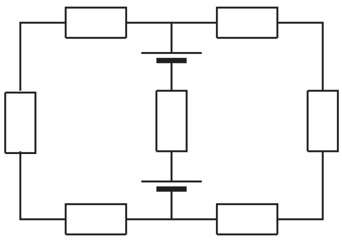
Zadania

$\boxed{1.}$ Kamión sa vydal z mesta A do mesta B, ide konštantnou rýchlosťou a bude mu to trvať dve hodiny. Kedy musí vyraziť auto z mesta B do mesta A, aby sa stretli na polceste? Auto sa pohybuje o polovicu väčšou rýchlosťou ako kamión.

$\boxed{2.}$ Z rezistorov s odporom 1 kΩ a dvoch zdrojov s napätím 9 V postavíme schému ako na obrázku. Aký prúd tečie rezistorom medzi zdrojmi?



$\boxed{3.}$ Vo výške H nad zemou sa nachádza koniec hadice, z ktorej strieka voda rýchlosťou v. Akým smerom máme namieriť prúd vody, aby mala pri dopade na zem čo najvyššiu rýchlosť? Odpor vzduchu zanedbajte.

$\boxed{4.}$ Po diaľnici idú autá rýchlosťou 135 km/h. Ak jedno z nich začne naplno brzdiť zrýchlením veľkosti $5\,\mathrm{m/s^2}$, vodič auta za ním začne brzdiť, s rovnakým zrýchlením, najskôr o pol sekundy neskôr. Aký minimálny odstup musia autá dodržiavať, aby sa za takýchto idealizovaných podmienok nezrazili?

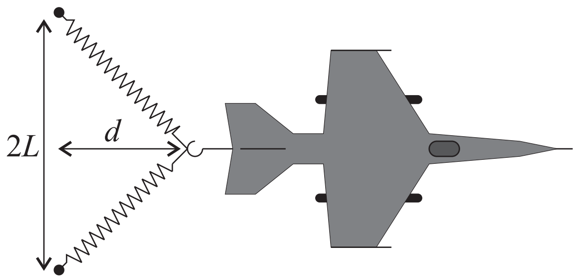
$\boxed{5.}$ Gulička hmotnosti m visí zo stropu na špagáte dĺžky L. Guličku roztočíme tak, aby sa pohybovala po vodorovnej kružnici s polomerom r. Aká bude perióda jej obehu?

$\boxed{6.}$ Puding z jedného vrecúška a pol litra mlieka sa pripravuje nasledovne. Obsah vrecúška s pudingovým práškom a trochu cukru dobre rozmiešame v tretine mlieka. Zvyšné 2/3 mlieka necháme zovrieť a vlejeme doň pripravené mlieko s pudingom. Keď celá zmes znova zovrie, za stáleho miešania ju varíme ešte 1 minútu. Ako dlho nám bude trvať príprava pudingu, ak máme šikovného pomocníka a varič s výkonom 700 W? Teplota mlieka z chladničky je 5°C, jeho tepelná kapacita 4,2 $\mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$ a hustota 1000 $\mathrm{kg.m^{-3}}$. Zanedbajte tepelné straty a vplyv pudingového prášku na vlastnosti mlieka.

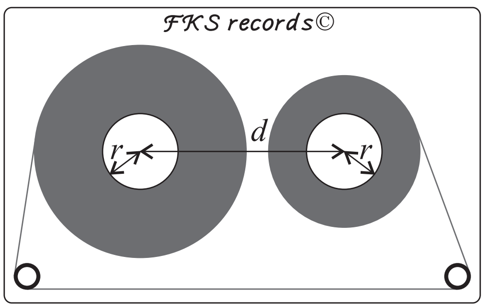
7. Na štadióne sú oproti sebe vo vzdialenosti d umiestnené dva rovnaké reproduktory. Jeden je však pustený hlasnejšie a to tak, že má dvakrát väčší príkon. Braňo stojí na úsečke spájajúcej tieto dva reproduktory a to tak, že počuje oba rovnako dobre. V akej vzdialenosti od hlasnejšieho z nich sa nachádza?

