at the highest point when it passes over the summit. Since the linear density of the train is constant, the centres of gravity of both the front and rear halves of the train are at equal altitudes, and hence the centre of gravity of the whole train is at that altitude as well. So we just need to calculate the height of the centre of gravity of one of the halves, which will be

$$h_\wedge \approx \frac{140\ \mathrm{m} + (140\ \mathrm{m} - 0{,}025 \cdot 500\ \mathrm{m})}{2} = 133{,}75\ \mathrm{m}. \tag{18.1}$$

However, this is obviously less than the height of the straight part on the right, where the train fits entirely. The height of its centre of gravity on it will therefore be trivially $h_- = 135$ m.

All that remains is to express the difference in the heights of the centre of gravity at the start and at the maximum height, which is

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_- \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_-} \approx \sqrt{2 \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} \cdot 15\ \mathrm{m}} = \sqrt{300}\ \mathrm{m/s} \doteq 17{,}3\ \mathrm{m/s}. \tag{18.2}$$

19 Let us denote v the speed at which fire spreads, and t the time when the whole puddle is burning. Our task is to cover the puddle with three circles with radius vt and optimalise their placement to minimise t. We divide the puddle into three sections, each being inflamed by one of the pistolero's bullets. We want these sections to be as small as possible, which means we want to make the circle covering it as small as possible. Symmetry of the puddle allows us to divide it into three equally sized circular sectors and a simple thought convinces us that it is not possible to find a better solution. Ideal points of bullet impacts can be found as centres of the circles.

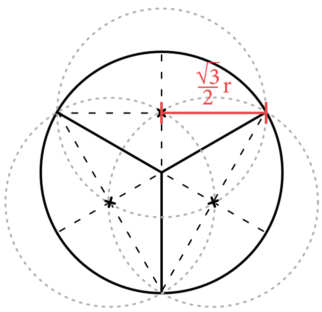


Figura 19.1: *Anatomy of Sebastian's inflammatory activity*

A short exercise from geometry reveals us that the longest distance which has to be travelled by flame has length of $\frac{\sqrt{3}}{2}r$, where r is radius of the puddle. Entire puddle will therefore be engulfed in flames in time $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r}{v} = \frac{5\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{s} \doteq 2{,}17\ \mathrm{s}$.

20 Since the thickness of the strips is one thousand times smaller than their length, we can neglect the changes in their thickness due to temperature changes and assume that only their length varies. Let r_1 and r_2 be the radius of the inner and outer strip, respectively. If we denote their thickness h, it then follows $r_2 = r_1 + h$. The strip with original length l_0 and thermal expansion coefficient α will, due to a temperature difference ΔT, increase its length by $l_0 \alpha\, \Delta T$. Its new length will therefore be

$$l_0 + l_0 \alpha\, \Delta T = l_0 (1 + \alpha\, \Delta T). \tag{20.1}$$

If the strip has a circular shape with radius r, its length is equal to $2\pi r$. For Daniel's newly acquired strips this can be expressed as

$$\begin{aligned} l_0(1 + \alpha_1\, \Delta T) &= 2\pi r_1, \\ l_0(1 + \alpha_2\, \Delta T) &= 2\pi r_1 + 2\pi h, \end{aligned} \tag{20.2}$$

using $r_2 = r_1 + h$. We can subtract the second equation from the first and we get

$$\Delta T = \frac{2\pi h}{l_0(\alpha_2 - \alpha_1)}. \tag{20.3}$$

This means we have to either cool down or warm up the two strips by ΔT. For given values $\Delta T \doteq 314\ \mathrm{K}$. Since the dimensions of the strips were measured at $0\ °\mathrm{C} \doteq 273\ \mathrm{K}$, we have to increase the temperature by ΔT, since it is impossible to achieve negative thermodynamic temperature. The bimetallic strip will take circular shape at the temperature 314 °C.

21 When solving this problem we will not avoid guessing. This does not mean that we can't guess wisely. In total, there are six possible circuits. We will guess that the purely parallel and the purely serial wiring has the smallest and the largest resistance, respectively. These have following resistances

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + 2R_2} \qquad \text{and} \qquad 2R_1 + R_2, \tag{21.1}$$

where R_1 is the resistance of two identical resistors and R_2 is the resistance of the third resistor.

But if we consider that the smallest and the largest resistance is 50 Ω and 245 Ω, we get a system of two equations that has no solution. This means that the value we are missing must be just the smallest or the largest. So we need to guess which circuit corresponds to the second smallest, or the second largest resistance, respectively.

Firstly, we can notice that the resistors in parallel always have lower resistance, than the individual resistors, and when connected in series higher resistance. In the case of two parallel branches, the resulting resistance is always lower than the resistances in the individual branches. In the case of a series connection, the resulting resistance is higher than the individual resistors connected in series. This allows us to assume that the smaller resistances correspond to parallel wiring and larger resistances to serial wiring, reducing the number of possibilities we need to explore.

Next, we note that since parallel wiring reduces resistance, it is not worth including small resistors, when maximalizing resistance. Thus, if two identical resistors have less resistance than the third one, it can be assumed that the parallel connection of two identical resistors and the third in series with them will have the second largest resistance.

In addition, we can note that if one branch of the parallel wiring has significantly more resistance than the other, the current will mostly flow through the branch with lesser resistance, which puts up little resistance. In the limiting case, when the resistance of this branch goes to zero, current can flow through the circuit with virtually no resistance and no current flows through the other branch. On this basis, it can be concluded that if two equal resistors have more resistance than the third one, a series connection of a pair of identical resistors in one branch and to them in parallel a smaller resistance will have the second smallest resistance.

