Milí čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 26. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s ktorými ste sa v tomto ročníku mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste niektorému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Táto zbierka by nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Väčšina z nás sú študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a časť z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

Fyzikálny Náboj pokračuje vo svojej medzinárodnej tradícii. V roku 2023 sa do Náboja zapojili okrem Bratislavy takisto mestá Košice, Praha, Ostrava, Budapešť, Gdańsk a Madrid. Výsledky vzájomného súboja si môžete pozrieť na našich stránkach. Za medzinárodnú spoluprácu ďakujeme lokálnym organizátorom: Patrik Rusnák (Bratislava), Marián Kireš (Košice), Jakub Kliment (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Brygida Mielewska a Kamil Żmudziński (Gdańsk) a José Francisco Romero García (Madrid).

*FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom každého polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke* `https://fks.sk/`.

V mene celého organizátorského tímu veríme, že ste si v roku 2023 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že sa všetci uvidíme na Náboji aj o rok! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov.

*Jaroslav Valovčan*
*hlavný organizátor*

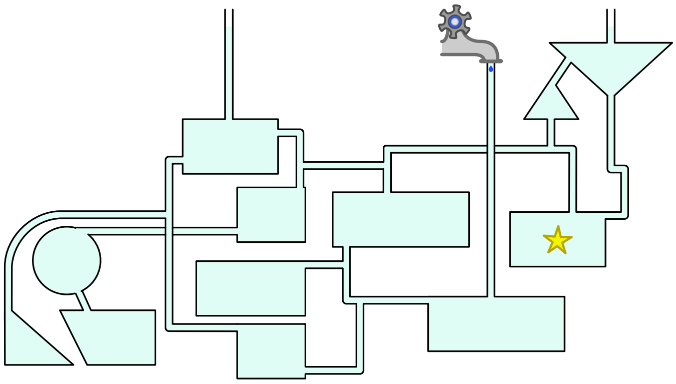
**Zbierku zostavili:**

Martin ‚Kvík' Baláž
Filip Brutovský
Jozef Csipes
Paulína ‚Jonka' Dujavová
Sára Folajtárová
Lucia ‚Želé' Gelenekyová
Matúš Hladký
Jakub Hluško
Michal ‚Dvojka' Horanský
Jakub ‚Andrej' Kliment
Justína ‚Pľyš' Nováková
Patrik ‚PA3K' Rusnák
Adam Škrlec
Jaroslav Valovčan
Tomáš ‚Mözög' Vörös
Matej Zigo

Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke `https://physics.naboj.org/`.

# Zadania

**1** Pri Matfyze prerábajú vodovodné potrubie. Adam si idúc okolo pilne pracujúcich robotníkov všimol zaujímavú sieť potrubí a vodných nádrží, ktorá je zobrazená na obrázku. Koľká v poradí sa naplní nádrž označená hviezdičkou, až robotníci pustia vodu z vodovodného kohútika?



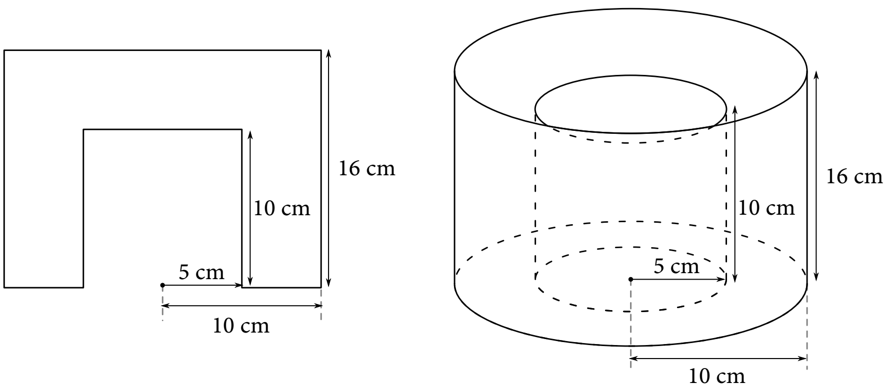
**2** Priemerný človek má 100 000 vlasov, pričom každý narastie o 15 cm za rok. O koľko metrov vlasov viac bude mať Priemerný človek zajtra o tomto čase?

**3** Tomáš opäť raz pozeral v telke nejaké formuly. Naladil si priamy prenos z Ameriky, kde komentátor počas pretekov zahlásil, že 200 míľ za hodinu je jedno futbalové ihrisko za sekundu. Ihneď si pomyslel, ako dobre to Američania majú vymyslené s tými ich jednotkami. Radšej si to však overil a zistil, že komentátor vôbec nemal pravdu. O koľko futbalových ihrísk za sekundu sa komentátor pomýlil?

*Jedno ihrisko amerického futbalu má na dĺžku 120 yardov a jedna míľa má 1760 yardov.*

**4** Ani firma *Ziggo & Marinelli*, popredný savojský výrobca mletých piškót, nezostala mimo inflačných procesov. Na rozdiel od konkurencie však svoje výrobky nezdražili, len vynovili tvar nádoby. Tá má po novom tvar valca s polomerom 10 cm a výškou 16 cm, pričom stredná kruhová časť jej dna s polomerom 5 cm je zvýšená o 10 cm.

Aká je hustota pomletej piškótoviny, ak plné balenie váži 350 g a jeho prázdny obal 40 g?

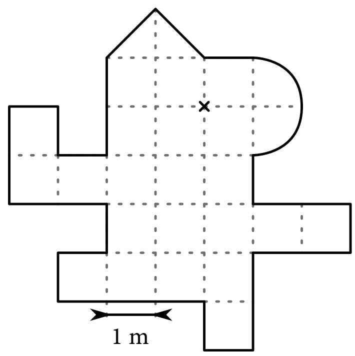


**5** Juro veľa beháva. Nedávno si dokonca kúpil inteligentné hodinky. Po mesiaci používania mu pogratulovali, že jeho rýchlosť pri behu dosiahla 17 km/h. Teraz ale vonku stále prší a Juro musí behávať doma na bežiacom páse s dĺžkou 2 m. Rýchlosť pásu nastavil na 5 m/s, rozklusal sa a vhupol rovno do jeho stredu. Za aký dlhý čas bežiaci Juro z pásu spadne?

**6** Pištoľník Sebastián stojí uprostred námestia kdesi na divokom západe a obkľúčujú ho banditi. Dokáže im ešte uniknúť, potreboval by ale niečím odpútať ich pozornosť. Našťastie je po včerajšej pijatike po námestí rozliata kaluž ohnivej vody. Sebastiánovi stačí vystreliť z revolvera do zeme, aby celá kaluž vzbĺkla. Plameň sa po povrchu kaluže šíri všetkými smermi rýchlosťou 2 m/s.

Ako dlho potrvá, kým sa celá kaluž rozhorí, ak Sebastián strelí na miesto označené krížikom?

*Štvorček siete má stranu dlhú* 1 m.




**7** Charitatívny beh Wings for Life prebieha nasledovne: všetci bežci vyštartujú v rovnaký čas. Pol hodiny po nich vyštartuje auto rýchlosťou 14 km/h, ktoré po každej ďalšej polhodine skokovo zrýchli. Keď auto dobehne niektorého z bežcov, ten musí svoj beh ukončiť.

Historický rekord v takto odbehnutej vzdialenosti je 92,14 km. Ako dlho trval tento rekordný beh, ak sa auto pohybuje postupne rýchlosťami 14, 15, 16, 17, 18, 22, 26, 30 a 34 km/h a po dosiahnutí tejto rýchlosti už ďalej nezrýchľuje?

**8** Odovzdajte súčet čísel tých výrokov, ktoré sú pravdivé:

| | |
|---|---|
| 1 | Bežné ističe v byte majú nominálne hodnoty okolo 150 A. |
| 2 | Galvanický článok je zdroj jednosmerného napätia. |
| 4 | Elektrická sila môže pôsobiť aj medzi izolantmi. |
| 8 | Zahrievanie vodičov znižuje ich elektrický odpor. |
| 16 | Rozmer jednotky coulomb sú ampére za sekundu. |
| 32 | Prúdy menšie ako 1 A nie sú pre človeka nebezpečné. |
| 64 | Na paralelne zapojenej dvojici rezistorov môže byť napätie rôzne. |
| 128 | Hoci v zásuvke je striedavé napätie, rýchlovarná kanvica by fungovala aj na jednosmerné. |

**9** Eva sa po poslednej návšteve u Adama zaprisahala, že mu vymaľuje celú izbu. Nuž si kúpila päťlitrové vedro koncentrovanej farby. Vedro je pomaľované rôznymi nápismi: okrem obrázkov polárnych plání a zmienok o neprekonateľnej alabastrovej belosti na ňom svieti aj údaj o hmotnosti obsahu 7,5 kg a oduševnené odporúčanie, že farbu je najlepšie riediť v pomere 0,5 kg vody na 1 kg farby.

Eva sa nechce obťažovať s hľadaním kuchynskej váhy a radšej by na riedenie použila iba osvedčenú naberačku. V akom **objemovom** pomere by mala farbu riediť?

*Výsledok odovzdajte v tvare objem farby : objem vody.*

**10** Organizátori Nábojа sa v letných mesiacoch riadia známym heslom

> *„Chladné drinky v ruke maj a so slámkou ich popíjaj.“*

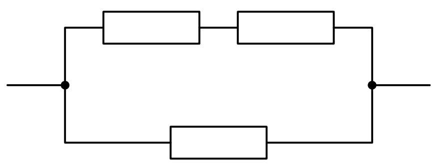
Pľyš im preto pripravuje *Bozk babičky Justíny*, lahodný nápoj podávaný pri teplote 7 °C. Z vodovodu jej, žiaľ, tečie len voda s teplotou 20 °C. Aby ju ochladila, hodila do nej blok ľadu s hmotnosťou 1 kg a teplotou 0 °C.

Aký objem vody s požadovanou teplotou takto vie Pľyš vyrobiť?

**11** Maťo so Sárou sa v mene fyziky rozhodli zažiť na vlastnej koži beztiažový stav. Pre tieto účely si zaobstarali výlet balónom, z ktorého plánovali vyskočiť. Vo výške 200 metrov sa Maťo natešene vrhol cez palubu. Až po 3 sekundách si Sára všimla, že si zabudol padák a zdesene vykríkla. V akej výške bude Maťo, keď ju začuje?

*Balón stojí celý čas na mieste. Spomalenie kvôli odporu vzduchu zanedbajte.*

**12** Vzali sme si tri rovnaké rezistory a zmerali odpor pri ich sériovom a paralelnom zapojení. Výsledky sa líšili o 8 Ω. Aký je odpor zapojenia na obrázku?



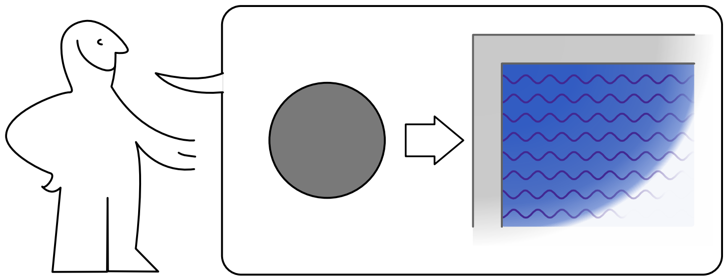
**13** Hasič Fero zlaňuje z vysokej budovy. Práve zliezol na koniec lana dlhého 30 m. Keď sa teraz z celej sily odrazí nohami v smere od budovy, dokáže sa dostať do horizontálnej vzdialenosti 8,4 m od steny. Do akej výšky vie Fero vyskočiť zvislo nahor na rovnej zemi?

**14** Kubko sa práve rozbieha na diaľnici, keď ho tu zrazu začnú znepokojovať vibrácie od kolesa. Čo môže spôsobiť napríklad taký ventil vážiaci 10 g? Akú zdanlivú hmotnosť ventilu by pociťovalo koleso, ak by bol ventil vzdialený 20 cm od osi otáčania a auto by išlo rýchlosťou 500 km/h? Predpokladajte, že vzdialenosť ventilu od osi otáčania je ďaleko väčšia než jeho vzdialenosť od vonkajšieho okraja kolesa.

*Za zdanlivú hmotnosť považujeme hmotnosť telesa, ktoré by na Zemi na váhu pôsobilo rovnako veľkou silou.*

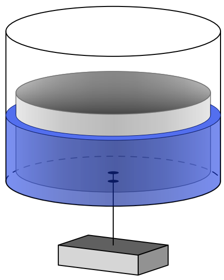
**15** Jonka bola na dovolenke. Pri jej chatke bol dokonca aj obdĺžnikový bazén s rozmermi $a \times b$. Pri ubytovávaní jej majiteľ sucho oznámil, že bazén treba na noc prikrývať. Nechal jej ale iba homogénny kruhový kryt s polomerom $r \ll a, b$. Jonke je jasné, že celý bazén nezakryje, no keďže je poctivá, chce z neho aspoň zakryť čo najväčšiu časť.

Aká je najväčšia možná plocha bazénu, ktorú vie zakryť bez toho, aby doň kryt spadol?



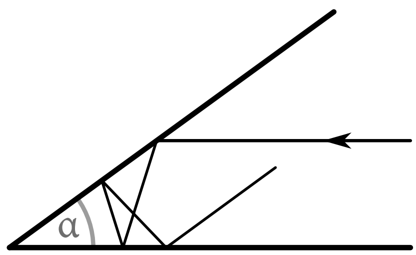
**16** Marcel už má vodičský aj letecký preukaz. Stále má ale priveľa voľného času a svoju zbierku by rád rozšíril aj o kapitánsky preukaz. Zatiaľ však pracuje ako žeriavnik v prístave. Nenechal si ale ujsť príležitosť a vymyslel nový systém na zdvíhanie kontajnerov. Ten je zložený z dvoch vysokých valcov s polomermi 1 m a 0,99 m vložených do seba. Na spodku menšieho, vnútorného, je pripevnená tyč, ktorá prechádza cez dno väčšieho a drží kontajner. Zdvíhať kontajnery bude tak, že do priestoru medzi valcami naleje vodu. Koľko vody Marcel potrebuje, aby podvihol kontajner s hmotnosťou 10 t?