8. Cyklista Dano ide hore kopcom rýchlosťou 10 km/h, po rovine rýchlosťou 15 km/h a dole kopcom si to rozbehne na 30 km/h. Cesta z domu na chatu mu trvala 4 hodiny a 40 minút, cesta naspäť iba 4 hodiny. Ako ďaleko to má Dano z domu na chatu?

9. Lietadlá pristávajúce na lietadlovú loď sa kedysi brzdili pomocou mechanizmu lán a oceľových pružín. Predstavte si pristávajúce lietadlo s hmotnosťou m a rýchlosťou v, ktoré sa podvozkom zaprie kolmo do stredu pružiny natiahnutej na dĺžku $2L$. Ak je pokojová dĺžka pružiny nulová, aká musí byť jej tuhosť, aby lietadlo zastavila na brzdnej dráhe d?

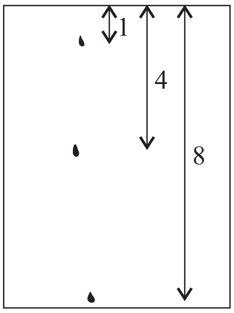


10. V starom magnetofóne sa páska pretáča medzi dvoma plastovými cievkami s polomerom r a stredmi vo vzájomnej vzdialenosti d. Akú najdlhšiu pásku vieme v magnetofóne používať, t.j. bez ujmy na zdraví pretočiť z jednej cievky na druhú, ak je jej hrúbka h? (Predpokladajte, že h je oveľa menšie ako d.)

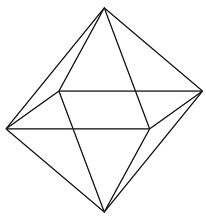


$\boxed{11.}$ Kozmická loď krúži vo vzdialenosti R okolo hviezdy s hmotnosťou M a chystá sa vypustiť malú sondu za účelom preskúmania hviezdy. Aká je minimálna rýchlosť, ktorú musí kozmická loď udeliť prieskumnej sonde, aby táto spadla na hviezdu? Predpokladajte, že vzdialenosť R je oveľa väčšia než rozmery hviezdy.

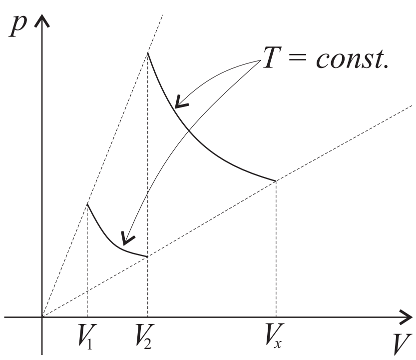
$\boxed{12.}$ Z odkvapu rovnomerne kvapkajú kvapky. Na fotke sa nachádzajú tri z nich. V akej vzdialenosti od horného okraja fotky sa nachádza odkvap?



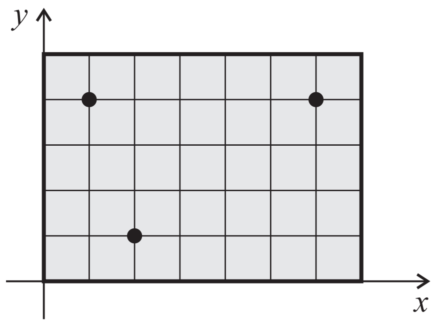
$\boxed{13.}$ Hrany osemstena sú tvorené rezistormi s odporom R (viď obrázok). Aký bude odpor medzi dvoma susednými vrcholmi, ak navyše každý pár protiľahlých vrcholov spojíme vodičom s nulovým odporom?



$\boxed{14.}$ Určte objem V_x v nasledujúcom pV diagrame. Naznačené krivky sú izotermy.