This reduced the number of cases we have to examine to four:

- If the smallest resistance is missing, the largest resistance corresponds to the series circuit of all three resistors. Then, the missing resistance corresponds to the parallel circuit of all three resistors.
  - If the same resistors have lower resistance than the third, the two identical resistors in parallel and the third in series corresponds to the second largest resistance.
  - If the same resistors have resistance greater than the third, the two identical resistors in series in one branch and a third in parallel to them corresponds to the smallest known resistance[3].
- In the absence of the largest resistance, the smallest resistance corresponds to the parallel wiring of all three resistors. Then the missing resistance corresponds to the three resistors in series.
  - If the same resistors have smaller resistance than the third, two identical resistors in parallel and the third in series corresponds to the largest known resistance[4].
  - If the identical resistors have greater resistance than the third, two identical resistors in series on one branch and the third in parallel to them corresponds to the second smallest resistance.

Let us explore these possibilities. Doing so, we may notice that the largest resistance on the list is significantly larger than the next two resistances on the list. Therefore, we may assume that the largest resistance corresponds to the serial connection of all three resistors, and that the next two resistances correspond to the circuits in which one resistor is serially connected to a couple of two resistors conected in parallel. Thus, let us start with the first two options.

We already know the resistance of all three resistors in series. The resistance of identical resistors R_1 in parallel and R_2 in series has a resistance $\frac{R_1}{2} + R_2$. Solving this system of two equations gives the resistances $R_1 = 70\ \Omega$ and $R_2 = 105\ \Omega$. We can easily verify that the remaining resistances from the problem correspond to one of the circuits with such resistors. We do not need to investigate other possibilities – we have already found the solution.

The missing resistance corresponds to all three resistors in parallel, i.e. 26,25 Ω.

22 First we have to decide which strategy to use when covering the window with foil. Apparently, we will be able to cover the entire window twice and still have some foil left over. Using the remaining foil, we will

[3] The resistance of a parallel connection of all three resistors, which certainly has a smaller resistance, is unknown

[4] Resistance of series wiring of all three resistors, which certainly has the greater resistance, is unknown

achieve the greatest filtering effect if we cover that area of the window surface which has the smallest number of layers covering it so far. That means, we will try to cover the entire window as uniformly as possible.

The surface of the foil is 1,5 m^2, the surface of the window is S = 0,64 m^2. To cover the entire window twice, we will use 1,28 m^2 of foil and will have 0,22 m^2 =: S_3 of foil left over. That means that the surface S_3 will be covered three times and the surface $S_2 = S - S_3$ = 0,42 m^2 will be covered twice.

How much power will pass through multiple layers of foil can be easily calculated. Each layer will allow 80 % of incident light to pass through. It then follows that two layers will allow α_2 = 80 % · 80 % = 64 % and three layers of foil will allow α_3 = 80 % · 64 % = 51,2 % of light to pass through.

Knowing the area covered by two and three layers respectively, the total power passing through the entire window can be calculated as

$$P' = (\alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3)P = \left(0{,}64 \cdot 0{,}42\ \mathrm{m}^2 + 0{,}512 \cdot 0{,}22\ \mathrm{m}^2\right) \cdot 1366\ \mathrm{W/m}^2 \doteq 521\ \mathrm{W}. \tag{22.1}$$

23 Let Lucy have zero potential energy and some kinetic energy at the moment she leaves the ground. At the highest point of the jump, at height h, she stops momentarily, so she only has potential energy mgh, where m is Lucy's mass. This means that her kinetic energy at the start of the jump is equal to mgh, because the law of conservation of mechanical energy holds during the jump.

If Lucy wants to jump off the asteroid, she has to reach the infinity. Here, we can no longer use the relation for the potential energy in a homogeneous gravitational field as we did for the jump on the Earth. Instead, we have to take into account the radial field of the asteroid. In the limiting case, when the asteroid has the largest possible mass for Lucy to jump off, Lucy arrives at infinity and stops there after an infinitely long time.

Lucy's potential energy at the surface of the asteroid is $-\frac{GMm}{R}$, where M is the mass of the asteroid and R is its radius. At the start of the jump she gains kinetic energy equal to mgh. At infinity, Lucy stops moving and her potential energy is zero. Due to the conservation of energy, the sum of the kinetic and potential energy at the moment of lift-off is equal to the sum of the kinetic and potential energy at infinity,

$$mgh - \frac{GMm}{R} = 0 + 0. \tag{23.1}$$

From here we can express the mass of the asteroid in the limiting case,

$$M = \frac{Rgh}{G}, \tag{23.2}$$

and then the density as

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3gh}{4\pi R^2 G} \approx 5618\ \mathrm{kg/m}^3.$$

24 Let us denote the mass of the Sun as $M_\odot$ and the mass of the Earth as $M_\oplus$. Their mutual distance is R. Both of these objects revolve around the common centre of mass with some angular velocity. First, we will need to find the centre of mass. Let us denote the distance between the Sun and the centre of mass as r. Then

$$M_\odot r = M_\oplus (R - r) \tag{24.1}$$

which yields

$$r = \frac{M_\oplus}{M_\odot + M_\oplus} R. \tag{24.2}$$

The Sun revolves around the centre of mass on a circular orbit with radius r and speed v. After realising that this is caused by the gravitational force we get

$$M_\odot \frac{v^2}{r} = G \frac{M_\odot M_\oplus}{R^2}. \tag{24.3}$$

Now it is enough to plug in the radius r from the equation 24.2 and to express v. We obtain

$$v = \sqrt{G \frac{M_\oplus^2}{R(M_\odot + M_\oplus)}}, \tag{24.4}$$

which after evaluation yields $v \approx 9$ cm/s.

When the Sun moves perpendicular to the line connecting the barycentre and the alien observer, its radial velocity is zero. If it moves towards of away from the observer, its radial velocity is $\pm v$. Therefore v is exactly the amplitude of the radial velocity of the Sun.