*Trenie ani únik vody okolo tyče neuvažujte. Hmotnosť valcov je voči kontajneru zanedbateľne malá.*



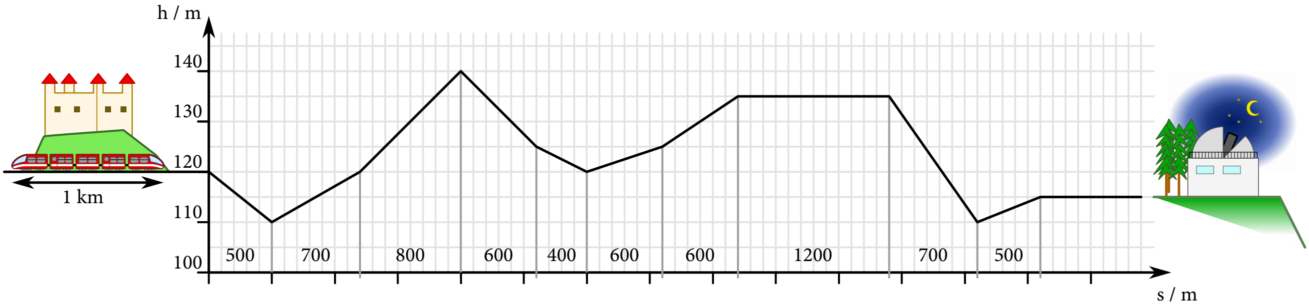
**17** Enka vzala dve zrkadielka a postavila ich tak, aby zvierali uhol $\alpha$. Potom medzi ne zasvietila laserom tak, že lúč bol rovnobežný s jedným zo zrkadiel. Všimla si, že naspäť sa lúč spomedzi zrkadiel vracia presne pozdĺž druhého zrkadla.

Aké všetky uhly mohli zrkadlá zvierať?



**18** Elektrina je riadne drahá. Vedenie železníc v rámci šetriacich opatrení nakázalo rušňovodičovi Kubkovi, aby do kopca príliš nepridával a čo najviac využíval zotrvačnosť. Kubkov vlak má dĺžku 1000 m a hmotnosť 1000 t. Akou najmenšou rýchlosťou sa musí rozbehnúť zo stanice vľavo, aby zotrvačnosťou prešiel celú trať na obrázku?

*Kubkov vlak má konštantnú dĺžkovú hustotu. Trenie ani odpor vzduchu neuvažujte. Pre malé uhly sa nebojte použiť aproximáciu* $\tan x \approx x$.




**19** Pišťoľník Sebastián opäť raz stojí na námestí obkľúčený banditami a plánuje veľkolepý únik v plameňoch. Po námestí je od včerajšej pijatiky rozliata ohnivá voda a Sebastián stojí práve v strede veľkej kruhovej kaluže s polomerom 5 m. Keď vystrelí do ľubovoľného miesta kaluže, ohnivá voda sa tam zapáli a plameň sa bude šíriť po hladine rýchlosťou 2 m/s.

Sebastián má posledné tri strely a potreboval by, aby celá kaluž vzbĺkla čo najskôr. Ako dlho to potrvá, ak vystrelí na optimálne miesta?

*Sebastián má najrýchlejšiu ruku na Západe a čas medzi jeho výstrelmi je zanedbateľný, rovnako ako doba letu jeho striel.*

**20** Bastlič Dano pri kontajneroch našiel za zimného dňa dva takmer rovnaké kovové pásiky dlhé 1 m a hrubé 1 mm. Oba kovy sú rovnako pevné, akurát majú rôzne teplotné rozťažnosti $8 \cdot 10^{-5}$ K$^{-1}$ a $10^{-4}$ K$^{-1}$. Priložil ich k sebe po celej ich dĺžke a pevne ich zlisoval dokopy pri teplote 0 °C.

Pri akých teplotách sa z pásu sformuje kruhový prstenec?

*Uvažujte, že pásy sa rozťahujú len v pozdĺžnom smere.*

**21** Andrej kdesi vyhrabal tri rezistory: dva z nich boli očividne rovnaké a tretí sa od nich líšil. Hneď z nich začal skladať rôzne zapojenia, pričom vždy použil všetky tri. Podarilo sa mu z nich zložiť zapojenia s odpormi 50, 60, 112, 140 a 245 Ω. Na jeden spôsob však zabudol.

Aký odpor by malo šieste zapojenie, ktoré sa z týchto troch rezistorov dá zostaviť?

**22** Slnečné svetlo nás obšťastňuje plošným výkonom žiarenia 1366 W/m$^2$. Justína sa však necíti obšťastňovaná sniečkom pripekajúcim na ňu cez dokonale priesvitné štvorcové strešné okno so stranou 80 cm. Svit našej najbližšej hviezdy jej začal prekážať natoľko, že si zaobstarala kus špeciálnej fólie s rozmermi 1,5 m × 1 m, ktorá prepustí iba 80 % svetla.

Justína vzala nožnice, všakovako fóliu postrihala a polepila okno vo viacerých vrstvách tak, aby oknom prechádzalo čo najmenej svetla, aj za cenu, že počet vrstiev fólie nebude po celej ploche okna rovnaký. Aký žiarivý výkon bude prechádzať oknom do izby po tejto úprave, ak Slnko svieti kolmo na okno?

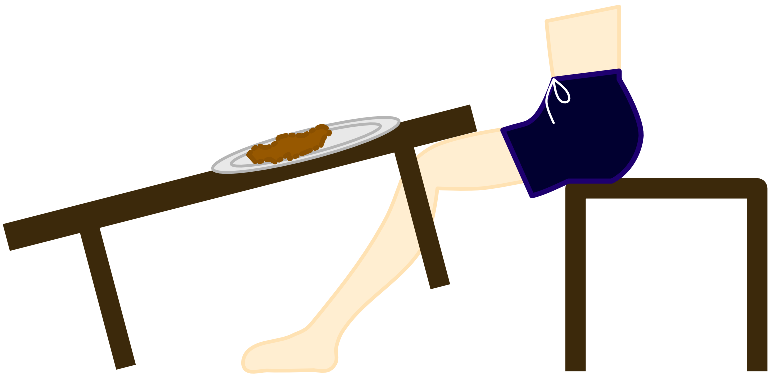
**23** Športovkyňa Lucka začala trénovať skok do výšky. Keď naposledy vylepšila svoj osobný rekord, dokázala vyskočiť do takej výšky, že jej ťažisko sa zdvihlo o 1 m, čo sa jej však zdalo primálo. Svoj rekord sa teda pokúsila zlepšiť tým, že sa zo Zeme presunula na malú nerotujúcu planétku v tvare gule s polomerom 2,5 km. Aká môže byť maximálna hustota planétky, aby z nej Lucka dokázala pri svojich aktuálnych skokanských schopnostiach odskočiť a už sa na ňu nikdy nevrátiť?

**24** Mimozemšťan Dvojka získal grant a postavil si zaň veľký ďalekohľad, ktorým vyhľadáva planéty pri iných hviezdach. Ak by sa pozrel smerom k nám, planéty by síce priamo nevidel, všimol by si však, že Slnkom niečo hýbe v radiálnom smere. Napríklad drobný pohyb s periódou jedného roka by bol určite spôsobený tým, že Slnko a naša Zem obiehajú okolo spoločného ťažiska. Aká veľká je amplitúda radiálnej rýchlosti Slnka pri obehu Zeme okolo neho?

*Ostatné planéty ignorujte. Mimozemšťan Dvojka má obrovské šťastie a jeho domovská planéta leží práve v rovine obežnej dráhy Zeme a Slnka.*

**25** Adam sa teší, že je konečne nedeľa a na obed má rezeň so zemiakmi (nie s ryžou). Jeho nohy sú však natoľko masívne, že po usadení sa stôl nakloní o uhol 30°. Tanier s rezňom sa začne šmýkať a rezeň na tanieri tiež. Medzi stolom a tanierom je koeficient šmykového trenia 0,4, medzi tanierom a rezňom je koeficient šmykového trenia 0,3. Rezeň má hmotnosť $m$ a tanier má hmotnosť $2m$.

S akým zrýchlením sa hýbe tanier po stole hneď po naklonení?



**26** Tomáš našiel v maminej dielni pružinu s tuhosťou $k$ a nulovou pokojovou dĺžkou. Keďže ho jej existencia urážala, vsunul do nej o niečo užšiu pružinu s tuhosťou $K$ a pokojovou dĺžkou $L$ a privaril ich zodpovedajúce konce k sebe.

Akú má výsledný objekt tuhosť a pokojovú dĺžku?

**27** Ak chceme hodnotu nejakej fyzikálnej veličiny narýchlo odhadnúť, nezaujíma nás, aké číselné konštanty sú vo vzťahu pre veličinu, ktorú odhadujeme. Určte takýmto spôsobom frekvenciu kmitania gitarovej struny. Jej hmotnosť je $M$, dĺžka $L$ a je napínaná silou $F$.

**28** Jarovi sa do rúk dostal histogram počtu zemetrasení za rok podľa magnitúd. Dáta v ňom boli zoskupené po intervaloch šírky 1. Jaro z neho vyčítal, že za daný rok sa na Zemi vyskytlo 6200 zemetrasení s magnitúdami 4,0 – 4,9 a 800 zemetrasení s magnitúdami 5,0 – 5,9. Zaujímalo by ho však, koľko bolo zemetrasení s magnitúdom 5,0.

Jaro vie, že počet zemetrasení s magnitúdom aspoň $M$ je daný Gutenbergovým-Richterovým zákonom

$$N(m \geq M) = 10^{a-bM},$$

kde $a$ a $b$ sú nejaké konštanty. Na základe tohto poznatku sa mu už hľadaný počet zemetrasení podarilo dopočítať. Nájdite ho aj vy!

*Magnitúda zemetrasení sú zaokrúhľované na jedno desatinné miesto, preto počet zemetrasení s magnitúdom* 5,0 *v skutočnosti znamená počet zemetrasení v rozsahu magnitúd* $4{,}95 \leq m < 5{,}05$. *Podobne interval magnitúd* 4,0 – 4,9 *znamená* $3{,}95 \leq m < 4{,}95$.

**29** Mirko odmeral, že kotolňa na Matfyze dodáva do radiátorov každú sekundu 10 l mysterióznej kvapaliny s teplotou 80 °C, naspäť sa však každú sekundu vráti len 9,9 l ochladenej kvapaliny. Chvíľu nadával na neschopných klampiarov, chvíľu na nezodpovedných študentov, ale po prejdení celej budovy zistil, že radiátory tesnia a žiadna kvapalina z nich neuniká. Aký je tepelný výkon kotolne?

Mysteriózna kvapalina v radiátoroch má na mieste, kde vteká naspäť do kotolne, hustotu 1000 kg/m$^3$, konštantný koeficient objemovej teplotnej rozťažnosti $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ K$^{-1}$ a mernú tepelnú kapacitu 4000 J/(kg · K).

**30** Keď sa Syseľ nasťahoval do nového bytu, priniesol si so sebou aj ukrutný nástroj na cvičenie: riadne tuhú pružinu s pokojovou dĺžkou 1 m. Ak jeden jej koniec pripevní na strop a zavesí sa na druhý koniec, pružina sa natiahne presne o 2 m.

Zaujímalo by ho, o akú výšku by klesol, keby oba konce pružiny pripevnil na strop do vzájomnej vzdialenosti 1 m a on sa zavesil za stred pružiny.

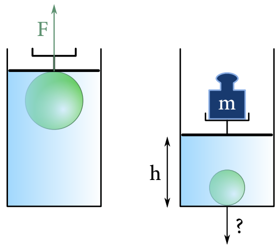
*Výsledok odovzdávajte s presnosťou na dve platné cifry. Pri riešení sa nebojte použiť aj kalkulačku.*

**31** Andrej a Kubo sa ostreľujú elektrónmi. Andrej sa zrazu ocitol v nepríjemnej situácii, že naňho letí elektrón rýchlosťou $v = 3200$ m/s a on sa mu už nestíha vyhnúť. Musí preto využiť svoje nadprirodzené schopnosti a krátkodobo zapnúť homogénne magnetické pole s indukciou $B = 8{,}9$ mT vo zvislom smere (kolmo na $v$).

Ako dlho musí magnetické pole pôsobiť, aby elektrón zmenil svoj smer o 90° a trafil tak Kuba, ktorý stojí neďaleko?

**32** Štátnicujúci Krtko uzavretý zospodu podrážkami stojí s malou dušičkou pred komisiou. Pre jednoduchosť ho modelujeme ako zatiaľ zvislý valec prierezu $S = 50$ cm$^2$ plný vody, jeho dušičku ako balón s objemom $V = 50$ cm$^3$, a jeho mysliace ústrojenstvo ako piest uzatvárajúci ho zvrchu. Zvyšky duchaplnosti sa v modeli prejavujú ako pôsobenie balónika na piest silou $F = 10$ mN.

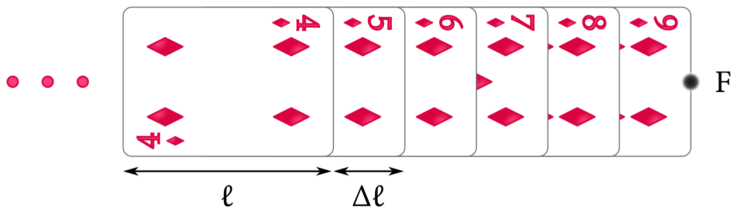
Komisia mu znenazdajky položí zákernú otázku, pripodobenú závažím hmotnosti $m = 10$ kg položeným na piest. Jeho dušička pomaly klesne na dno. Ako silno teraz tlačí na podrážky, ak je piest vo výške $h = 1{,}8$ m nad dnom? Stláčanie jeho dušičky prebieha izotermicky a rozmery balónu sú malé v porovnaní s rozmermi valca. V štátnicovej miestnosti je ťaživá atmosféra s normálnym atmosférickým tlakom.




**33** Kvík si po lopotnej šichte na univerzite rád dopraje konskú dávku vzrušenia. Ledva príde domov, už otvára svoju obľúbenú limonádu s príchuťou rukoly a cukety a usadá k televíznemu kanálu *PASIANS TV*. Je však extrémne unavený a ihneď zaspí. Sníva sa mu o šarmantnej hráčke Justíne, ktorá stavia domček z nekonečne veľa kariet. Tieto karty sú uložené na nekonečne dlhom stole. Zrazu sa krásna Justínka naňho otočí a pýta sa:

*„Akú silu musím vyvinúť na podvihnutie najspodnejšej karty, ak ňou pôsobím na jej vzdialený koniec smerom zvislo nahor a karty sú uložené ako na obrázku? Karty majú dĺžku $\ell$, hmotnosť $m$ a prečnievajú o $\Delta\ell$.“*

Pomôžte Kvíkovi mať pokojný spánok a nájdite odpoveď na Justínkinu otázku.