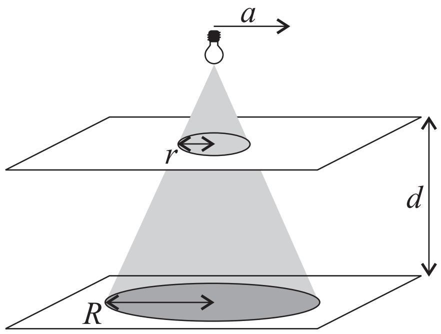


15. Homogénna obdĺžniková doska s hmotnosťou 150 kg je podopretá v troch bodoch. V súradnicovom systéme s osami na jej hranách majú tieto podpery súradnice $[1, 4]$, $[2, 1]$ a $[6, 4]$, tak, ako na obrázku. Kam sa má postaviť Mirko vážiaci 50 kg, aby bola každá podpera namáhaná rovnakou silou?



16. Vo vzduchu poletujú dve spojené bubliny z bublifuku s polomermi r a R, kde $R > r$. Aký je polomer krivosti ich spoločného povrchu?

17. Máme tenkú plochú dosku, v ktorej je vyrezaný kruh s polomerom r. Za ňou je vo vzdialenosti d rovnobežne umiestnené tienidlo. Nad stredom kruhového otvoru v doske je umiestnený bodový zdroj svetla tak, že na tienidle je osvetlený kruh s polomerom $R > r$. Akú plochu bude mať osvetlený útvar na tienidle, ak zdroj svetla posunieme v smere rovnobežnom s doskou o vzdialenosť a?



18. Na naklonenej rovine so sklonom α rastie koeficient trenia lineárne podľa vzťahu $f = kL$, kde L je vzdialenosť od vrchu roviny. Akú dráhu prejde teleso spustené z vrchu roviny, kým zastane?

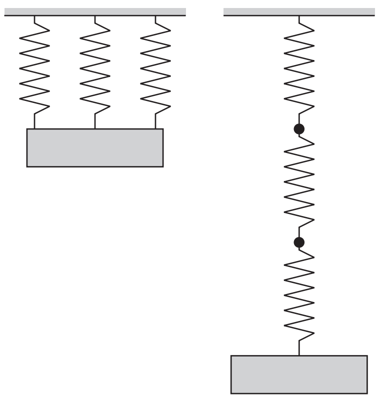
19. Tomáš s Fajom našli v Slovenskom krase krasovú jamu, ktorej nedovideli na dno. Pustili do nej teda kameň a odmerali čas t medzi tým, ako kameň pustili, a tým, ako začuli jeho dopad na dno jamy. Rýchlosť zvuku je c, gravitačné zrýchlenie g a odpor vzduchu zanedbateľný. Aká ja hĺbka jamy?

$\boxed{20.}$ Kúsok dreva s hmotnosťou M visí na špagáte dĺžky l a pevnosti F (t.j. špagát sa roztrhne, ak ho ťaháme silou väčšou než F). Do tohto dreva strelíme vo vodorovnom smere náboj s hmostnosťou m, ktorý v ňom uviazne. Aká najmenšia musí byť rýchlosť náboja, aby sa špagát pretrhol?

$\boxed{21.}$ Vo vzduchu sa vznáša frisbee. Ako vysoko nad zemou musí letieť, aby na zem nevrhalo na žiadnom mieste úplný tieň, ale iba polotieň? Uhlový priemer slnka je $30'$ a práve sa nachádza vo výške $30°$ nad obzorom. Priemer frisbee je 30 centimetrov a letí vo vodorovnej polohe.

$\boxed{22.}$ Na pokojnom mori pláva plachetnica. Plocha jej plachiet je S_p a koeficient ich odporu je C_p, prierez ponorenej časti trupu je S_t a koeficient jeho odporu je C_t. Ako najrýchlejšie môže plachetnica plávať, ak fúka vietor rýchlosťou v? Počítajte s Newtonovým vzťahom pre odporovú silu.

$\boxed{23.}$ Máme tri rovnaké pružiny a jedno závažie. Najprv umiestnime pružiny vedľa seba a necháme na nich (všetkých naraz) kmitať závažie. Nameriame periódu T_1. Potom pospájame pružiny jednu za druhou a závažie znova necháme kmitať, tentoraz nameriame periódu T_2. Aký je pomer periód $\eta = T_1/T_2$?



$\boxed{24.}$ Máme N uzlov, pričom každé dva sú spojené káblikom s odporom R. Aký odpor nameriame medzi ľubovoľnými dvoma uzlami?