25 In plotting the forces acting on the plate and the schnitzel, we come across the main non-trivial idea of the problem. What is the relative acceleration of the plate and the schnitzel? In fact, the schnitzel has a greater or equal acceleration than the plate, a reason we will now discuss. Consider the situation where f_1, the coefficient of shear friction between the plate and the table, is zero. In that case, the plate and the schnitzel will move with acceleration $g \sin \alpha$. Thus, their relative acceleration will be zero and the schnitzel will not move relative to the plate.

Let's put this situation in the horizontal direction. Nothing will move. If we add a force to represent the frictional shear force between the plate and the table (F_t), that is the force that acts only on the plate, we can easily see that the schnitzel will want to stay in place relative to the table. Therefore, the plate (T) will exert a frictional force on the schnitzel, which will prevent it from staying still. T will cause no more acceleration than F_t causes. We can see that the schnitzel will go down faster than the plate.

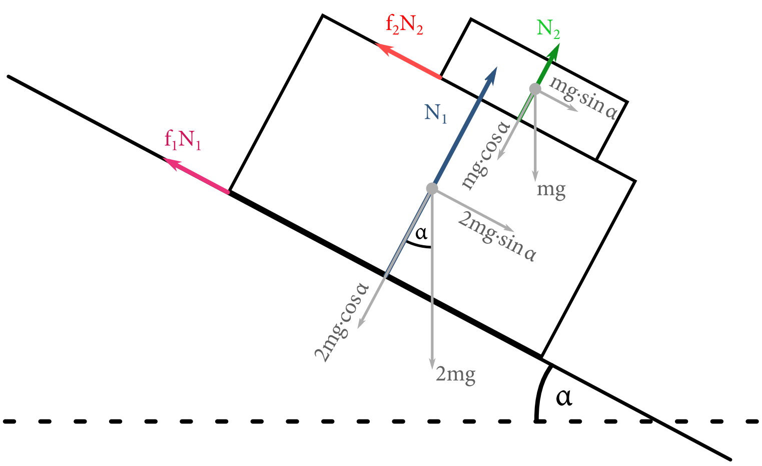


Figura 25.1: *Sketch of the forces acting on the plate and the schnitzel.*

From the image we can see all the forces and we can write the equations of motion for the plate,

$$2ma = 2mg\sin\alpha - (2m+m)g f_1\cos\alpha + mg f_2\cos\alpha, \tag{25.1}$$

where f_2 is the coefficient of shear friction between the plate and the schnitzel.

The first term on the right-hand side of the equation 25.1 represents the component of the gravitational force that moves the plate down the table, the second represents the shear frictional force between the plate and the table (for a mass of $3m$, because the top of the plate also pushes on the schnitzel) and the third term is the reaction force to the shear friction force between the schnitzel and the plate.

After adding the values and expressing a, we get the resulting acceleration of the plate $a \approx 1{,}08\ \mathrm{m/s^2}$.

26 Let us denote the total length of the resulting spring as ℓ. The first spring is stretched by force $k\ell$ and the force with with the second spring is compressed is $K(L-\ell)$. These forces must be equal, which yields

$$k\ell = K(L-\ell) \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{KL}{k+K}. \tag{26.1}$$

Now imagine that this system of springs is stretched by a distance $\Delta\ell$ so that its total length is $\ell + \Delta\ell$. What is the total force? First spring will be stretched with a force $k(\ell+\Delta\ell)$ and the second will be compressed by a force $K(L-\ell-\Delta\ell)$. These two forces act in opposite directions, so we need to subtract them. The resulting force is

$$F = k(\ell+\Delta\ell) - K(L-\ell-\Delta\ell). \tag{26.2}$$

Finally, we use the equation 26.1, which simplifies the previous equation to

$$F = (K+k)\,\Delta\ell \tag{26.3}$$

from which it is easy to see that the total stiffness is $K + k$.

27 Obviously, we will use physical quantities given in the problem statement. Let the guitar string frequency be

$$f \sim F^a M^b L^c \text{ for some } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{27.1}$$

We did not write the equal sign because we are not interested in numerical constants. Those are not determinable by dimensional analysis. Values of a, b, c are to be determined so that the product of physical quantities in 27.1 has dimension of frequency, that is $\mathrm{s^{-1}}$. Apart from that, newton expressed in SI base units is $\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$.

The right side of the 27.1 in the language of dimensions is

$$\left(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}\right)^a \mathrm{kg}^b \mathrm{m}^c = \mathrm{kg}^{a+b}\mathrm{m}^{a+c}\mathrm{s}^{-2a}, \tag{27.2}$$

which has to be of same dimension as frequency, so

$$\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{kg}^{a+b}\mathrm{m}^{a+c}\mathrm{s}^{-2a}. \tag{27.3}$$

In order for this equality to be true, the exponent of each physical quantity has to be same on both sides of the equation. A swift look shows that $a = \frac{1}{2}$, which immediately leads to $b = -\frac{1}{2}$ and $c = -\frac{1}{2}$. Thus, a guitar string vibrates with frequency $f \sim \sqrt{\frac{F}{ML}}$.

Fun fact, if we calculated it properly, the fundamental frequency of a guitar string is $f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{ML}}$.