**34** Keď Snehulienka práve nedrichme, rada sa zabáva so siedmimi trpaslíkmi na nehmotnom kolotoči. Posadajú si na osem sedadiel rovnomerne rozmiestnených po obvode kolotoča a roztočia sa na rýchlosť jednej otáčky za tri sekundy. Tu zrazu do stredu kolotoča spadlo zo stromu jablko. Snehulienka sa zdvihla zo sedadla a preliezla do jeho stredu. Po tomto jej manévri sa kolotoč otočí raz za už len dve sekundy.

Aká je hmotnosť jedného trpaslíka, ak Snehulienkina je 56 kg?

**35** Marcel má dutý valec s objemom 10 ml a s obsahmi podstáv 1 cm$^2$. Vnútro valca je vyplnené vzduchom pri atmosférickom tlaku a je rozdelené voľne pohyblivým diskom s hmotnosťou 100 g a so zanedbateľnou hrúbkou na dve rovnaké polovice, pričom vzduch okolo disku nevie nijako prenikať.

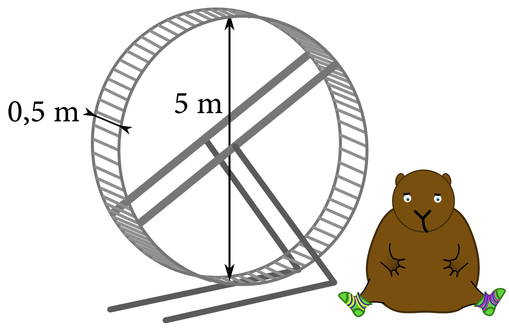
Pri Marcelovom nešetrnom narábaní s valcom sa mu podarilo odtrhnúť jednu z jeho podstáv. Aký je pomer periód kmitania disku vo valci pred a po odtrhnutí podstavy valca?

*Vzduch považujte za ideálny dvojatómový plyn. Marcel sa nachádza v obvyklej atmosfére.*

**36** Prerastený škrečok v ponožkách zbesilo behá vo vnútri svojho kolesa. Koleso takú záťaž nevydrží a vyosí sa. Náš škrečok, na jeho veľké šťastie, z neho stihne včas vyskočiť. Koleso však už má svoje dni spočítané.

Dopadne na zem a rozkotúľa sa na rýchlosť 1 m/s. Akou rýchlosťou behal škrečok vo vnútri kolesa pred jeho vyosením, ak bol vzhľadom na pevný rám kolesa v pokoji?

Koleso pozostáva z kovových tyčiek s dĺžkovou hustotou $\lambda$. Na obvode je dvojica obručí s priemerom 5 m spojených päťdesiatimi rovnomerne rozmiestnenými tyčkami dĺžky 0,5 m a k oske je prichytené pomocou dvojice tyčí kolmo pretínajúcich os kolesa s dĺžkou rovnou priemeru obručí.




**37** Satelit hmotnosti $m$ obieha okolo Slnka hmotnosti $M$ po kružnici s polomerom $R$. V jednom momente zapne motory, ktoré po celý čas pôsobia na raketu konštantnou silou $F$, ktorá je orientovaná vždy v radiálnom smere preč od Slnka. Aká musí táto sila byť, aby sa satelit pri svojom následnom pohybe vzdialil od Slnka na maximálnu vzdialenosť $2R$?

**38** Zlato je extrémne kujné a opakovaným roztĺkaním sa z neho dajú vyrobiť veľmi tenké lístky. Zároveň je chemicky odolné a veľmi dobre odráža svetlo. Kozmický dobyvateľ Patrik priletel k neznámej hviezde a chcel by pri nej nechať pozdrav budúcim civilizáciám v podobe listu z čistého zlata s hmotnosťou $m$ a hustotou $\rho$.

Akú plošnú hustotu bude mať jeho list, ak chce, aby ho tlak žiarenia hviezdy s teplotou $T$, hmotnosťou $M$ a polomerom $R$ udržal nehybne na mieste vo vzdialenosti $D \gg R$ od hviezdy?

*Uvažujte, že list odráža všetko svetlo a že lúče dopadajú kolmo na jeho povrch.*

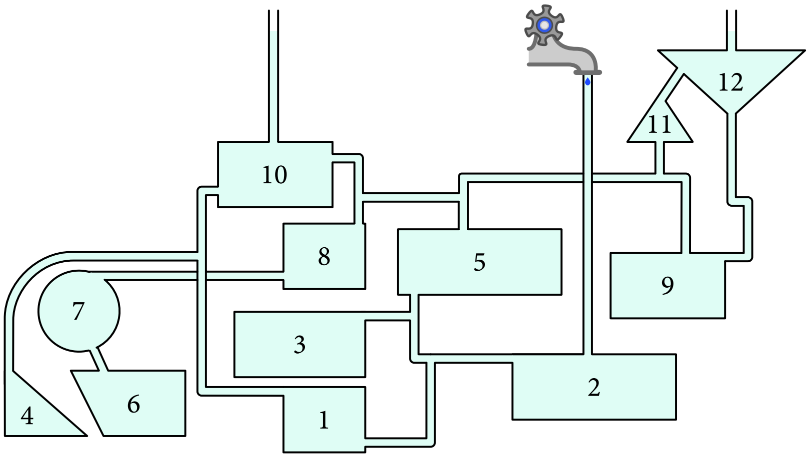
**39** Galaxia M31 v Andromédе je od nás vzdialená približne 2 600 000 svetelných rokov. Akou rýchlosťou by sme sa k nej museli vydať, aby nám cesta trvala rovnako veľa rokov lodného času?

**40** Napriek stereotypom sa aj v meste nájdu prajní ľudia ochotní pomôcť svojim susedom. V súlade so stereotypmi je ale mesto plné človeka ako je Dušan, ktorému sa nepáči, že suseda nad ním nekúri, ani keď je vonku −5 °C. Dušanov strop je zložený z betónu s hrúbkou 20 cm a tepelnou vodivosťou 20 W/(m · K), nad ním sú parkety s hrúbkou 1 cm a vodivosťou 2 W/(m · K). U Dušana je 25 °C a u susedy 10 °C. Ako sa zmení teplota u susedy, keď Dušan na svoj strop veľkosti 10 m$^2$ pribije 5 cm polystyrénu s vodivosťou 1 W/(m · K)?

*Dušan stále vykuruje na rovnakú teplotu. Susedin byt má okrem podlahy iba vonkajšie steny.*

# Vzorové riešenia

**1** Na obrázku nižšie je zobrazené, v akom poradí sa nádrže naplnia. Vplyvom tiaže voda steká dolu a naplní sa najnižšia nádrž číslo 1. Potom voda postupuje vyššie a vytláča vzduch. Hladina v nádržiach a aj v potrubiach rastie a naplnia sa nádrže 2 a 3. Následne sa zaplní trojuholníková nádrž 4 a ako ďalšia nádrž číslo 5. Pri ďalšom stúpaní vodnej hladiny voda naplní vetvu s nádržami 6, 7 a 8 a po nich je už na rade naša vytúžená nádrž s poradovým číslom 9.



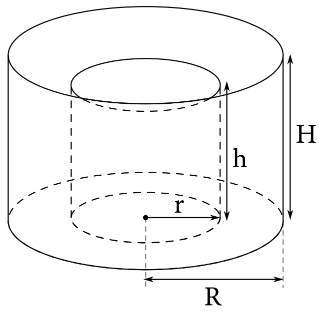

Obrázok 1.1: *Poradie plnenia nádob*

**2** Ak jeden vlas narastie o 15 cm/y, za jeden deň narastie o $\frac{15}{365}$ cm. Toto stačí vynásobiť celkovým počtom vlasov a premeniť na metre, čiže odpoveďou je $100000 \cdot \frac{15}{365}$ cm/d ≐ 41 m/d.

**3** Ak za hodinu prejdeme 200 míľ, za hodinu prejdeme $200 \cdot 1760 = 352\,000$ yardov. Za sekundu teda prejdeme $\frac{352000}{3600} = \frac{880}{9}$ yardov. Podľa komentátora to však je jedno futbalové ihrisko, čiže 120 yardov. Od tejto hodnoty sa komentátor líši o $120 - \frac{880}{9}$ yardov, teda $\frac{200}{9}$ yardov. Vo futbalových ihriskách to potom je $\frac{200}{9 \cdot 120}$ futbalových ihrísk za sekundu, čiže v základnom tvare $\frac{5}{27}$ futbalových ihrísk za sekundu.

**4** Hustotu spočítame ako $\rho = \frac{m}{V}$. Ak nádoba váži $m$, hmotnosť piškót $m_p$ (bez nádoby s hmotnosťou $m_0$) je $m_p = m - m_0$. Objem nádoby je rozdielom objemu valca a objemu vysunutého dna,

$$V = H\pi R^2 - h\pi r^2. \tag{4.1}$$




Obrázok 4.1: *Nádoba so zakreslenými rozmermi*

Hustota piškót je potom

$$\rho = \frac{m_p}{V} = \frac{m - m_0}{H\pi R^2 - h\pi r^2} \doteq 73\ \mathrm{kg/m^3}. \tag{4.2}$$

**5** Najskôr si premeníme Jurovu rýchlosť na m/s,

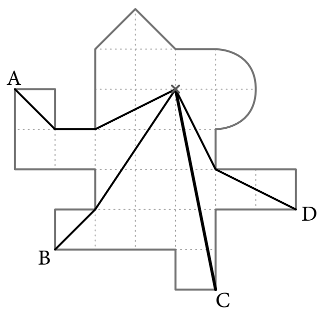
$$\frac{17\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{17\,000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{170}{36}\ \mathrm{m/s}. \tag{5.1}$$

Keď sa postaví na bežiaci pás, ktorý ide rýchlosťou $\frac{180}{36}$ m/s, vo výsledku pôjde rýchlosťou $\frac{10}{36}$ m/s.

Čas, za ktorý spadne z bežiaceho pásu, je čas, za ktorý prejde 1 m rýchlosťou $\frac{10}{36}$ m/s, teda

$$\frac{1\ \mathrm{m}}{\frac{10}{36}\ \mathrm{m/s}} = 3{,}6\ \mathrm{s}. \tag{5.2}$$

**6** Aby sme zistili, kedy bude celá kaluž horieť, stačí vypočítať, ako dlho bude trvať, kým sa plameň dostane do jej najvzdialenejšieho bodu. Toto miesto nutne leží na obvode kaluže a hneď nájdeme niekoľko vhodných kandidátov.




Obrázok 6.1: *Potenciálne najvzdialenejšie body*

Pomocou Pytagorovej vety vypočítame, že najvzdialenejší je kandidátsky bod $C$, ktorý je vzdialený $\sqrt{26}$ m od miesta zapálenia. Oheň sa šíri rýchlosťou 2 m/s, preto bude celá kaluž horieť v čase $\frac{\sqrt{26}\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m/s}} \doteq 2{,}55$ s.

**7** Ak si povieme, že bežec a zberacie auto vyštartujú súčasne, ale auto ide prvú polhodinu rýchlosťou 0 km/h, stačí nám určiť, za aký čas prejde auto 92,14 km. Za prvých deväť polhodín prejde

$$0\ \mathrm{km} + 7\ \mathrm{km} + 7{,}5\ \mathrm{km} + 8\ \mathrm{km} + 8{,}5\ \mathrm{km} + 9\ \mathrm{km} + 11\ \mathrm{km} + 13\ \mathrm{km} + 15\ \mathrm{km} = 79\ \mathrm{km}. \tag{7.1}$$

Po prejdení tejto vzdialenosti ide auto konštantnou rýchlosťou 34 km/h a zostáva mu prejsť 13,14 km. Celkový čas behu je teda

$$9 \cdot 0{,}5\ \mathrm{h} + \frac{13{,}14\ \mathrm{km}}{34\ \mathrm{km/h}} \doteq 4{,}89\ \mathrm{h}. \tag{7.2}$$

**8** Keďže čísla sú mocniny dvojky, musíme rozhodnúť o pravdivosti všetkých tvrdení.

***Bežné ističe v byte majú nominálne hodnoty okolo* 150 A.**

Výrok je **nepravdivý**. Štandardné hodnoty sú okolo 16 A. Pri napätí v zásuvke 230 V to predstavuje medzný výkon vyše 3500 W, teda asi štyri vysávače zapnuté naraz taký istič zhodia. Ističe na 150 A by poľahky zniesli 20 takých vysávačov a tento poznatok je v rozpore s bežnými domácimi skúsenosťami.

***Galvanický článok je zdroj jednosmerného napätia.***

Výrok je **pravdivý**. Galvanické články, napríklad bežná AA batéria, vyrábajú elektrickú energiu rozkladom elektrolytu, čo je proces, kde vieme jednoznačne určiť kladný a záporný pól. Ide teda o jednosmerné napätie.

***Elektrická sila môže pôsobiť aj medzi izolantmi.***

Výrok je **pravdivý**. Dobrým príkladom je demonštračný prístoj známy zo základoškolských hodín, elektroskop, kde sa odpudzujú dva nabité pásiky igelitu, teda izolantu. Teda aj izolant možno na povrchu nabiť. Už ste si niekedy treli nafúkaný balón o vlasy?

***Zahrievanie vodičov znižuje ich elektrický odpor.***

Výrok je **nepravdivý**. V tabuľkách možno poľahky nájsť, ako sa mení odpor s teplotou. Pri veľkej väčšine bežných materiálov používaných ako vodiče odpor s teplotou stúpa.

***Rozmer jednotky coulomb sú ampére za sekundu.***

Výrok je **nepravdivý**. Elektrický prúd, meraný v ampéroch, nám hovorí, koľko náboja (coulombov) tečie za jednotku času, preto je to presne naopak – ampére sú coulomby za sekundu.

***Prúdy menšie ako* 1 A *nie sú pre človeka nebezpečné.***

Výrok je **nepravdivý**. Už prúdy okolo 20 mA môžu byť pre človeka nebezpečné, najmä ak prechádzajú oblasťou srdca a vnútorných orgánov. Nejde tu však o prúd, ktorý prechádza obvodom predtým, než sa ho dotkneme. Odpor v samotnom obvode totiž môže byť malý, takže ním tečie veľký prúd aj pri malom napätí. Ak je odpor ľudského tela veľký, potečie cezeň len maličký prúd. Naopak, ak je napätie vysoké, ale zdroj nevie poskytnúť veľký prúd, opäť nám nič nehrozí. Typickým príkladom je napríklad iskra statickej elektriny, ktorá môže mať aj 10 000 V, ale prenesený náboj a teda aj prúd sú malé.[1]

[1] Obľúbená otázka znie, či zabíjajú ampére, alebo volty – viete, ako to je?