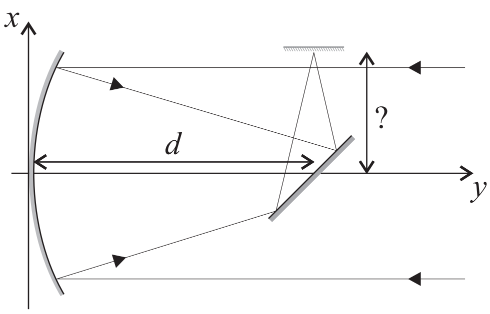
$\boxed{25.}$ V rieke šírky d tečie voda všade rýchlosťou u. Tomáš stojí na jednom brehu rieky a chce sa dostať na druhý breh do protiľahlého bodu. Dokáže však plávať len rýchlosťou v menšou než u. Ako najbližšie k protiľahlému bodu vie doplávať?

$\boxed{26.}$ Závodný cyklista fičí po vodorovnej ceste na optimálnom prevode rýchlosťou v_1. Ak ide dolu kopcom so sklonom α, na optimálnom prevode vie ísť s rovnakou námahou až rýchlosťou v_2. Jeho hmotnosť je m, bicykluje stále v rovnakej polohe a valivé trenie na jeho cestnom bicykli môžeme zanedbať. Aký výkon pri bicyklovaní podáva?

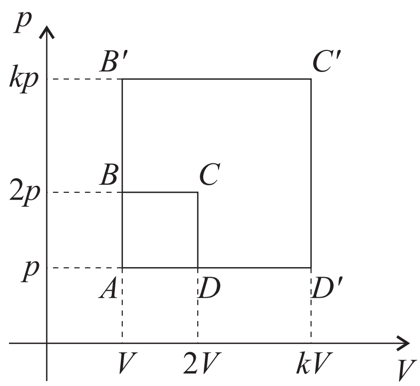
$\boxed{27.}$ Kozmická loď sa približuje stálou rýchlosťou priamo k Zemi. Pozorovatelia na Zemi ju vidia približovať sa rýchlosťou $2c$, kde c je rýchlosť svetla. (To znamená, že po čase t ju uvidia o $2c \cdot t$ bližšie.) Akou rýchlosťou ju uvidia vzďaľovať sa po tom, ako preletí popri Zemi?

$\boxed{28.}$ Peťo hodil bowlingovú guľu rýchlosťou v rovno po dráhe s koeficientom trenia f. Dal jej však spätnú rotáciu s uhlovou rýchlosťou ω. Aká najmenšia musí byť táto uhlová rýchlosť, aby sa guľa po čase začala kotúľať naspäť? Polomer gule je R a jej hmotnosť je M.

$\boxed{29.}$ Hlavné zrkadlo ďalekohľadu je parabolické, v ľubovoľnom reze prechádzajúcom jeho optickou osou má rovnicu $y = ax^2$, kde a je daná konštanta. Vo vzdialenosti d od jeho vrcholu je umiestnené rovinné zrkadielko. Ako ďaleko od tohto zrkadielka treba umiestniť čip snímacej kamery, aby sa doň zaostrovalo svetlo hviezdy vchádzajúce do ďalekohľadu?



$\boxed{30.}$ Určte pomer účinností dejov $ABCD$ a $A'B'C'D'$ s dvojatómovým plynom.



$\boxed{31.}$ Keď položíme drevenú dosku na zem a pustíme na ňu loptičku, odrazí sa do β-násobku pôvodnej výšky. Zoberieme dve takéto dosky a začneme ich ku sebe približovať vzájomnou rýchlosťou v. Teraz medzi ne vhodíme loptičku tak, aby sa odrážala (kolmo) medzi doskami. Aká bude rýchlosť loptičky tesne predtým, než ju dosky pripučia?

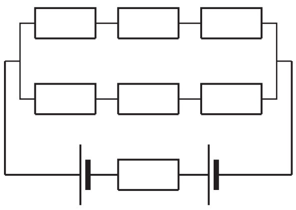
$\boxed{32.}$ Máme homogénne nabitú tyč dĺžky L. Na priamke danej touto tyčou má vo vzdialenosti L od jej konca intenzita elektrického poľa veľkosť E. Akú veľkosť má intenzita elektrického poľa vo vzdialenosti $L/7$ od konca tyče?