28 From the problem statement

$$N(m > M) = 10^{a-bM}, \tag{28.1}$$

so for the number of earthquakes in the interval 4,0 – 4,9 we can write

$$\begin{aligned} N(3{,}95 \le m < 4{,}95) &= N(m \ge 3{,}95) - N(m \ge 4{,}95) \\ &= 10^{a-3{,}95b} - 10^{a-4{,}95b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-4{,}95b}\left(10^b - 1\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-4{,}95}(\beta - 1), \end{aligned} \tag{28.2}$$

where we introduced the notation $10^a \equiv \alpha$ and $10^b \equiv \beta$. By analogy, for the interval 5,0 – 5,9 we have

$$\begin{aligned} N(4{,}95 \le m < 5{,}95) &= N(m \ge 4{,}95) - N(m \ge 5{,}95) \\ &= 10^{a-4{,}95b} - 10^{a-5{,}95b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-5{,}95b}\left(10^b - 1\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-5{,}95}(\beta - 1). \end{aligned} \tag{28.3}$$

For the number of earthquakes with magnitude 5,0,

$$\begin{aligned} N(4{,}95 \le m < 5{,}05) &= N(m \ge 4{,}95) - N(m \ge 5{,}05) \\ &= 10^{a-4{,}95b} - 10^{a-5{,}05b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-4{,}95b}\left(1 - 10^{-0{,}1b}\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-4{,}95}\left(1 - \beta^{-0{,}1}\right). \end{aligned} \tag{28.4}$$

When we divide 28.2 by 28.3, we get

$$\beta = \frac{N(3{,}95 \le m < 4{,}95)}{N(4{,}95 \le m < 5{,}95)}. \tag{28.5}$$

Equation 28.2 moreover implies,

$$\alpha \cdot \beta^{-4{,}95} = \frac{N(3{,}95 \le m < 4{,}95)}{\beta - 1}. \tag{28.6}$$

For the number of earthquakes we are looking for, we get

$$N(4{,}95 \leq m < 5{,}05) = N(3{,}95 \leq m < 4{,}95) \cdot \frac{1-\beta^{-0{,}1}}{\beta - 1}, \tag{28.7}$$

After evaluation with given values from the problem statement $N(4{,}95 \leq m < 5{,}05) \approx 170$.

29 Ciepłownia ogrzewa szkołę wykorzystując swoją energię, więc musimy obliczyć, ile dżuli na sekundę jest przekazywanych z tajemniczej cieczy w grzejnikach do powietrza w budynku. Jeśli ciecz zmieni swoją temperaturę o ΔT, jej objętość zmieni się o $V_0\beta\,\Delta T$, gdzie V_0 jej poczatkową objętością, a β jest objętościowym współczynnikiem rozszerzalności termicznej. [5]

Zmiana temperatury wynosi więc:

$$\Delta T = \frac{\Delta V}{V_0\beta}. \tag{29.1}$$

Ciepło przekazane przez ciecz budynkowi jest po prostu

$$Q = mc\,\Delta T, \tag{29.2}$$

gdzie m to masa tajemniczej cieczy, a c jej pojemność cieplna. Ciecz ma taką samą gęstość jak woda, więc końcowe 9,9 l na sekundę waży $m = 9{,}9$ kg. Po wstawieniu tego do 29.2, dostajemy $Q \approx 2{,}2$ MJ. Ponieważ jest to ciepło rozpraszane w ciągu jednej sekundy, moc ciepłowni wynosi 2,2 MW.

30 Let us first note that if Patrick with mass m is suspended from a spring with a stiffness k, then its extension will be

$$\Delta L = \frac{mg}{k}. \tag{30.1}$$

If Patrick is suspended by the centre of the spring as in the problem, he will be suspended by height d, see figure 30.1. We can split the whole spring in half into two springs of stiffness $2k$. The rest length of each is $\frac{L}{2}$ and the actual length of each is $\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2}$.

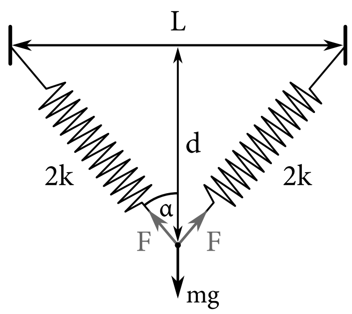


Figura 30.1: *Geometry of a suspended Patrick*

[5] Zależność ta jest w rzeczywistości wykładnicza, ale ponieważ zmiana temperatury jest mała, możemy zastosować przybliżenie liniowe.

The force F that each of the springs exerts on Patrick is then

$$F = 2k\left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2} - \frac{L}{2}\right). \tag{30.2}$$

In order for Patrick to be in equilibrium, the forces from the springs must balance with the gravitational force. Thus, the equation

$$mg = 2F\cos\alpha \tag{30.3}$$

must hold, where we can see from the geometry that

$$\cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2}}. \tag{30.4}$$

When we substitute the force F and $\cos\alpha$ to the equations 30.2, 30.3, we get

$$mg = 4k\left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2} - \frac{L}{2}\right)\frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2}}. \tag{30.5}$$

We now divide this equation by the stiffness k and use the equation 30.1,

$$\begin{aligned} \Delta L &= 4\left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2} - \frac{L}{2}\right)\frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4}4 + d^2}} \\ -4Ld &= \sqrt{L^2 + 4d^2}(\Delta L - 4d) \end{aligned} \tag{30.6}$$

and we square this to get rid of the square root

$$\left(L^2 + 4d^2\right)\left(\Delta L - 4d\right)^2 = 16L^2d^2. \tag{30.7}$$

Now we get a quartic equation

$$L^2\,\Delta L^2 - 8L^2\,\Delta L d + 4\,\Delta L^2 d^2 - 32\,\Delta L d^3 + 64d^4 = 0 \tag{30.8}$$

with an unknown length d. This one is quite difficult to solve analytically, but after plugging in all numerical constants $L = 1$ m and $\Delta L = 2$ m, we can solve it numerically.

The simplest way to find the root of the equation numerically is by binary search. Let us denote the left-hand side of the equation 30.8 as a function $f(d)$. First, we guess some values for d and evaluate $f(d)$. We get

$$f(0) = 4, \quad f(1/2) = -4 \quad \text{and} \quad f(1) = 4. \tag{30.9}$$

From the signs of these results, it follows that one root will lie in the interval 0 – 0,5 m and the other in the interval 0,5 – 1 m. Next, we proceed by dividing these intervals in half and, according to the sign of the function $f(d)$, narrow the interval each time until we reach the desired precision.