***Na paralelne radených rezistoroch môže byť napätie rôzne.***

Výrok je **nepravdivý**. Ak máme dva paralelne radené rezistory, ich svorky sú vodivo spojené. Vieme, že ak sú dve miesta spojené vodivo, napätie medzi nimi je nulové a teda napätia v oboch miestach sú rovnaké. Napätie medzi pravou a ľavou svorkou každého z rezistorov teda bude predstavovať rovnakú hodnotu. Príkladom rezistora zo života môže byť napríklad žiarovka. Tých často zapájame viac, s úmyslom, aby každá z nich bola zapojená na 230 V – a práve preto sú zapojené paralelne a i jednotlivé elektrické zásuvky sú zapojené paralelne; ak by sme napríklad dve žiarovky zapojili sériovo, na každej z nich by bolo polovičné napätie a teda by svietila s menším výkonom.

***Hoci v zásuvke je striedavé napätie, rýchlovarná kanvica by fungovala aj na jednosmerné.***

Výrok je **pravdivý**. Rýchlovarná kanvica je, okrem nádoby na vodu, len jedna odporová špirála spínaná bimetalickým teplotným spínačom – zjednodušene je tam teda len spínač a jeden rezistor, ktorý sa zahrieva a od neho sa zohrieva voda. No a rezistory sa predsa zahrievajú aj pri zaťažení jednosmerným prúdom, takže kanvica by fungovala aj pri zapojení na zdroj jednosmerného napätia.

Súčet čísel pravdivých výrokov je teda 2 + 4 + 128 = 134.

**9** Ak 5 l farby váži 7,5 kg, hustota farby je $\frac{7{,}5\ \mathrm{kg}}{5\ \mathrm{l}} = 1{,}5\ \mathrm{kg/l}$. Hustota vody je 1 kg/l, takže pomer hustôt farby a vody je 3 : 2. Preto, ak do dvoch rovnakých nádob nalejeme rovnakú hmotnosť farby a vody, ich objemy budú v pomere 2 : 3. Teraz prilejeme ešte jednu takú hmotnosť farby do nádoby s farbou, čím dostaneme požadovaný hmotnostný pomer 2 : 1. Tým sa pomer objemov zmení na 4 : 3, čo je kýžený výsledok.

**10** Pľyš si musí do džbánu napustiť z vodovodu hmotnosť vody $m$, do ktorej vhodí blok ľadu s hmotnosťou $m_{❄}$. Aby sa všetok ľad roztopil, musí prijať teplo $m_{❄} l_{❄}$, kde $l_{❄}$ je merné skupenské teplo topenia ľadu. Potom sa tento roztopený ľad, teda voda, zohreje o $\Delta T_{❄}$, čiže prijme teplo $m_{❄} c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{❄}$, kde $c_{\mathrm{H_2O}}$ je merná tepelná kapacita vody. Všetko toto teplo prijme od vody z vodovodu, ktorá sa ochladí o $\Delta T_{\mathrm{H_2O}}$, čiže ľadu dokopy odovzdá teplo $m c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\mathrm{H_2O}}$.

Prijaté a odovzdané teplo sa rovnajú, takže

$$m_{❄} l_{❄} + m_{❄} c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{❄} = m c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\mathrm{H_2O}}. \tag{10.1}$$

Odtiaľ vyjadríme hmotnosť vody z vodovodu

$$m = \frac{m_{❄} l_{❄} + m_{❄} c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{❄}}{c_{\mathrm{H_2O}}\, \Delta T_{\mathrm{H_2O}}}. \tag{10.2}$$

S hodnotami zo zadania dostávame hodnotu $m \doteq 6{,}68\ \mathrm{kg}$. Okrem vody z vodovodu však má Pľyš v džbáne aj 1 kg vody z ľadu, teda dokopy 7,68 kg vody, čo je 7,68 l.

**11** Označme si čas Sárinho zúfalého výkriku $t_0$. Hlavnou myšlienkou riešenia úlohy je, že zvuk s konštantnou rýchlosťou dobehne rovnomerne zrýchľujúceho Maťa s náskokom $t_0$. V čase $t$, keď zvuk dobehne

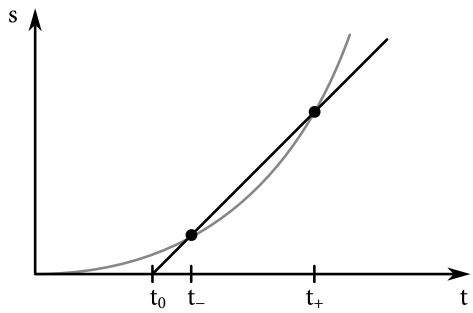
Maťa, dráha prejdená Maťom bude rovná dráhe prejdenej rovnomerne sa šíriacou zvukovou vlnou, čiže

$$\frac{1}{2}gt^2 = c(t - t_0)$$
$$\frac{1}{2}gt^2 - ct + ct_0 = 0. \tag{11.1}$$

Toto je kvadratická rovnica s dvomi riešeniami

$$t_\pm = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2gct_0}}{g}. \tag{11.2}$$

Numerické hodnoty hľadaného času sú $t_+ \approx 66{,}79$ s a $t_- \approx 3{,}14$ s. Fyzikálne dáva zmysel riešenie $t = t_-$, lebo to je moment, kedy zvuk predbieha Maťa – riešenie $t_+$ opisuje situáciu, kedy by Maťo vďaka neustálemu zrýchľovaniu (zanedbávame odpor vzduchu) zvuk opäť predbehol.




Obrázok 11.1: *Prejdené dráhy Maťka a zvukovej vlny Sárinho výkriku*

Keď už poznáme čas $t$, môžeme ho dosadiť do rovnice pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu,

$$s = \frac{1}{2}gt_-^2 \approx 48{,}4 \text{ m}. \tag{11.3}$$

Maťo vyskočil z výšky $h = 200$ m, takže v čase $t$, keď začuje Sárin výkrik, bude už len vo výške $h - s \approx 151{,}6$ m.

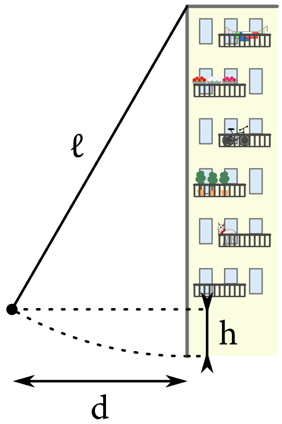
**12** Označme si hodnotu odporu rezistora $R$. Ak máme sériové zapojenie, odpor rezistorov sčítavame, čiže celkový odpor bude $3R$. Pri paralelnom zapojení sa nám sčítavajú prevrátené hodnoty rezistorov, takže odpor je rovný $R/3$. Tieto hodnoty sú rozdielne o 8 Ω, takže vieme zostaviť rovnicu

$$8\ \Omega = 3R - \frac{R}{3}. \tag{12.1}$$

Riešením tejto rovnice je $R = 3\ \Omega$. Schéma na obrázku v zadaní úlohy je paralelným zapojením dvoch vetiev s odpormi $R$ a $2R$, takže jej odpor môžeme vypočítať ako

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \Rightarrow \quad R' = 2\ \Omega. \tag{12.2}$$

**13** V oboch prípadoch si Fero odrazom dodá rovnakú kinetickú energiu. Tá bude v najvyššom bode celá premenená na potenciálnu, znova rovnakú, a teda rovnaké bude aj prevýšenie najvyššieho bodu pri oboch skokoch. To vieme s pomocou obrázku ľahko určiť ako $h = \ell - \sqrt{\ell^2 - d^2} = 1{,}2\ \mathrm{m}$.



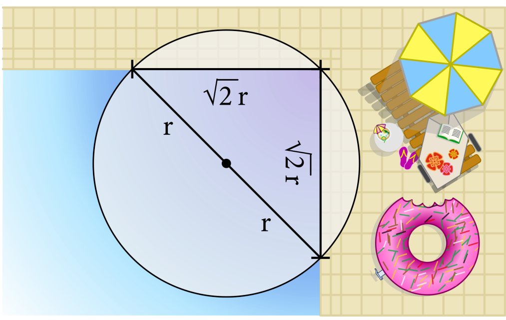

Obrázok 13.1: *Geometria Ferovho odrazu od budovy v najvyššom bode*

**14** Keď sa koleso točí, ventil sa točí spolu s ním. Vo vzťažnej sústave s počiatkom v strede kolesa a točiacej sa tak, aby v nej ventil stál, naň pôsobí fiktívna sila $F = \frac{mv^2}{r}$ v smere od počiatku, známa aj ako odstredivá. Keďže sa ale ventil v tejto neinerciálnej vzťažnej sústave nehýbe, koleso naň pôsobí rovnakou silou naspäť. Keď sa auto rozbieha, z pohľadu časti kolesa, ktoré drží ventil, sa zdá, že ventil mení zdanlivú hmotnosť, no to sa mení len rýchlosť otáčania. Zdanlivú hmotnosť teda vypočítame ako

$$m_z = \frac{F}{g} = \frac{mv^2}{rg}.$$

Po premenení rýchlosti z km/h na m/s a dosadení dostávame výsledok $m_z \approx 98{,}3\ \mathrm{kg}$.

**15** Treba si uvedomiť, že ak má Jonka k dispozícii iba jeden kryt, najväčšiu plochu bazéna zakryje práve vtedy, keď ho položí do rohu, a to práve tak, aby stred kruhu vyčnieval čo najviac nad vodu. Táto situácia je znázornená na obrázku 15.1.



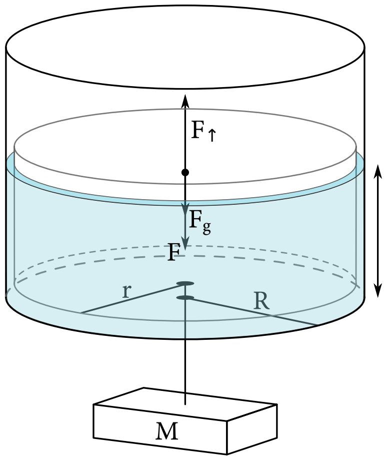

Obrázok 15.1: *Kryt v optimálnej polohe*

Ťažisko krytu musí ležať na spojnici bodov, ktoré sú priesečníkom obvodu krytu a okraja bazéna. V tejto situácii zároveň roh bazénu leží na obvode krytu.[2] Ak by Jonka kryt ešte o kúsok posunula, už by sa prevrhol do bazéna. Stačí nám teda vypočítať obsah plochy, ktorá je v tomto prípade krytom zakrytá. Táto plocha je zložená z polkruhu a pravouhlého trojuholníka. Obsah polkruhu je jednoducho $\frac{1}{2}\pi r^2$.

O pravouhlom trojuholníku vieme, že jeho prepona má dĺžku $2r$ a jeho zvyšné dve strany majú dĺžku $\sqrt{2}r$, lebo platí Pytagorova veta $\sqrt{\left(\sqrt{2}r\right)^2 + \left(\sqrt{2}r\right)^2} = 2r$. Obsah tohto pravouhlého trojuholníka potom je $\frac{1}{2}(\sqrt{2}r)^2 = r^2$. Celková plocha vody zakrytej krytom teda je

$$\frac{1}{2}\pi r^2 + r^2. \tag{15.1}$$

**16** Nakreslime a napíšme si všetky sily, ktoré pôsobia na osi valca.




Obrázok 16.1: *Marcelov žeriav so zakreslenými pôsobiacimi silami*

Dostaneme

$$F_g + F = F_\uparrow, \tag{16.1}$$

kde $F_g$ je gravitačná sila, $F$ je sila od kontajnera a $F_\uparrow$ je vztlaková sila vody. Po vyjadrení jednotlivých síl dostávame

$$mg + Mg = \rho_{\mathrm{H_2O}} g h S_1, \tag{16.2}$$

kde $h$ je výška ponorenej časti valca a $S_1$ je obsah podstavy menšieho valca. Aby sme našli objem, potrebujeme zistiť $h$,

$$h = \frac{m + M}{\rho_{\mathrm{H_2O}} S_1}. \tag{16.3}$$

Vieme, že hmotnosť menšieho valca je zanedbateľná oproti kontajneru, takže

$$h \approx \frac{M}{\rho_{\mathrm{H_2O}} S_1}. \tag{16.4}$$

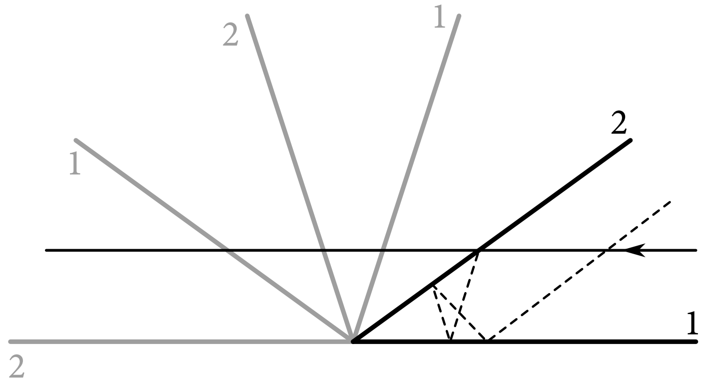
[2] lebo Tálesova veta

Objem vody bude nakoniec iba objem medzivalčia, čiže

$$V = h(S_2 - S_1) = \frac{M}{\rho_{H_2O} r^2}\left(R^2 - r^2\right) \doteq 203\,\mathrm{l}. \tag{16.5}$$

**17** Namiesto počítania komplikovanej geometrie si uvedomíme, že nám priestor medzi zrkadlami stačí niekoľkokrát odzrkadliť cez jedno zo zrkadiel. Potom totiž môžeme uvažovať, že lúč svetla putuje po rovnej trajektórii ako na obrázku.

Na konci musí byť lúč svetla rovnobežný s druhým zrkadlom. To znamená, že uhol 180° musí byť uhlami $\alpha$ rozdelený na celý počet častí. Zdalo by sa teda, že prípustné hodnoty $\alpha$ budú hodnoty $\frac{180^\circ}{n}$, kde $n$ sú prirodzené čísla. Avšak na to, aby bol lúč na konci rovnobežný s druhým zrkadlom, je potrebné, aby zrkadlo, ktoré sa zobrazí na uhol 180°, bolo práve to druhé zrkadlo.