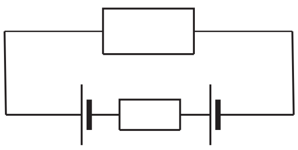
$\boxed{33.}$ Puk s hmotnosťou m má tvar valca s polomerom r. Roztočíme ho uhlovou rýchlosťou ω a položíme na ľad, s ktorým má koeficient trenia f. Ako dlho potrvá, kým sa puk zastaví?

Riešenia

$\boxed{1.}$ Kamión prejde polovicu svojej cesty za hodinu. Auto sa pohybuje o polovicu väčšou, teda 1,5-násobnou rýchlosťou, polovicu dráhy preto prejde za 1,5krát menší čas, čiže 40 minút. Ak teda vyrazí o 20 minút neskôr ako kamión, stretnú sa práve na polceste.

$\boxed{2.}$ Úlohu by sme mohli riešiť napísaním si Kirchhoffových zákonov pre obe slučky a oba uzly obvodu a riešením vzniknutých rovníc. Ak si však schému trochu prekreslíme (obrázok vľavo), rýchlo si všimneme, že horných šesť rezistorov vieme nahradiť jediným rezistorom s odporom 1,5 kΩ (obrázok vpravo). (Máme totiž dve paralelné vetvy, každú tvorenú troma sériovo zapojenými rezistormi.)





Dostali sme tak jednoduchý obvod s jedinou slučkou, s celkovým elektromotorickým napätím zdrojov $U = 18\mathrm{V}$ a celkovým odporom rezistorov $R = 2{,}5\mathrm{k\Omega}$. Prúd tečúci slučkou, a teda aj prúd tečúci prostredným rezistorom v pôvodnej schéme, bude teda z Ohmovho zákona

$$I = \frac{U}{R} = \frac{18\ \mathrm{V}}{2{,}5\ \mathrm{k\Omega}} = \frac{18}{2500}\ \mathrm{A} = 7{,}2\ \mathrm{mA}.$$

$\boxed{3.}$ Ak zanedbávame odpor vzduchu, pre každú kvapku vody opúšťajúcu koniec hadice platí zákon zachovania mechanickej energie. Kinetická energia týchto kvapiek však závisí iba od veľkosti ich rýchlosti, nie od jej smeru. Takisto, nezávisle od smeru, ktorým sme hadicu namierili, budú kvapky vody pri dopade na zem o H nižšie než na začiatku svojho letu. Stratia teda vždy rovnako veľa potenciálnej energie, alebo inými slovami, vždy získajú rovnako veľa kinetickej energie. Takže ich kinetická energia, a teda aj rýchlosť, bude pri dopade na zem rovnaká bez ohľadu na ich počiatočný smer.

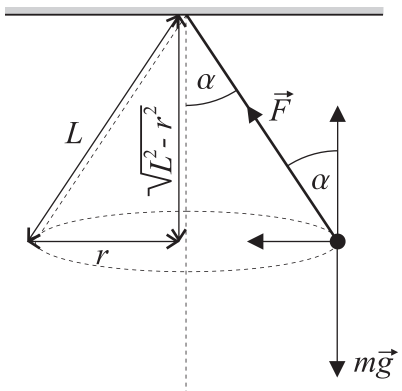
$\boxed{4.}$ Označme brzdnú dráhu prvého auta ako s. Môžete si vypočítať, že ak je jeho počiatočná rýchlosť v a jeho zrýchlenie a, bude platiť $s = \frac{v^2}{2a}$, ale tento poznatok nám v riešení vôbec netreba. Totiž, druhé auto síce začne brzdiť o pol sekundy (označme si tento čas Δt) neskôr, potom však na ubrzdenie bude potrebovať rovnakú dráhu.