We get two roots, $d = 0{,}2655$ m and $d = 0{,}9416$ m. However, after plugging it back into the equation 30.6, we find, that the first of the solutions does not satisfy the equation. Thus, this solution is not physically correct and was generated in step, where we have made a square from equation 30.6. Thus, the height by which Patrick suspends is $d \approx 0{,}94$ m.

31 Electrically charged particles are subject to both electric and magnetic forces. Whilst electric fields simply act repulsively or attractively, analogous to gravity, magnetic fields have a more complex effect, which is described by the equation

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{31.1}$$

Let us describe the situation in cartesian coordinates. Let us say the electron comes in the positive x direction and the magnetic field everywhere is in the negative z direction (a common convention). Then, at the moment the magnetic field is turned on, the force on the electron acts in the positive y direction. As the trajectory of the electron curves towards the positive y direction, the direction of the force rotates simultaneously so that it is always perpendicular to both the instantaneous velocity and the magnetic field.

As the z-component of the electron's velocity is initially zero and the z-component of the force must be always zero, the electron is trapped in the xy plane. And since the force is always perpendicular to the electron's velocity, the velocity's magnitude will stay constant, only its direction changes, and that at a constant rate (since no quantity in the force law changes magnitude). Therefore, the electron moves in a circle.

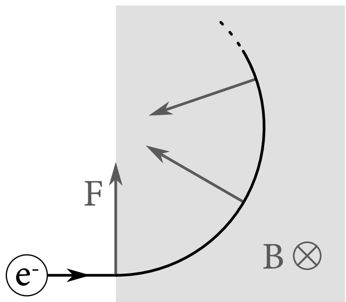


Figura 31.1: *The electron's trajectory*

Since the direction of the motion is always perpendicular to the magnetic field, we can express the magnitude of F by changing the cross product in 31.1 to a simple multiplication of v and B. Since this is the force causing the circular motion, we can equate it with the expression for centripetal acceleration and isolate R,

$$\begin{aligned} m_e \frac{v^2}{R} &= q_e v B, \\ R &= \frac{m_e v}{q_e B}. \end{aligned} \tag{31.2}$$

This is called Larmor radius. We are interested in the time it takes the electron to traverse a quarter of the orbit's circumference, with this segment having the length of $\frac{\pi}{2}R$. This time is then

$$t = \frac{\pi}{2v}R = \frac{\pi}{2v}\frac{m_e v}{q_e B} = \frac{\pi m_e}{2q_e B}. \tag{31.3}$$

We know all the quantities in this formula – elementary charge, electron mass, strength of the magnetic field – hence we obtain $t \approx 1$ ns.

32 If we denote the mass of the balloon as M, then $F = V\rho g - Mg$, where ρ is the density of water. Similarly, the force that the balloon eventually exerts on the bottom is $F' = Mg - V'\rho g$, since water is incompressible and, therefore, does not change its density. The problem states that the compression of the balloon is isothermal, so $pV = p'V'$. It remains for us to find the values of the pressure. Initially the balloon is at atmospheric pressure $p = p_{\text{atm}}$, since the water pressure acts on the balloon in the same way as on the piston. At the bottom, however, the pressure is increased due to the loaded piston mg/S, and secondly by the column of water above the balloon. So for V' we get

$$\begin{aligned} p_{\text{atm}} V &= p'V' = (p_{\text{atm}} + mg/S + h\rho g)V' \\ V' &= \frac{p_{\text{atm}}}{p_{\text{atm}} + mg/S + h\rho g} V \end{aligned} \tag{32.1}$$

This result has to be substituted into the relation for F' to get

$$F' = Mg - V'\rho g = (V - V')\rho g - F = \frac{V\rho g}{1 + \frac{p_{\text{atm}}/g}{m/S + h\rho}} - F \approx 0{,}126\ \text{N}. \tag{32.2}$$

33 The card at the bottom is our first card. If we want to lift it up a tiny bit, the total torque acting on that card must be zero with respect to the axis of rotation. That is in our case the edge of the card that is below all the other cards,

$$F\ell = \frac{1}{2} mg\ell + (\ell - \Delta\ell)F_1, \tag{33.1}$$

where F is the force that Justine exerts on the card and F_1 is the force that the second card (and all the other cards through it) exerts on the first card.

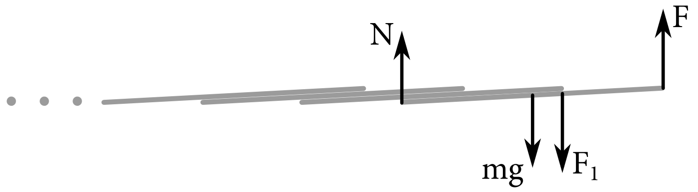


Figura 33.1: *Forces acting on cards*

For an infinite number of cards, we can assume that $F = F_1$. If, in fact, Justine removes the first card, there are still infinitely many cards she needs to lift up. With this assumption, we use the equation 33.1 to get

$$F = \frac{mg\ell}{2\,\Delta\ell}. \tag{33.2}$$

34 We shall consider the situation first in the non-inertial frame of reference with the observer in the axis of rotation in the roundabout's centre, rotating with the roundabout. In this frame of reference, the roundabout is motionless. There is a fictitious centrifugal force acting on Snow White given by $F_o = m\omega^2 r$ which she has to fight against to climb to the centre. Since Snow White does work, the total energy of the system is not conserved. However, since this force is purely radial, it has zero torque.