Obrázok 17.1: *Riešenie s práve štyrmi odrazmi*

Rýchlo si uvedomíme, že táto podmienka nám hovorí, že číslo $n$ musí byť nepárne. Prípustné hodnoty uhla $\alpha$ sú teda

$$\alpha = \frac{180^\circ}{2n+1}, \tag{17.1}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

**18** Vlak sa rozbehne na začiatku na rýchlosť $v$, a teda má určitú kinetickú energiu. Keďže trenie ani odpor vzduchu nehrajú rolu, mechanická energia vlaku sa zachováva. Preto mu stačí mať takú rýchlosť, aby jeho ťažisko tesne prešlo najvyšším bodom svojej trajektórie. Trajektória ťažiska sa však líši od výškového profilu trate. Na prvý pohľad vieme určiť, že do úvahy prichádzajú dve miesta: vrchol vo výške 140 m a rovinka vo výške 135 m. Do väčšej výšky sa už očividne nemá ako ani kde dostať.

Ak spočítame veľkosti sklonov, vidíme, že všetky sú pomerne malé, najprudšie klesanie je iba $\frac{25}{700}$. Pre malé uhly môžeme rozdiel medzi skutočnou dĺžkou vlaku a jej priemetom do vodorovnej roviny zanedbať, čo nám trochu zjednoduší výpočet. Rovnako môžeme ignorovať výšku ťažiska vlaku nad koľajnicami, keďže tá bude vždy rovnaká a výsledok od jej hodnoty nezávisí.

Pozrime sa najprv na najvyšší bod trate. Sklony na oboch stranách sú rovnako veľké, 25 ‰, takže ťažisko vlaku bude najvyššie vtedy, keď bude vrcholom práve prechádzať jeho stred. Ak je dĺžková hustota vlaku konštantná, ťažiská prednej aj zadnej polovice vlaku sú rovnako vysoko, a teda aj ťažisko celého vlaku je v tej istej výške. Stačí nám teda spočítať výšku ťažiska jednej z polovíc, čo bude

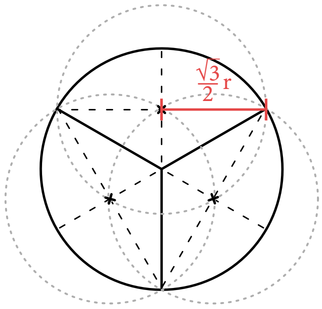
$$h_\wedge = \frac{140\text{ m} + (140\text{ m} - 0{,}025 \cdot 500\text{ m})}{2} = 133{,}75\text{ m}. \tag{18.1}$$

Toto je však očividne menej, než je výška rovinky vpravo, na ktorú sa vlak vojde celý. Výška jeho ťažiska na nej bude teda triviálne $h_- = 135$ m.

Ostáva nám už len vyjadriť rozdiel výšok ťažiska na začiatku a v maximálnej výške, čo bude

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_- \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_-} \approx \sqrt{2 \cdot 10\text{ m/s}^2 \cdot 15\text{ m}} = \sqrt{300}\text{ m/s} \doteq 17{,}3\text{ m/s}. \tag{18.2}$$

**19** Označme rýchlosť šírenia sa plameňa $v$ a čas, za ktorý sa vznieti všetka ohnivá voda, $t$. Našou úlohou je pokryť kaluž troma kruhmi s polomerom $vt$ a kruhy umiestniť tak, aby sme minimalizovali potrebné $t$. Skúsme rozdeliť kaluž na tri časti, pričom každú z nich zapáli rôzna Sebastiánova strela. Chceme, aby tieto tri časti boli čo najmenšie v zmysle toho, aký polomer má kružnica, ktorá ich kompletne prekrýva. Symetria kaluže nám umožňuje rozdeliť ju na tri rovnako veľké kruhové výseky, a zamyslenie sa nás môže presvedčiť, že kompaktnejšie dielce zvoliť nemožno. Miesta najvhodnejšieho dopadu striel možno nájsť ako stred kružníc prekrývajúcich jednotlivé výseky.




Obrázok 19.1: *Anatómia Sebastiánovej zápalnej činnosti.*

Krátke cvičenie z geometrie nám odhalí, že najdlhšia vzdialenosť ktorú musí plameň prejsť má dĺžku $\frac{\sqrt{3}}{2}r$, kde $r$ je polomer kaluže. Celá kaluž bude teda horieť v čase $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r}{v} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ s $\doteq 2{,}17$ s.

**20** Keďže hrúbka pásikov je tisíckrát menšia ako ich dĺžka, zanedbáme, že pásiky zmenou teploty menia hrúbku, a mení sa len ich dĺžka. Nech má po skruhovatení vnútorný pásik polomer $r_1$ a vonkajší $r_2$. Ak ich hrúbku označíme $h$, pre polomery platí $r_2 = r_1 + h$. Pásik s pôvodnou dĺžkou $l_0$ a teplotnou rozťažnosťou $\alpha$ sa po zmene teploty o $\Delta T$ predĺži o $l_0\alpha\,\Delta T$, čiže jeho nová celková dĺžka bude

$$l_0 + l_0\alpha\,\Delta T = l_0(1 + \alpha\,\Delta T). \tag{20.1}$$

Ak má tvar kružnice s polomerom $r$, táto dĺžka je rovná $2\pi r$. Pre dva Danove novonadobudnuté pásiky to je

$$\begin{aligned} l_0(1 + \alpha_1\,\Delta T) &= 2\pi r_1, \\ l_0(1 + \alpha_2\,\Delta T) &= 2\pi r_1 + 2\pi h, \end{aligned} \tag{20.2}$$

kde sme využili, že $r_2 = r_1 + h$. Od prvej rovnice odčítame druhú a vyjadríme

$$\Delta T = \frac{2\pi h}{l_0(\alpha_2 - \alpha_1)}. \tag{20.3}$$

To znamená, že pásiky musíme zohriať alebo ochladiť o $\Delta T$. Pre hodnoty zo zadania to je $\Delta T \doteq 314$ K. Keďže boli zlisované pri teplote 0 °C ≐ 273 K, musíme ich zohriať o $\Delta T$, keďže ani taký frajer ako Dano ich nevie ochladiť pod absolútnu nulu. Zlisované pásiky preto nadobudnú tvar kruhového prstenca pri teplote 314 °C.

**21** Pri riešení tejto úlohy sa nevyhneme tipovaniu. To ale neznamená, že nemôžeme tipovať inteligentne. Spolu existuje šesť možných zapojení. Tipneme si, že najmenší a najväčší odpor má čisto paralelné a čisto sériové zapojenie. Tie majú postupne odpory

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + 2R_2} \qquad \text{a} \qquad 2R_1 + R_2, \tag{21.1}$$

kde $R_1$ je odpor dvoch rovnakých rezistorov a $R_2$ je odpor tretieho.

Ak by sme ale uvážili, že najmenší a najväčší odpor je 50 Ω a 245 Ω, dostaneme sústavu dvoch rovníc, ktorá nemá riešenie. To znamená, že hodnota, ktorá nám chýba, musí byť práve tá najmenšia alebo tá najväčšia. Potrebujeme teda nejako odhadnúť, ktoré zapojenie zodpovedá druhému najmenšiemu, resp. druhému najväčšiemu odporu.

Ako prvé si môžeme všimnúť, že paralelné zapojenie komponentov má vždy menší odpor, než jednotlivé komponenty, a sériové naopak vyšší. V prípade dvoch paralelných vetiev je výsledný odpor vždy nižší než odpory v jednotlivých vetvách. V prípade sériového zapojenia je výsledný odpor vyšší než jednotlivé odpory zapojené v sérii. To nám dovoľuje predpokladať, že menšie odpory zodpovedajú paralelným zapojeniam a väčšie odpory sériovým zapojeniam, čím sa znižuje počet možností, ktoré potrebujeme preskúmať.

Ďalej si všimnime, že keďže paralelné zapojenie zmenšuje odpor, neoplatí sa nám zapájať doň malé odpory. Ak teda dva rovnaké rezistory majú menší odpor než ten tretí, dá sa predpokladať, že paralelné zapojenie dvoch rovnakých rezistorov a k nim do série tretieho bude mať druhý najväčší odpor.

Okrem toho si môžeme uvedomiť, že ak jedna vetva paralelného zapojenia má výrazne väčší odpor než tá druhá, prúd tečie zväčša cez vetvu s menším odporom, ktorá kladie len malý odpor. V limitnom prípade, keď ide odpor tejto vetvy do nuly, prúd môže cez zapojenie tiecť prakticky bez odporu a druhou vetvou prúd vtedy netečie. Na základe toho možno usudzovať, že ak dva rovnaké rezistory majú väčší odpor než ten tretí, sériové zapojenie dvojice rovnakých rezistorov v jednej vetve a k nim paralelne menší odpor bude mať druhý najmenší odpor.

Tým sme zredukovali počet prípadov, ktoré treba preskúmať, na štyri:

- Ak chýba najmenší odpor, najväčší odpor zodpovedá sériovému zapojeniu všetkých troch rezistorov. Vtedy chýbajúci odpor zodpovedá paralelnému zapojeniu všetkých troch rezistorov.
  - Ak majú rovnaké rezistory menší odpor než tretí, paralelné zapojenie dvoch rovnakých rezistorov a k nim tretieho do série zodpovedá druhému najväčšiemu odporu.

  - Ak majú rovnaké rezistory väčší odpor než tretí, sériové zapojenie dvoch rovnakých rezistorov v jednej vetve a k nim paralelne tretieho zodpovedá najmenšiemu známemu odporu.[3]

- Ak chýba najväčší odpor, najmenší odpor zodpovedá paralelnému zapojeniu všetkých troch rezistorov. Vtedy chýbajúci odpor zodpovedá sériovému zapojeniu všetkých troch rezistorov.
  - Ak majú rovnaké rezistory menší odpor než tretí, paralelné zapojenie dvoch rovnakých rezistorov a k nim tretieho do série zodpovedá najväčšiemu známemu odporu.[4]
  - Ak majú rovnaké rezistory väčší odpor než tretí, sériové zapojenie dvoch rovnakých rezistorov v jednej vetve a k nim paralelne tretieho zodpovedá druhému najmenšiemu odporu.

Poďme preskúmať tieto možnosti. Môžeme si pritom ešte všimnúť, že najväčší odpor na zozname je výrazne väčší než ďalšie dva. Na základe toho možno usudzovať, že bude zodpovedať sériovému zapojeniu všetkých troch rezistorov a že ďalšie dva v poradí budú prislúchať zapojeniam jedného rezistora sériovo pripojeného k dvojici paralelných rezistorov. Preto začneme prvými dvoma možnosťami.

Odpor sériového zapojenia troch odporov už poznáme. Odpor paralelného zapojenia dvojice rezistorov s rovnakým odporom $R_1$ a k nim do série odporu $R_2$ má odpor $\frac{R_1}{2} + R_2$. Vyriešením sústavy dvoch rovníc dostaneme odpory $R_1 = 70\ \Omega$ a $R_2 = 105\ \Omega$. Ľahko overíme, že zvyšné odpory zo zadania zodpovedajú niektorému zo zapojení rezistorov s takýmito odpormi. Ďalšie možnosti skúmať nemusíme – riešenie sme už našli.

Chýbajúci odpor zodpovedá paralelnému zapojeniu všetkých troch rezistorov, teda 26,25 Ω.

**22** Akú stratégiu zvoliť pri polepovaní okna? Je jasné, že fóliou budeme vedieť pokryť celú plochu okna dvakrát a ešte nám nejaké odrezky zostanú. Ako s nimi naložiť, aby to bolo čo najviac efektívne? Ak máme kúsok fólie, treba ho nalepiť tam, kde je doteraz najmenej vrstiev – ak odtieni konštantnú *pomernú časť* svetla, oplatí sa ho dať tam, kde je svetla *absolútne* viac.

Plocha fólie je $1{,}5\ \mathrm{m}^2$, plocha okna zas $S = 0{,}64\ \mathrm{m}^2$. Na dvojnásobné prekrytie teda spotrebujeme $1{,}28\ \mathrm{m}^2$ fólie a $0{,}22\ \mathrm{m}^2 =: S_3$ nám zvýši na tretiu vrstvu, takže práve dvakrát bude prekryté $S_2 = S - S_3 = 0{,}42\ \mathrm{m}^2$.

Výkon prežiarený viacerými vrstvami vypočítame jednoducho – každá vrstva prepustí 80 % svetla, ktoré na ňu dopadne, oknom s dvoma vrstvami fólie preto prejde $\alpha_2 = 80\ \% \cdot 80\ \% = 64\ \%$ žiarenia, a cez tri vrstvy $\alpha_3 = 80\ \% \cdot 64\ \% = 51{,}2\ \%$ žiarenia.

Celkový prechádzajúci výkon žiarenia bude súčtom oboch plôch násobeným zodpovedajúcimi výkonmi, čiže

$$P' = (\alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3)P = \left(0{,}64 \cdot 0{,}42\ \mathrm{m}^2 + 0{,}512 \cdot 0{,}22\ \mathrm{m}^2\right) \cdot 1366\ \mathrm{W/m}^2 \doteq 521\ \mathrm{W}. \tag{22.1}$$

**23** Počas skoku platí zákon zachovania mechanickej energie. Nech má Lucka v momente odlepenia sa od podložky nulovú potenciálnu energiu a nejakú kinetickú energiu. V najvyššom bode skoku vo výške $h$ sa na moment zastaví, teda má len potenciálnu energiu $mgh$, kde $m$ je Luckina hmotnosť. To znamená, že jej kinetická energia v momente odlepenia sa od podložky je rovná $mgh$.

Ak chce Lucka skokom opustiť planétku, musí odletieť až do nekonečna. Tu už nemôžeme použiť vzťah pre potenciálnu energiu v homogénnom gravitačnom poli ako pri skoku na Zemi, ale musíme poctivo počítať

[3] Odpor paralelného zapojenia všetkých troch rezistorov, ktoré má určite menší odpor, je neznámy.
[4] Odpor sériového zapojenia všetkých troch rezistorov, ktoré má určite väčší odpor, je neznámy.

s radiálnym poľom planétky. V hraničnom prípade, keď má planétka najväčšiu možnú hmotnosť, aby Lucka vedela odskočiť, príde Lucka do nekonečna a po nekonečne dlhom čase sa tam zastaví. Luckina potenciálna energia na povrchu planétky je $-\frac{GMm}{R}$, kde $M$ je hmotnosť planétky a $R$ je jej polomer, a pri výskoku získa kinetickú energiu rovnú $mgh$. V nekonečne Lucka stojí a potenciálnu energiu má definitoricky nulovú. Kvôli zachovaniu energie sa súčet kinetickej a potenciálnej energie v momente odlepenia sa od planétky rovná ich súčtu v nekonečne, teda

$$mgh - \frac{GMm}{R} = 0 + 0. \tag{23.1}$$

Odtiaľ vyjadríme hmotnosť planétky v hraničnom prípade,

$$M = \frac{Rgh}{G}, \tag{23.2}$$

a následne hustotu

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3gh}{4\pi R^2 G} \approx 5618\ \mathrm{kg/m^3}.$$

**24** Hmotnosť Slnka označme $M_\odot$ a hmotnosť Zeme $M_\oplus$. Ich vzájomná vzdialenosť je $R$. Oba tieto objekty obiehajú okolo spoločného ťažiska nejakou uhlovou rýchlosťou. Najskôr ale budeme musieť nájsť polohu ich spoločného ťažiska. Označme vzdialenosť medzi Slnkom a ťažiskom $r$. Potom platí

$$M_\odot r = M_\oplus (R - r) \tag{24.1}$$

a odtiaľ

$$r = \frac{M_\oplus}{M_\odot + M_\oplus} R. \tag{24.2}$$

Slnko obieha okolo ťažiska po kružnici s polomerom $r$ a rýchlosťou $v$. Sila, ktorá toto spôsobuje, je gravitačná, a po tomto uvedomení si dostávame rovnicu

$$M_\odot \frac{v^2}{r} = G\frac{M_\odot M_\oplus}{R^2}, \tag{24.3}$$

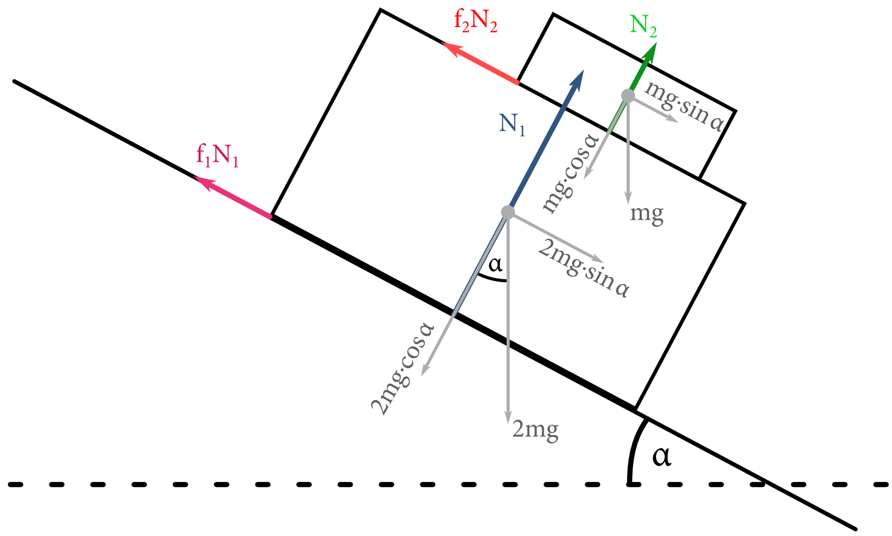
do ktorej už len dosadíme polomer $r$ z rovnice 24.2 a vyjadríme $v$. Dostaneme

$$v = \sqrt{G\frac{M_\oplus^2}{R(M_\odot + M_\oplus)}}, \tag{24.4}$$

čo po dosadení číselných konštánt dáva $v \approx 9\ \mathrm{cm/s}$. Keď sa Slnko pohybuje kolmo na smer k mimozemskému pozorovateľovi, je jeho radiálna rýchlosť nulová. Keď sa pohybuje v smere k alebo od pozorovateľa, je jeho radiálna rýchlosť $\pm v$. Preto práve $v$ je amplitúda radiálnej rýchlosti Slnka.

**25** Pri zakreslení síl, ktoré pôsobia na tanier a rezeň, narazíme na hlavnú netriviálnu myšlienku úlohy. Aké je relatívne zrýchlenie taniera a rezňa? V skutočnosti má rezeň väčšie alebo rovné zrýchlenie ako tanier, dôvod si teraz rozoberme. Pozrime sa na situáciu, keď $f_1$, teda koeficient šmykového trenia medzi tanierom a stolom, je nulový. V tom prípade sa tanier a rezeň budú hýbať so zrýchlením $g \sin\alpha$. Teda ich relatívne zrýchlenie bude nulové a rezeň sa vzhľadom k tanieru nebude hýbať.

Túto situáciu si položme do horizontálneho smeru. Nič sa nebude hýbať. Keď pridáme silu, ktorá nám bude reprezentovať treciu šmykovú silu medzi tanierom a stolom ($F_t$), čiže silu, ktorá pôsobí iba na tanier, ľahko si všimneme, že rezeň bude chcieť zotrvať vzhľadom ku stolu na mieste. Bude naň teda pôsobiť trecia sila od taniera ($T$), ktorá mu bude brániť v zotrvaní. $T$ nebude spôsobovať väčšie zrýchlenie, ako spôsobuje $F_t$. Vidíme, že rezeň pôjde rýchlejšie dole ako tanier.




Obrázok 25.1: *Náčrt síl pôsobiacich na tanier a rezeň.*

Z obrázka vidíme všetky sily a môžeme ísť písať pohybové rovnice pre tanier,

$$2ma = 2mg\sin\alpha - (2m + m)g f_1 \cos\alpha + mg f_2 \cos\alpha, \tag{25.1}$$

kde $f_2$ je koeficient šmykového trenia medzi tanierom a rezňom.

Prvý člen na pravej strane rovnice 25.1 predstavuje zložku tiažovej sily, ktorá posúva tanier smerom dole zo stola, druhý predstavuje šmykovú treciu silu medzi tanierom a stolom (pre hmotnosť $3m$, lebo zhora na tanier tlačí aj rezeň) a tretí reakčnú silu na šmykovú treciu silu medzi rezňom a tanierom.

Po dosadení hodnôt a vyjadrení $a$ dostávame výsledné zrýchlenie taniera $a \approx 1{,}08\ \mathrm{m/s^2}$.

**26** Celkovú dĺžku výslednej sústavy pružín si označme $\ell$. Potom sila, ktorou je naťahovaná prvá z pružín je jednoducho $k\ell$ a sila, ktorou je druhá z pružín stláčaná, je $K(L-\ell)$. Tieto dve sily nám stačí dať do rovnosti a dostaneme

$$k\ell = K(L-\ell) \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{KL}{k+K}. \tag{26.1}$$

Teraz si predstavme, že túto sústavu pružín natiahneme o dĺžku $\Delta\ell$, takže jej výsledná dĺžka bude $\ell + \Delta\ell$. Aká bude výsledná sila? Prvá z pružín bude natiahnutá silou $k(\ell+\Delta\ell)$ a druhá bude stlačená silou $K(L-\ell-\Delta\ell)$. Tieto dve sily pôsobia opačnými smermi, teda ich veľkosti musíme odčítať. Výsledná sila teda je

$$F = k(\ell+\Delta\ell) - K(L-\ell-\Delta\ell). \tag{26.2}$$

Napokon využijeme rovnicu 26.1, čím sa nám rovnica zjednoduší na tvar

$$F = (K + k)\,\Delta\ell \tag{26.3}$$

a z toho už vidíme, že výsledná tuhosť je $K + k$.

**27** Podľa zadania máme zjavne frekvenciu vyjadriť len pomocou zadaných veličín. Predpokladajme teda, že struna kmitá s frekvenciou

$$f \sim F^a M^b L^c \text{ pre nejaké } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{27.1}$$

Znamienko rovnosti sme nenapísali práve preto, že nás teraz zaujímajú len závislosti od fyzikálnych veličín, a nie to, či sa vo vzťahu nachádza aj násobenie nejakým číslom. To rozmerovou analýzou nemáme ako určiť. Hodnoty $a$, $b$, $c$ zvolíme tak, aby náš súčin veličín vo vzťahu 27.1 mal fyzikálnu jednotku frekvencie, čiže $\mathrm{s}^{-1}$. Okrem toho, newton je v základných jednotkách vyjadrený ako $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Pravú stranu vzťahu 27.1 prepíšeme do fyzikálnych jednotiek ako

$$\left(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)^a \mathrm{kg}^b \mathrm{m}^c = \mathrm{kg}^{a+b}\mathrm{m}^{a+c}\mathrm{s}^{-2a}, \tag{27.2}$$

čo má byť to isté, ako jednotka frekvencie, čiže

$$\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{kg}^{a+b}\mathrm{m}^{a+c}\mathrm{s}^{-2a}. \tag{27.3}$$

Aby táto rovnosť platila, musia sa exponenty pri jednotlivých fyzikálnych jednotkách rovnať. Preto pri pohľade na sekundy vidíme, že $a = \frac{1}{2}$, odkiaľ je hneď jasné, že $b = -\frac{1}{2}$ a $c = -\frac{1}{2}$. Preto gitarová struna kmitá s frekvenciou $f \sim \sqrt{\frac{F}{ML}}$.

Pre zaujímavosť, ak by sme to zrátali poriadne, dostali by sme, že základná frekvencia kmitania gitarovej struny je $f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{ML}}$.

**28** Zo zadania vieme, že

$$N(m > M) = 10^{a-bM}, \tag{28.1}$$

takže pre počet zemetrasení v intervale 4,0 – 4,9 zrejme platí

$$\begin{aligned} N(3{,}95 \le m < 4{,}95) &= N(m \ge 3{,}95) - N(m \ge 4{,}95) \\ &= 10^{a-3{,}95b} - 10^{a-4{,}95b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-4{,}95b}\left(10^b - 1\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-4{,}95}(\beta - 1), \end{aligned} \tag{28.2}$$

kde sme zaviedli označenie $10^a \equiv \alpha$ a $10^b \equiv \beta$. Analogicky pre interval 5,0 – 5,9 máme

$$\begin{aligned} N(4{,}95 \le m < 5{,}95) &= N(m \ge 4{,}95) - N(m \ge 5{,}95) \\ &= 10^{a-4{,}95b} - 10^{a-5{,}95b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-5{,}95b}\left(10^b - 1\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-5{,}95}(\beta - 1). \end{aligned} \tag{28.3}$$

Pre hľadaný počet zemetrasení s magnitúdom 5,0 platí

$$\begin{aligned} N(4{,}95 \le m < 5{,}05) &= N(m \ge 4{,}95) - N(m \ge 5{,}05) \\ &= 10^{a-4{,}95b} - 10^{a-5{,}05b} \\ &= 10^a \cdot 10^{-4{,}95b}\left(1 - 10^{-0{,}1b}\right) \\ &= \alpha \cdot \beta^{-4{,}95}\left(1 - \beta^{-0{,}1}\right). \end{aligned} \tag{28.4}$$

Z podielu rovníc 28.2 a 28.3 dostávame

$$\beta = \frac{N(3{,}95 \le m < 4{,}95)}{N(4{,}95 \le m < 5{,}95)}. \tag{28.5}$$

Z rovnice 28.2 navyše vyplýva, že

$$\alpha \cdot \beta^{-4{,}95} = \frac{N(3{,}95 \le m < 4{,}95)}{\beta - 1}. \tag{28.6}$$

Pre hľadaný počet zemetrasení preto dostávame

$$N(4{,}95 \le m < 5{,}05) = N(3{,}95 \le m < 4{,}95) \cdot \frac{1 - \beta^{-0{,}1}}{\beta - 1}, \tag{28.7}$$

čo po vyčíslení pre hodnoty zo zadania dáva $N(4{,}95 \le m < 5{,}05) \approx 170$.

**29** Kotolňa svojím výkonom zohrieva Matfyz, čiže chceme zistiť, koľko joulov prejde za sekundu z mysterióznej kvapaliny v radiátoroch do vzduchu vnútri budovy. Ak kvapalina zmení teplotu o $\Delta T$, jej objem sa zmení o $V_0 \beta \Delta T$, kde $V_0$ je jej pôvodný objem a $\beta$ je súčiniteľ objemovej teplotnej rozťažnosti mysterióznej kvapaliny.[5]

Zmena teploty je teda

$$\Delta T = \frac{\Delta V}{V_0 \beta}. \tag{29.1}$$

[5] V skutočnosti je závislosť exponenciálna, ale keďže táto hodnota je oproti zmene teploty malá, môžeme ju linearizovať.

Teplo, ktoré kvapalina ochladením odovzdá, je jednoducho

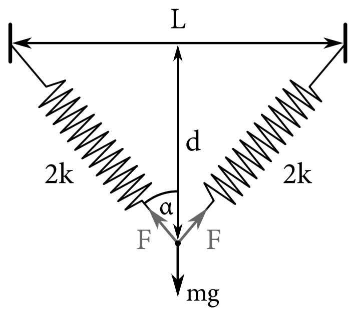
$$Q = mc\,\Delta T, \tag{29.2}$$

kde $m$ je hmotnosť mysterióznej kvapaliny a $c$ je merná tepelná kapacita mysterióznej kvapaliny. Zhodou okolností, alebo skôr vďaka milosrdnosti autora úlohy, má ochladená kvapalina rovnakú hustotu ako voda, čiže vytekajúcich 9,9 l za sekundu má hmotnosť $m = 9{,}9$ kg. Po dosadení do rovnice 29.2 zistíme, že $Q \approx 2{,}2$ MJ. Keďže toto teplo kvapalina odovzdá budove podľa zadania každú sekundu, výkon kotolne je približne 2,2 MW.

**30** Najskôr si uvedomme, že ak sa Syseľ s hmotnosťou $m$ zavesí na pružinu s tuhosťou $k$, potom jej predĺženie bude

$$\Delta L = \frac{mg}{k}. \tag{30.1}$$

Výšku, o ktorú klesne, ak sa zavesí za stred pružiny ako v zadaní, si označme $d$, viď obrázok 30.1. Celú pružinu si môžeme rozdeliť na dve pružiny tuhosti $2k$. Pokojová dĺžka každej z nich je $\frac{L}{2}$ a skutočná dĺžka každej z nich je $\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2}$.