As Snow White starts moving, there is a second fictitious force at play: Coriolis force. This has the magnitude of $F_c = 2m\omega v_\perp$, where $v_\perp$ is the component of Snow White's velocity perpendicular to the axis of rotation. This force is perpendicular to both the axis of rotation and $v_\perp$, so it has nonzero torque. As Snow White climbs to the centre, she exerts a torque on the roundabout, transferring her angular momentum to the seven dwarves. As we've shown, the energy of the system isn't conserved, but the angular momentum is – this is clear when we look at it in an inertial frame of reference, since there is only one external force acting on the roundabout, and that is the force the ground exerts on the axle to hold it in place, which clearly has zero torque.

Since Snow White's angular momentum will be zero at the end of the manoeuvre, by equating the initial and final angular momentum we obtain

$$(m_s + 7m_t)\omega_1 r^2 = 7m_t\omega_2 r^2, \tag{34.1}$$

where m_s is Snow White's mass, m_t$ is the mass of one dwarf, ω_1 is the initial angular velocity and ω_2 is the final angular velocity.

We are given that $\omega_1 = \frac{2}{3}\omega_2$, which yields $(m_s + 7m_t) = \frac{3}{2}\cdot 7m_t$. This gives us the mass of one dwarf,

$$m_t = \frac{2}{7}m_s = 16\ \text{kg}. \tag{34.2}$$

35 Let us displace the disc from its equilibrium position by a distance Δx. The pressure in the compressed chamber of the cylinder before its base gets torn off will then increase by $\Delta p(\Delta x)$ and in the other chamber pressure drops by the same amount[6]. Therefore a force with magnitude $F_1(\Delta x) = 2\,\Delta p(\Delta x)S$ acts on the disc in an attempt to move the disc back into its equilibrium position (in the middle of the cylinder). In the small displacement approximation, the function $\Delta p(\Delta x)$ is linear.

In the cylinder with its base missing, the displacement of the disc by Δx from its equilibrium (which is still in the middle of the cylinder) causes the same difference in pressure $\Delta p(\Delta x)$ in the undisturbed chamber, but no difference in the other chamber. The force acting on the disc is now only

$$F_2(\Delta x) = \Delta p(\Delta x)S = \frac{1}{2}F_1(\Delta x). \tag{35.1}$$

This setup is in the first case equivalent to the disc being connected to a spring with appropriate stiffness k_1 and the other case is equivalent to the disc being connected to a spring with stiffness $k_2 = \frac{1}{2}k_1$. The period of small oscillations of a mass on a spring is $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ with m being the mass of the disc and k being the spring stiffness, which means that the unknown ratio of the periods is

$$q = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{35.2}$$

[6] All of this is true only in the case of small displacements, because then the pressure as a function of displacement can be linearised.

36 How does the wheel accelerate after falling on the ground? Well, if the wheel has mass m, it's pressed onto the ground by gravitational force of size mg. Also, to the floor it seems as if the wheel is moving – since it's rotating with angular velocity ω_0, at the point of contact its surface moves at cross-radial velocity of $R\omega_0$ relative to both the wheel's centre of mass and the ground, where $R = 2{,}5$ m is the wheel's radius. This means there will be friction acting on the wheel at the point of contact with magnitude fmg (where f is the coefficient of friction) in the direction parallel to the ground and opposing the wheel's rotation. The wheel's centre of mass will begin linearly accelerating along the ground with its transverse velocity given by $v_x(t) = at = fgt$, but the friction also exerts torque that linearly decelerates the wheel's rotation, so that its angular velocity is given by

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{fmgR}{I}t, \tag{36.1}$$

where I is the moment of inertia of the wheel.

Friction, of course, doesn't act indefinitely – it will cease the moment the wheel stops slipping. This occurs once the cross-radial velocity at the surface $R\omega(t)$ equals the translational velocity $v_x(t)$, and the wheel reaches a stable rolling motion. Let's find the time t_v at which this occurs:

$$R\left(\omega_0 - \frac{fmgR}{I}t_v\right) = fgt_v \quad \Rightarrow \quad t_v = \frac{R\omega_0}{fg\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}. \tag{36.2}$$

The final translational velocity of the wheel is then simply

$$v_v = v_x(t_v) = fgt_v = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{mR^2}{I}}. \tag{36.3}$$

This is a known variable: what we want to find is the hamster's running speed before the breakage v_s, which is simply equal to the initial cross-radial velocity $R\omega_0$,

$$v_s = R\omega_0 = v_v\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right). \tag{36.4}$$

We see that we still need to find the mass and the moment of inertia of the wheel. These can be found by linearly superimposing the properties of each metallic component. The moments of inertia of the 50 small rods on the circumference and circular hoops are trivial to calculate: they all lie at the same distance from the axis of rotation, and even if we cut them up into tiny parts, each part is at distance R from the axis of rotation. Therefore, their total moment of inertia is $50\lambda AR^2 + 2\lambda(2\pi R)R^2$, where A is the length of each small rod.

The two diametral rods are more tricky. Each has mass $2R\lambda$, and in literature we can find that the moment of inertia of a rod of length X and mass M rotating about an axis passing through its centre and perpendicular to the rod itself is $\frac{1}{12}MX^2$.

We have $X = 2R$ and by substituting the mass we find that each diametral rod has moment of inertia of $\frac{2}{3}\lambda R^3$. Hence the total moment of inertia of the wheel is

$$I = \lambda R^2\left(50A + \left(4\pi + \frac{4}{3}\right)R\right). \tag{36.5}$$

We swiftly express the wheel's mass from its dimensions and linear density as

$$m = \lambda(50A + (4\pi + 4)R), \tag{36.6}$$

hence the hamster's running speed is equal to

$$v_s = v_v\left(1 + \frac{50A + (4\pi + 4)R}{50A + \left(4\pi + \frac{4}{3}\right)R}\right) \doteq 2{,}11\ \mathrm{m/s}. \tag{36.7}$$

37 Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że satelita opuści pole grawitacyjne Słońca. Jeśli jednak siła będzie wystarczająco mała, satelita nadal będzie ze Słońcem związany. Jego trajektoria nie będzie już krzywą stożkową, ale pozostanie on na krzywej, przechodzącej przez punkt maksymalnej odległości radialnej od Słońca. Szukamy takiej siły F żeby maksymalna odległość radialna od Słońca wynosiła $2R$.