Obrázok 30.1: *Geometria zaveseného Sysľa*

Sila $F$, ktorou každá z pružiniek pôsobí na Sysľa, je potom

$$F = 2k\left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2} - \frac{L}{2}\right). \tag{30.2}$$

Aby bol Syseľ v rovnováhe, sily od pružiniek sa musia vyrovnať s tiažovou silou. Musí teda platiť rovnica

$$mg = 2F\cos\alpha, \tag{30.3}$$

kde z geometrie vidíme, že

$$\cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2}}. \tag{30.4}$$

Keď za silu $F$ a $\cos\alpha$ dosadíme z rovníc 30.2, 30.3, dostaneme

$$mg = 4k\left(\sqrt{\frac{L^2}{4}+d^2}-\frac{L}{2}\right)\frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+d^2}}. \tag{30.5}$$

Túto rovnicu teraz vydelíme tuhosťou $k$ a využijeme rovnicu 30.1,

$$\begin{aligned}\Delta L &= 4\left(\sqrt{\frac{L^2}{4}+d^2}-\frac{L}{2}\right)\frac{d}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+d^2}}\\ -4Ld &= \sqrt{L^2+4d^2}(\Delta L-4d)\end{aligned} \tag{30.6}$$

a toto umocníme, aby sme sa zbavili odmocniny:

$$\left(L^2+4d^2\right)(\Delta L-4d)^2 = 16L^2d^2. \tag{30.7}$$

Po roznásobení dostaneme kvartickú rovnicu

$$L^2\,\Delta L^2 - 8L^2\,\Delta L d + 4\,\Delta L^2 d^2 - 32\,\Delta L d^3 + 64d^4 = 0 \tag{30.8}$$

s neznámou $d$. Tá sa síce analyticky rieši dosť ťažko, ale po dosadení všetkých číselných konštánt $L = 1$ m a $\Delta L = 2$ m ju vieme vyriešiť numericky.

Najjednoduchší spôsob ako nájsť koreň rovnice numericky je binárnym vyhľadávaním. Označme ľavú stranu rovnice 30.8 ako funkciu $f(d)$. Najskôr si tipneme zopár hodnôt pre $d$ a vyčíslime $f(d)$. Dostaneme

$$f(0) = 4, \quad f(1/2) = -4 \quad \text{a} \quad f(1) = 4. \tag{30.9}$$

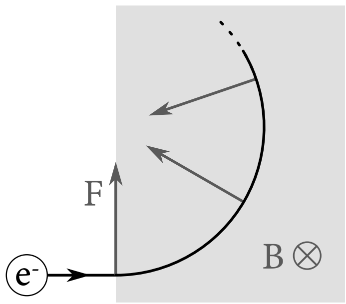
Zo znamienok týchto výsledkov vyplýva, že jeden koreň bude ležať v intervale 0 – 0,5 m a druhý v intervale 0,5 – 1 m. Ďalej postupujeme tak, že tieto intervaly budeme deliť na polovicu a podľa znamienka funkcie $f(d)$ zakaždým zúžime interval, až kým nedosiahneme požadovanú presnosť.

Dostaneme dva korene, $d = 0{,}2655$ m a $d = 0{,}9416$ m. Po dosadení naspäť do rovnice 30.6 však zistíme, že prvé z riešení jej nevyhovuje. Toto riešenie teda nie je fyzikálne správne a vzniklo v kroku, kde sme rovnicu 30.6 umocnili na druhú. Teda výška, o ktorú Syseľ klesne, je $d \approx 0{,}94$ m.

**31** Na elektricky nabité častice pôsobí silovo elektrické aj magnetické pole. Kým pôsobenie elektrického poľa je jednoducho priťahovaním alebo odpudzovaním analogickým gravitácii, pôsobenie magnetického poľa na nabitú časticu sa riadi zložitejším vzťahom

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}. \tag{31.1}$$

Popíšme našu situáciu v kartézskych súradniciach. Povedzme, že elektrón prilieta v smere osi $+x$ a magnetické pole pôsobí všade v smere rovnobežnom s osou $-z$ (taká je najbežnejšia konvencia). Potom v okamihu zapnutia magnetického poľa bude sila pôsobiť v smere $+y$. Ako sa dráha elektrónu zakrivuje do smeru $+y$, smer tejto sily sa otáča tiež tak, aby bol vždy kolmý aj na okamžitý smer letu elektrónu, aj na magnetické pole. A keďže elektrón spočiatku má $z$-zložku rýchlosti nulovú a $z$-zložka sily je nulová vždy, elektrón zostane uväznený v rovine $xy$. A keďže sila (a teda aj zrýchlenie) je vždy kolmá na smer rýchlosti, veľkosť rýchlosti sa nemení, iba sa otáča jej smer, a to konštantnou rýchlosťou, keďže veľkosť žiadnej veličiny v silovom zákone sa nemení. Ide teda o pohyb po kružnici.




Obrázok 31.1: *Trajektória elektrónu*

Keďže pohyb je vždy kolmý na smer poľa, takže veľkosť sily $F$ spočítame jednoducho tak, že vektorový súčin v rovnici 31.1 nahradíme jednoduchým súčinom veľkostí rýchlosti a indukcie. Keďže toto je sila spôsobujúca pohyb po kružnici, môžeme ju dať do rovnosti s výrazom pre dostredivé zrýchlenie a vyjadriť $R$,

$$m_e \frac{v^2}{R} = q_e v B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m_e v}{q_e B}. \tag{31.2}$$

Tomuto sa hovorí Larmorov polomer. Zaujíma nás, za aký čas prejde elektrón po štvrťkružnici s polomerom $R$, ktorej dĺžka je triviálne $\frac{\pi}{2}R$. Je to

$$t = \frac{\pi}{2v}R = \frac{\pi}{2v}\frac{m_e v}{q_e B} = \frac{\pi m_e}{2 q_e B}. \tag{31.3}$$

Všetky veličiny v tomto výraze poznáme – elementárny náboj, hmotnosť elektrónu, indukciu magnetického poľa – a vyčíslime $t \approx 1$ ns.

**32** Označme hmotnosť balóna $M$. Potom platí $F = V\rho g - Mg$, kde $\rho$ je hustota vody. Nápodobne, sila ktorou nakoniec balón tlačí na dno je $F' = Mg - V'\rho g$, keďže voda ako kvapalina sa nestlačí a nezmení svoju hustotu. Zadanie hovorí, že stláčanie balóna prebieha izotermicky, a teda pre tlaky v jednotlivých prípadoch platí $pV = p'V'$.

Ostáva nám identifikovať hodnoty tlakov. Na počiatku je balón vystavený atmosférickému tlaku $p = p_{\text{atm}}$, keďže na balón tlak vody pôsobí rovnako ako na piest. Na dne je tlak zvýšený jednak pôsobením zaťaženého piestu $mg/S$, a jednak vodným stĺpcom, ktorý je už nad balónom.

Pre $V'$ teda dostávame

$$\begin{aligned} p_{\text{atm}} V &= p'V' = (p_{\text{atm}} + mg/S + h\rho g)V' \\ V' &= \frac{p_{\text{atm}}}{p_{\text{atm}} + mg/S + h\rho g} V \end{aligned} \tag{32.1}$$

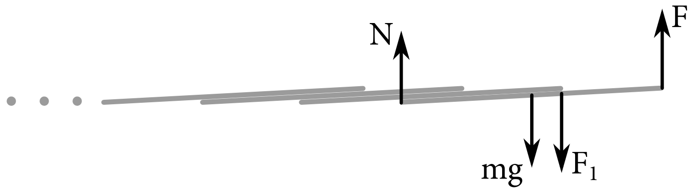
Tento výsledok ostáva dosadiť do vzťahu pre $F'$ a získame

$$F' = Mg - V'\rho g = (V - V')\rho g - F = \frac{V\rho g}{1 + \frac{p_{\mathrm{atm}}/g}{m/S + h\rho}} - F \approx 0{,}126\ \mathrm{N}. \tag{32.2}$$

**33** Nekonečne veľa kariet sa náročne označuje, ale my si ich označme. Karta, ktorá je naspodku, je naša prvá karta. Keď ju chceme nadvihnúť o maličký kúsok, musí vyjsť celkový moment síl pôsobiacich na túto kartu nulový vzhľadom na os otáčania. To je v našom prípade okraj karty, ktorý sa nachádza pod ostatnými kartami,

$$F\ell = \frac{1}{2}mg\ell + (\ell - \Delta\ell)F_1, \tag{33.1}$$

pričom $F$ je sila, ktorou pôsobí Justínka na kartu a $F_1$ je sila, ktorou pôsobí druhá karta (a cez ňu všetky ďalšie karty) na prvú.




Obrázok 33.1: *Sily pôsobiace na karty*

Pri nekonečnom počte karát môžeme predpokladať, že $F = F_1$. Ak totiž Justínka vytiahne prvú kartu, v nekonečnom zostatku je stále nekonečne veľa kariet, ktoré potrebuje nadvihnúť. S týmto predpokladom sa z rovnice 33.1 dostávame k výsledku

$$F = \frac{mg\ell}{2\,\Delta\ell}. \tag{33.2}$$

**34** Na celú situáciu sa pozrieme v neinerciálnej vzťažnej sústave s počiatkom v osi otáčania kolotoča a rotujúcou rovnako ako kolotoč. Preto kolotoč v tejto vzťažnej sústave bude stáť. Keď ešte Snehulienka sedí na svojom pôvodnom mieste vo vzdialenosti $r$, v tejto neinerciálnej sústave na ňu pôsobí odstredivá sila $F_o = m\omega^2 r$. Ak sa chce premiestniť do stredu, musí prekonať túto silu. Tá však pôsobí v radiálnom smere, a teda má nulový moment.

Navyše, keď sa začne pohybovať, príde do hry ďalšia fiktívna sila, a to Coriolisova. Tá má veľkosť $F_c = 2m\omega v_\perp$, kde $v_\perp$ je zložka Snehulienkinej rýchlosti kolmá na os rotácie. Táto sila je zároveň kolmá na $v_\perp$. Ak sa Snehulienka začne presúvať, musí prekonávať aj túto silu, a teda pôsobí na kolotoč reálnou silou s nenulovým momentom. Táto sila bude preto roztáčať trpaslíkov. Preto sa energia nezachováva (Snehulienka koná prácu). Zachováva sa ale moment hybnosti, lebo na kolotoč pôsobí jediná vonkajšia sila, a to sila od zeme cez tyč, ktorá je upevnená v osi otáčania, a teda určite nepôsobí žiadnym momentom.

Snehulienkin moment hybnosti na konci manévra je nulový a z rovnosti momentov hybností dostávame

$$(m_s + 7m_t)\omega_1 r^2 = 7m_t\omega_2 r^2, \tag{34.1}$$

kde $m_s$ je hmotnosť Snehulienky, $m_t$ je hmotnosť jedného trpaslíka, $\omega_1$ je uhlová rýchlosť na začiatku a $\omega_2$ uhlová rýchlosť po Snehulienkinom manévri.

Zo zadania vieme, že $\omega_1 = \frac{2}{3}\omega_2$, odkiaľ dostávame $(m_s + 7m_t) = \frac{3}{2} \cdot 7m_t$. Jeden trpaslík má teda hmotnosť

$$m_t = \frac{2}{7}m_s = 16\ \text{kg}. \tag{34.2}$$

$\boxed{\textbf{35}}$ Vychýľme disk zo stredovej polohy o $\Delta x$. V neporušenom valci v stlačenej komore v dôsledku vychýlenia disku vzrastie tlak o $\Delta p(\Delta x)$ a vo zväčšenej komore poklesne tlak o rovnakú hodnotu[6]. Na disk preto pôsobí sila veľkosti $F_1(\Delta x) = 2\,\Delta p(\Delta x)S$, ktorá sa pokúša vrátiť disk do stredovej polohy. V priblížení malých výchyliek je závislosť $\Delta p(\Delta x)$ lineárna.

Vo valci s odtrhnutým dnom sa v dôsledku vychýlenia disku o $\Delta x$ zo stredovej polohy tlak v neporušenej komore zmení síce opäť o $\Delta p(\Delta x)$, no v porušenej komore už zostane atmosférický tlak. Sila pôsobiaca na disk je preto teraz už len

$$F_2(\Delta x) = \Delta p(\Delta x)S = \frac{1}{2}F_1(\Delta x). \tag{35.1}$$

Popísaná situácia je ekvivalentná tomu, ako keby bol disk pripevnený raz k pružine s vhodnou tuhosťou $k_1$ a v druhom prípade k pružine s tuhosťou $k_2 = \frac{1}{2}k_1$. Keďže pre periódu malých kmitov závažia na pružine platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, kde $m$ je hmotnosť závažia a $k$ je tuhosť pružiny, hľadaný pomer periód bude

$$q = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{35.2}$$

$\boxed{\textbf{36}}$ Akým mechanizmom sa koleso vôbec rozhýbe po dopade na zem? Nuž, ak má koleso hmotnosť $m$, tlačí na zem silou $mg$. Okrem toho sa zemi zdá, že koleso sa pohybuje – keďže sa točí uhlovou rýchlosťou $\omega_0$, jeho povrch sa v bode dotyku hýbe voči ťažisku kolesa aj voči zemi rýchlosťou $R\omega_0$, kde $R = 2{,}5\ \text{m}$ je polomer kolesa. Z toho vyplýva, že na koleso bude v bode dotyku pôsobiť trecia sila veľkosti $fmg$ (kde $f$ je koeficient šmykového trenia) v smere rovnobežnom s povrchom zeme, proti smeru otáčania kolesa. Ťažisko kolesa začne rovnomerne zrýchľovať vo vodorovnom smere s rýchlosťou $v_x(t) = at = fgt$, no moment trecej sily tiež bude rovnomerne spomaľovať otáčanie kolesa, takže priebeh jeho uhlovej rýchlosti bude

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{fmgR}{I}t, \tag{36.1}$$

kde $I$ je moment zotrvačnosti kolesa.

Trecia sila, samozrejme, nepôsobí donekonečna – prestane tak činiť v okamihu, keď koleso prestane prešmykovať. Toto nastane, keď sa obvodová rýchlosť $R\omega(t)$ na okraji kolesa vyrovná s posuvnou rýchlosťou $v_x(t)$ a koleso sa ustáli vo valivom pohybe. Vyjadrime čas $t_v$, v ktorom toto nastane,

$$R\left(\omega_0 - \frac{fmgR}{I}t_v\right) = fgt_v \quad \Rightarrow \quad t_v = \frac{R\omega_0}{fg\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}. \tag{36.2}$$

[6] Toto celé platí len v prípade malých výchyliek, kedy možno závislosť zmeny tlaku na výchylke linearizovať.

Konečná posuvná rýchlosť kolesa je potom jednoducho

$$v_v = v_x(t_v) = fgt_v = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{mR^2}{I}}. \tag{36.3}$$

Toto je známa veličina; to, čo chceme nájsť, je rýchlosť škrečka pred odtrhnutím kolesa $v_s$, čo je jednoducho počiatočná obvodová rýchlosť $R\omega_0$,

$$v_s = R\omega_0 = v_v\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right). \tag{36.4}$$

Ako vidíme, potrebujeme ešte zistiť hmotnosť a moment zotrvačnosti kolesa. Moment zotrvačnosti sa dá poskladať lineárne, tyčku po tyčke. Pre všetkých 50 malých tyčiek a pre dve obruče ho určíme jednoducho: všetky ležia v rovnakej vzdialenosti od osi otáčania – aj keď si ich rozkúskujeme na malé čiastočky, každá čiastočka je vo vzdialenosti $R$ od osi otáčania. Ich celkový moment zotrvačnosti je teda $50\lambda AR^2 + 2\lambda(2\pi R)R^2$, kde $A$ je dĺžka malej tyčky.

Zložitejšie je to s dvomi priemerovými tyčkami. Každá má hmotnosť $2R\lambda$ a v tabuľkách sa dočítame, že moment zotrvačnosti tyče s dĺžkou $X$ a hmotnosťou $M$ rotujúcej okolo osi prechádzajúcej cez jej stred kolmej na samotnú tyč je $\frac{1}{12}MX^2$.

Platí $X = 2R$; dosadíme hodnotu hmotnosti a zistíme, že jedna priemerová tyč má moment zotrvačnosti $\frac{2}{3}\lambda R^3$. Teda celkový moment zotrvačnosti kolesa je

$$I = \lambda R^2\left(50A + \left(4\pi + \frac{4}{3}\right)R\right). \tag{36.5}$$

Chytro si vyjadríme hmotnosť kolesa z jeho rozmerov a dĺžkovej hustoty ako

$$m = \lambda(50A + (4\pi + 4)R), \tag{36.6}$$

a teda rýchlosť škrečka je rovná

$$v_s = v_v\left(1 + \frac{50A + (4\pi + 4)R}{50A + \left(4\pi + \frac{4}{3}\right)R}\right) \doteq 2{,}11\ \mathrm{m/s}. \tag{36.7}$$

**37** Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že satelit uletí do nekonečna. Avšak, treba si uvedomiť, že pri voľbe dostatočne malej sily ostane satelit stále viazaný k Slnku. Jeho dráhou už síce nebudú kužeľosečky, ale bude to nejaká ohraničená krivka, a radiálna vzdialenosť od Slnka teda bude mať definované maximum. Hľadáme takú veľkosť sily $F$, aby toto maximum bolo vo vzdialenosti $2R$ od Slnka.

Vieme, že pred tým, ako satelit zapol motory, sa pohyboval obežnou rýchlosťou $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ po kruhovej trajektórii s polomerom $R$. Po zapnutí motorov sa síce jeho trajektória drasticky zmenila, ale stále platí zákon zachovania momentu hybnosti, pretože sila $F$ pôsobila iba v radiálnom smere. Rýchlosť satelitu vo vzdialenosti $2R$ si označme $v$. Keďže toto je najvzdialenejší bod jeho trajektórie od Slnka, rýchlosť bude kolmá na spojnicu so Slnkom. Potom bude platiť

$$v_0 R = v2R, \tag{37.1}$$

a teda

$$v = \frac{v_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{R}}. \tag{37.2}$$

Ďalej využijeme zákon zachovania energie. Tu si ale musíme dať pozor, lebo sila $F$ tiež koná nejakú prácu. Na to si trajektóriu satelitu rozdelíme na veľa malých úsekov $\Delta\vec{s}$, na každom spočítame prácu $\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$, a potom všetky $\Delta W$ sčítame dokopy. Avšak ak si $\Delta\vec{s}$ rozložíme na radiálnu a priečnu zložku, vďaka skalárnemu súčinu môžeme $\Delta W$ rátať ako jednoduchý súčin sily $F$ a zmeny radiálnej vzdialenosti od Slnka. Preto celková práca, ktorú sila vykoná od okamihu zapnutia motorov až po dosiahnutie maxima je $FR$ (vzdialenosť satelitu od Slnka sa zmenila o $R$). Potom zákon zachovania energie môžeme zapísať v tvare

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{2R} - FR. \tag{37.3}$$

Za počiatočnú rýchlosť $v_0$ dosadíme obvodovú rýchlosť $\sqrt{\frac{GM}{R}}$, za rýchlosť $v$ dosadíme z rovnice 37.2 a vyjadríme silu $F$. Vyjde

$$F = \frac{1}{8}\frac{GMm}{R^2}. \tag{37.4}$$

**38** Uvedomme si, aké sily pôsobia na zlatú platňu. V prvom rade máme gravitačnú silu danú Newtonovým gravitačným zákonom. V druhom rade sa od platne odrážajú fotóny z hviezdy, ktoré jej tým odovzdávajú hybnosť. Využijeme alternatívnu formu 2. Newtonovho zákona, $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, kde $\Delta p$ je zmena hybnosti. Zmena hybnosti fotónov, ktoré sa odrazia za čas $\Delta t$ od platne, je $\Delta p = \frac{2E}{c}$, kde $E$ je energia, ktorá dopadne na platňu. Fotóny majú po kolmom[7] odraze rovnakú hybnosť v opačnom smere, preto zmena ich hybnosti je dvojnásobná.

Ak hviezda vyžiari energiu $E_c$, na platňu vo vzdialenosti $D$ dopadne

$$E = \frac{A}{4\pi D^2}E_c, \tag{38.1}$$

kde $A$ je zatiaľ neznáma plocha platne.

Vyžiarenú energiu vieme zistiť pomocou Stefanovho-Boltzmannovho zákona pre žiarenie dokonale čierneho telesa ako

$$E_c = P\,\Delta t = \sigma T^4 S\,\Delta t = \sigma T^4 4\pi R^2\,\Delta t. \tag{38.2}$$

Keďže list má byť nehybný, sila spôsobená žiarením musí byť v rovnosti s gravitačnou silou. Odtiaľ dostávame rovnosť

$$\frac{GMm}{D^2} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2E}{c\,\Delta t} = \frac{2A\sigma T^4 4\pi R^2}{4\pi D^2 c}, \tag{38.3}$$

a teda vyjadríme plošnú hustotu

$$\frac{m}{A} = \frac{2\sigma T^4 R^2}{GMc}. \tag{38.4}$$

[7] Pre $D \gg R$ môžeme hviezdu považovať za bodový zdroj

Môžeme si všimnúť, že plošná hustota platne nezávisí na vzdialenosti od hviezdy. To sa dalo čakať, nakoľko obe sily klesajú úmerne $D^{-2}$.

**39** Na tento problém, ako je to časté v špeciálnej teórii relativity, sa dá ísť dvojak: rigorózne alebo trikovo. Označme lodný čas trvania cesty ako $\tau = 2\,600\,000$ rokov a vzdialenosť galaxie M31 od Zeme ako $D = c\tau = 2\,600\,000$ svetelných rokov.

### Rigorózny postup

Na vec sa pozrieme v dvoch vzťažných sústavách, a v každej si napíšeme časopriestorové súradnice Zeme a galaxie M31. V zemskej sústave nech je Zem na $t = 0, x = 0$. Nech je galaxia M31 na $t = t_G, x = D$, kde $D$ je udaná vzdialenosť, a potom $t_G = \frac{D}{v}$, kde $v$ je hľadaná rýchlosť lode. Vo vzťažnej sústave lode sa tieto súradnice zmenia podľa Lorentzovej transformácie. Zem je stále na $t' = 0$, $x' = 0$, no galaxia M31 je teraz na

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vD}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(D - vt), \tag{39.1}$$

kde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ je Lorentzov faktor.

Keďže v tejto sústave je loď nehybná, rozdiel časových súradníc galaxie M31 a Zeme (rovný $t'$) je zároveň vlastným (a teda aj lodným) časom, ktorý loď nameria ako dĺžku trvania svojej cesty – teda $t' = \tau$. Dosadíme odvodený vzťah pre $t$ a vyjadríme rýchlosť ako

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma D\left(\frac{1}{v} - \frac{v}{c^2}\right) = \frac{1}{v}\gamma D\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{v}\gamma D\gamma^{-2} = \frac{D}{v\gamma}, \\ \frac{D}{\tau} &= \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{c^2}{\frac{c^2}{v^2} - 1}}, \\ v &= \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2\tau^2}{D^2}}}. \end{aligned} \tag{39.2}$$

Ale $\frac{\tau}{D}$ je jednoducho prevrátená hodnota rýchlosti svetla $c^{-1}$ (tak boli tieto veličiny zadané – pokojne sme si mohli zvoliť inú hodnotu $\tau$, a výsledok by bol odlišný), a teda

$$v = \frac{c}{\sqrt{2}}. \tag{39.3}$$

### Trikový postup

Keďže nás zaujíma lodný, čiže vlastný čas, predstavme si, že sme na palube lode a zamyslime sa, aké relativistické efekty pociťujeme. Pohybujúce sa hodiny spomalia, ale to nás nezaujíma. Okrem toho sa vzdialenosti medzi pohybujúcimi sa bodmi skrátia o Lorentzov faktor – a toto presne spôsobí, že sa nám vzdialenosť do cieľa bude zdať kratšia. Teda ak sa hýbeme rýchlosťou $v$, pozorovaná vzdialenosť do cieľa je rovná

$D_0 = D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ a uplynulý čas $\tau = \frac{D_0}{v}$. Podľa zadania však $\tau = \frac{D}{c}$, preto

$$\frac{D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} = \frac{D}{c} \tag{39.4}$$

a z tohto už rýchlo vytrieskame očakávaný výsledok z rovnice 39.3.

**40** Ak máme stenu s plochou $S$ a hrúbkou $h$ a s tepelnou vodivosťou $\lambda$ a udržiavame jej strany na teplotách $t_1$ a $t_2$, množstvo tepla, ktoré ňou pretečie za jednotku času, je

$$P = \frac{\lambda S}{h}(t_2 - t_1). \tag{40.1}$$

Pre praktickosť definujme súčiniteľ $\lambda S/h =: X$. Pozrime sa na zreťazenie dvoch stien so súčiniteľmi $X_1$ a $X_2$. Z kontinuity prenášaného tepla vieme, že

$$P = X_2(t_2 - t) = X_1(t - t_1), \tag{40.2}$$

kde $t$ je teplota ich rozhrania. Tú možno vyjadriť ako

$$t = \frac{X_1 t_1 + X_2 t_2}{X_1 + X_2} \tag{40.3}$$

a pomocou nej tepelný tok

$$P = \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2}(t_2 - t_1). \tag{40.4}$$

Vidíme, že môžeme definovať efektívny súčiniteľ pre obe steny spolu,

$$X_{12} \coloneqq \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2}. \tag{40.5}$$

S touto prípravou sa môžeme vrhnúť na príklad samotný.

Pred inštaláciou polystyrénu bol tepelný tok od Dušana k susede

$$P = \frac{X_\text{parkety} X_\text{betón}}{X_\text{parkety} + X_\text{betón}}\left(t_\text{u Dušana} - t_\text{u susedy}\right) = X_\text{parkety + betón}\left(t_\text{u Dušana} - t_\text{u susedy}\right). \tag{40.6}$$

Ak zanedbáme kúrenie susedy osobne, rovnako veľký tepelný tok prechádza aj cez jej ostatné steny von,

$$P = X\left(t_\text{u susedy} - t_\text{vonku}\right), \tag{40.7}$$

kde $X$ je (zatiaľ) neznámy súčiniteľ popisujúci tepelné straty susedy do vonkajšku. S jeho neznámosťou sa vieme popasovať za pomoci predchádzajúcich dvoch rovníc a určiť ho ako:

$$X = X_\text{parkety + betón}\frac{t_\text{u Dušana} - t_\text{u susedy}}{t_\text{u susedy} - t_\text{vonku}}. \tag{40.8}$$

Po zateplení sa súčiniteľ popisujúci tepelný tok medzi Dušanom a susedou zmení na

$$X_{\text{parkety + betón + polystyrén}} = \frac{X_{\text{parkety + betón}} X_{\text{polystyrén}}}{X_{\text{parkety + betón}} + X_{\text{polystyrén}}}. \tag{40.9}$$

Znova nastane rovnováha medzi tepelným tokom od Dušana k susede a od susedy von,

$$X_{\text{parkety + betón + polystyrén}} \left( t_{\text{u Dušana}} - t'_{\text{u susedy}} \right) = X \left( t'_{\text{u susedy}} - t_{\text{vonku}} \right). \tag{40.10}$$

Vďaka nášmu usilovnému preznačovaniu vieme vyjatriť teplotu u susedy po Dušanovom zateplení ako

$$t'_{\text{u susedy}} = \frac{X t_{\text{vonku}} + X_{\text{parkety + betón + polystyrén}} t_{\text{u Dušana}}}{X + X_{\text{parkety + betón + polystyrén}}}. \tag{40.11}$$

Dosadíme a zistíme, že teplota u susedy bude po novom 0,625 °C.

# Výsledky

**1** 9

**2** 41 m

**3** $\frac{5}{27}$

**4** 0,073 g/cm$^3$ = 73 kg/m$^3$

**5** 3,6 s = $10^{-3}$ h

**6** $\frac{\sqrt{26}}{2}$ s ≐ 2,55 s

**7** 4,89 h = 17 591 s *alebo* 4 hodiny, 53 minút, 11 sekúnd

**8** 134

**9** 4 : 3

**10** 7,68 l

**11** 151,6 m. *Uznajte výsledky v intervale* 150 – 152 m.

**12** 2 Ω

**13** 1,2 m

**14** 98,3 kg. *Uznajte výsledky v intervale* 96 – 99 kg.

**15** $\frac{\pi}{2}r^2 + r^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)r^2$

**16** 203 l, *uznajte aj* 0,2 m$^3$ = 200 l

**17** $\frac{180^\circ}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$

**18** $\sqrt{300}$ m/s ≐ 17,32 m/s. *Uznajte výsledky v intervale* 17,15 – 17,35 m/s.

**19** $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ s ≐ 2,17 s

**20** 314 °C

**21** 26,25 Ω

**22** 521 W

**23** 5618 kg/m$^3$, *uznajte výsledky v intervale* 5612 – 5727 kg/m$^3$.

**24** 9 cm/s

**25** *Uznajte výsledky v intervale* 1,08 – 1,10 m/s$^2$.

**26** *Dĺžka* $L\frac{K}{k+K}$, *tuhosť* $k+K$. *Uznajte, len ak oba výrazy sú správne. Ak je správny len jeden, neupozorňujte na to, ktorý je chybný.*

**27** $\sqrt{\frac{F}{ML}}$

**28** 170

**29** 2,2 MW

**30** 0,94 m

**31** 1,0 ns

**32** 0,126 N

**33** $\frac{mg\ell}{2\,\Delta\ell}$

**34** 16 kg

**35** $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**36** 2,11 m/s

**37** $\dfrac{GMm}{8R^2}$

**38** $\dfrac{GMmc}{2R^2\sigma T^4}$

**39** $\dfrac{c}{\sqrt{2}}$

**40** 0,625 °C