Przed włączeniem silników satelita orbitował wokół Słońca po orbicie kołowej o promieniu R z prędkością $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Po włączeniu silników, trajektoria zmieniała się, ale prawo zachowania momentu pędu wciąż obowiązuje, ponieważ siła F posiada tylko składową radialną. Oznaczmy v jako prędkość satelity w odległości $2R$. Ponieważ jest to punkt trajektorii najbardziej oddalony od Słónca, linia łącząca Słońce i satelitę jest prostopadła do kierunku prędkości. Zatem możemy zapisać

$$v_0 R = v2R \tag{37.1}$$

a stąd

$$v = \frac{v_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{R}}. \tag{37.2}$$

Następnie korzystamy z prawa zachowania energii. Należy zachować czujność, ponieważ siła F wykonuje również pracę. Podzielmy teraz trajektorię na wiele małych odcinków $\Delta\vec{s}$ i obliczmy różniczkowe prace $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$ wykonane przez siłę na każdym z nich, a następnie zsumujmy je ΔW. Jeżeli wektor $\Delta\vec{s}$ rozłożymy na składowe: radialną i styczną do toru, iloczyn skalarny można wyliczyć jako iloczyn wartości siły $\vec{F}$ wartości $\Delta\vec{s}$, co wynika z własności iloczynu skalarnego. Zatem całkowita praca wykonana przez silniki od momentu ich uruchomienia do chwili, gdy satelita osiągnie odległość $2R$ od Słońca wynosi FR (odległość heliocentryczna satelity zmienia się o R). Wówczas, prawo zachowania energii możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{2R} - FR. \tag{37.3}$$

Początkowa prędkość satelity wynosi $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ a jego prędkość w odległości $2R$ wyraża się jako 37.2. Wyznaczamy więc F:

$$F = \frac{1}{8}\frac{GMm}{R^2}. \tag{37.4}$$

38 We need to realise what forces act on the golden sheet. Firstly, we have the gravitational force given by the Newton's gravitational law. Secondly, the reflected photons transfer momentum to the sheet. We use the alternate form of the Newton's second law $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, where Δp is the difference in momentum. The difference in momentum of the photons that are reflected during a time Δt from the sheet is $\Delta p = \frac{2E}{c}$, where E is the energy incident on the sheet. The photons hit the sheet perpendicularly[7] and after reflection, they have an equal momentum in the opposite direction. Therefore the difference in momentum is doubled.

If the star radiates some energy E_c, the sheet, which is located in distance D, reflects

$$E = \frac{A}{4\pi D^2} E_c, \tag{38.1}$$

where A is the unknown area of the sheet.

The radiated energy can be determined from the Stefan-Boltzmann law for black body radiation as

$$E_c = P\,\Delta t = \sigma T^4 S\,\Delta t = \sigma T^4 4\pi R^2\,\Delta t. \tag{38.2}$$

The force exerted by the radiation must be equal to the gravitational force. This yields the equation

$$\frac{GMm}{D^2} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2E}{c\,\Delta t} = \frac{2A\sigma T^4 4\pi R^2}{4\pi D^2 c}, \tag{38.3}$$

from where

$$A = \frac{GMmc}{2\sigma T^4 R^2} \tag{38.4}$$

Noticeably, the area density does not depend on the distance from the star. This is an expected result, because both forces are proportional to D^{-2}.

39 This problem, as is usual in special relativity, can be approached in two ways: rigorously or with a trick. Let us denote the flight time of the journey's duration as $\tau = 2\,600\,000$ years and the distance between galaxy M31 and the Earth as $D = c\tau = 2\,600\,000$ light-years.

Rigorous approach

Let us consider the situation in two reference frames, writing down the spacetime coordinates of the Earth and galaxy M31 in each. In the Earth's frame of reference let the Earth be at $t = 0, x = 0$. Then, galaxy M31 is at $t = t_G, x = D$, where D is the given distance and $t_G = \frac{D}{v}$, where v is the traveller's velocity which we want to find. In the traveller's reference frame, these coordinates change under a Lorentz transform. The Earth is still at $t' = 0$, $x' = 0$, but galaxy M31 is now at

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vD}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(D - vt), \tag{39.1}$$

where $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ is the Lorentz factor.

Since in this second reference frame the traveller is stationary, the difference of the time coordinates of the Earth and galaxy M31 (equal to t') is also the proper (and flight) time which the traveller measures as the duration of the journey – hence $t' = \tau$. Let us substitute the derived expression for t and express the traveller's

[7] we know this because $D \gg R$

velocity

$$\tau = \gamma D\left(\frac{1}{v} - \frac{v}{c^2}\right) = \frac{1}{v}\gamma D\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{v}\gamma D\gamma^{-2} = \frac{D}{v\gamma},$$

$$\frac{D}{\tau} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{c^2}{\frac{c^2}{v^2}-1}}, \tag{39.2}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+\frac{c^2\tau^2}{D^2}}}.$$

But since $\frac{\tau}{D}$ is simply the inverse of the speed of light c^{-1} (this is how these quantities were given – we could have specified a different value of τ and the solution would be different), hence

$$v = \frac{c}{\sqrt{2}}. \tag{39.3}$$

Trick approach

Since we are interested in the flight time, which is the traveller's proper time, let us imagine we are aboard the travelling spaceship and consider which relativistic effects we observe. Clocks moving relative to us slow down, but that is not of interest to us. Moreover, the distances between points moving relative to us shorten by the Lorentz factor – and this is the effect that causes us to measure a shorter duration of our journey. So if we move at the velocity v, the observed distance to our destination is $D_0 = D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ and the journey duration is $\tau = \frac{D_0}{v}$. And since we are given $\tau = \frac{D}{c}$, we find

$$\frac{D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} = \frac{D}{c} \tag{39.4}$$

From this it is trivial to express the expected result we found in 39.3.

40 Let us consider a wall of thickness h, area S, and thermal conductivity λ. If we maintain its faces at temperatures t_1 and t_2, respectively, a heat flow

$$P = \frac{\lambda S}{h}(t_2 - t_1). \tag{40.1}$$

will be present.

To simplify matters, let us define coefficient ${}^{\lambda S}/_{h} =: X$. Now, let us look at a wall with two layers with coefficients X_1 a X_2, respectively. Continuity demands that

$$P = X_2(t_2 - t) = X_1(t - t_1), \tag{40.2}$$

where t is the temperature of the inter-layer interface. This temperature can be computed as

$$t = \frac{X_1 t_1 + X_2 t_2}{X_1 + X_2}, \tag{40.3}$$

and we can write an equation for the heat flow

$$P = \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2}\left(t_2 - t_1\right). \tag{40.4}$$

We can observe that a composite coefficient can be defined as

$$X_{12} \coloneqq \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2}. \tag{40.5}$$

With these preparations, we are ready to tackle the task itself.

Before styrofoam installation, the heat flow from Bob to neighbour was

$$P = \frac{X_{\mathrm{floor}} X_{\mathrm{ceiling}}}{X_{\mathrm{floor}} + X_{\mathrm{ceiling}}}\left(t_{\mathrm{Bob}} - t_{\mathrm{neighbour}}\right) = X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling}}\left(t_{\mathrm{Bob}} - t_{\mathrm{neighbour}}\right). \tag{40.6}$$

If we neglect neighbour's personal heat production, this heat flow is balanced with losses going outdoors

$$P = X\left(t_{\mathrm{neighbour}} - t_{\mathrm{outdoors}}\right), \tag{40.7}$$

where X is (for now) unknown coefficient describing heat losses to outdoors. With vital help of two equations above, we can determine it as

$$X = X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling}} \frac{t_{\mathrm{Bob}} - t_{\mathrm{neighbour}}}{t_{\mathrm{neighbour}} - t_{\mathrm{outdoors}}}. \tag{40.8}$$

After insulation, the coefficient describing heat flow between Bob's place and his neighbour becomes

$$X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling\,+\,styrofoam}} = \frac{X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling}} X_{\mathrm{styrofoam}}}{X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling}} + X_{\mathrm{styrofoam}}}. \tag{40.9}$$

Once again, the flow from Bob to neighbour is balanced with the losses, so

$$X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling\,+\,styrofoam}}\left(t_{\mathrm{Bob}} - t'_{\mathrm{neighbour}}\right) = X\left(t'_{\mathrm{neighbour}} - t_{\mathrm{outdoors}}\right) \tag{40.10}$$

Now, we can simply write

$$t'_{\mathrm{neighbour}} = \frac{X t_{\mathrm{outdoors}} + X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling\,+\,styrofoam}} t_{\mathrm{Bob}}}{X + X_{\mathrm{floor\,+\,ceiling\,+\,styrofoam}}}. \tag{40.11}$$

We can evaluate this result as 0,625 °C.

Odpowiedzi

1 9

2 41 m

3 $\dfrac{5}{27}$

4 0,073 $\mathrm{g/cm^3} = 73\ \mathrm{kg/m^3}$

5 $3{,}6\ \mathrm{s} = 10^{-3}\ \mathrm{h}$

6 $\dfrac{\sqrt{26}}{2}\ \mathrm{s} \doteq 2{,}55\ \mathrm{s}$

7 4,89 h = 17 591 s *or* 4 godziny, 53 minuty, 11 sekund

8 134

9 4 : 3

10 7,68 l

11 151,6 m. *Akceptowalne są wyniki z przedziału* 150 – 152 m.

12 2 Ω

13 1,2 m

14 98,3 kg, *akceptowane wyniki z przedziału* 96 – 99 kg.

15 $\dfrac{\pi}{2}r^2 + r^2 = \left(\dfrac{\pi}{2} + 1\right)r^2$

16 203 l, akceptowane także 0,2 $\mathrm{m^3}$ = 200 l

17 $\dfrac{180^\circ}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}_0$

18 $\sqrt{300}$ m/s ≐ 17,32 m/s. *Akceptowalny jest wynik z przedziału* 17,15 – 17,35 m/s.

19 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ s ≐ 2,17 s

20 314 °C

21 26,25 Ω

22 521 W

23 5618 kg/m^3, *akceptowane wyniki z przedziału* 5612 – 5727 kg/m^3.

24 9 cm/s

25 *Akceptuj wyniki mieszczące się w przedziale* 1,08 – 1,10 m/s^2.

26 *Długość* $L\frac{K}{k+K}$, *stała sprężystości* $k+K$. *Wynik akceptowalny tylko jeśli oba wyrażenia zostaly podane. Jeśli tylko jedno wyrażenie jest poprawne,* ***nie wskazywać*** *które jest niepoprawne.*

27 $\sqrt{\frac{F}{ML}}$

28 170

29 2,2 MW

30 0,94 m

31 1,0 ns

32 0,126 N, *(pierwsze trzy cyfry znaczące)*

33 $\frac{mg\ell}{2\,\Delta\ell}$

34 16 kg

35 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

36 2,11 m/s

37 $\dfrac{GMm}{8R^2}$

38 $\dfrac{GMmc}{2R^2\sigma T^4}$

39 $\dfrac{c}{\sqrt{2}}$

40 0,625 °C