Od momentu, keď začne prvé auto brzdiť, prejde dráhu s. Druhé auto prejde najprv dráhu $v\Delta t$, potom začne aj ono brzdiť a prejde dráhu s, čiže spolu prejde $s + v\Delta t$. Aby nedošlo k zrážke, autá musia mať na začiatku rozostup aspoň taký, ako je rozdiel týchto dvoch dráh, teda

$$d = (s + v\Delta t) - s = v\Delta t = 135\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}5\,\mathrm{s} = 18{,}75\,\mathrm{m}.$$

Úloha sa dala riešit aj bez toľkých zbytočných rečí, stačí si uvedomiť, že druhé auto musí začať brzdiť pred miestom, kde začal brzdiť vodič prvého auta. Kým však začne brzdiť, prejde vzdialenosť $v\Delta t$, rozostup teda musí byť väčší ako táto vzdialenosť.

$\boxed{5.}$ Na guličku pôsobia dve sily. Tiažová sila veľkosti mg a ťahová sila lana veľkosti F.



Gulička sa nepohybuje v zvislom smere, preto musí byť výslednica síl v tomto smere nulová. Z obrázka dostávame rovnosť $F\cos\alpha = mg$. Vo vodorovnom smere koná gulička rovnomerný pohyb po kružnici, a teda vodorovná zložka ťahovej sily musí slúžiť ako dostredivá sila, čo dáva

$$F\sin\alpha = \frac{mv^2}{r}.$$

Porovnaním týchto dvoch rovníc dostávame pre rýchlosť obiehajúcej guličky

$$v = \sqrt{rg\operatorname{tg}\alpha},$$

pre periódu obehu potom platí

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tg}\alpha}}.$$

Ostáva už len určiť uhol α, konkrétne jeho tangens. To sa nám ľahko podarí z obrázka a dostávame výsledok

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\frac{r}{\sqrt{L^2-r^2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2-r^2}}{g}}.$$

$\boxed{6.}$ Kým zovrú prvé dve tretiny mlieka, varič im dodáva teplo a tak ich zohrieva. Keď dosiahnu teplotu varu, pridáme do nich studené mlieko s práškom. Kým sa celá zmes znova neohreje na teplotu varu, celý výkon variča sa znova spotrebúva len na zohrievanie mlieka. (Tepelné straty zanedbávame.) Preto, bez ohľadu na presný postup varenia, od začiatku až po moment, keď celý puding zovrie, sa všetka energia dodaná varičom spotrebovala práve na zohriatie všetkého mlieka z teploty 5°C na teplotu varu 100°C.

Teraz si už len stačí napísať rovnice. Ak je čas od začiatku varenia až po zovretie finálnej zmesi t, celková energia dodaná varičom s výkonom P je $E = Pt$. Teplo potrebné na zohriatie pol litra čiže 0,5kg mlieka o 100°C−5°C = 95°C je

$$Q = mc\Delta T = 0{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 4{,}2\,\mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}\cdot 95\,\mathrm{K} = 199{,}5\,\mathrm{kJ}.$$

Pre čas t bude teda platiť

$$t = \frac{E}{P} = \frac{Q}{P} = \frac{199{,}5\,\mathrm{kJ}}{700\,\mathrm{W}} = 285\,\mathrm{s}.$$

Celkový čas varenia pudingu je podľa receptu o minútu dlhší, t.j. 345 s = 5 min 45 s.

$\boxed{7.}$ Ak zanedbáme útlm zvuku, tak energia každej zvukovej vlny ostáva rovnaká. Vlna z reproduktora má nad ihriskom tvar povrchu polgule, čiže polsféry. Odraz nebudeme uvažovať, lebo zvuk sa v tráve značne utlmí a prípadný odrazený zvuk príde do nášho ucha v rôznych časoch a pôsobí tak iba ako šum. Za týchto predpokladov je potom intenzita zvuku (t.j. výkon na plochu) nepriamo úmerná ploche vlnoplochy (čiže je nepriamo úmerná štvorcu vzdialenosti od zdroja zvuku) a priamo úmerná výkonu reproduktora.

Budeme uvažovať, že reproduktory majú rovnakú účinnosť, hoci pracujú pri rôznych príkonoch. Potom má hlasnejší reproduktor dvakrát väčší výkon ako tichší. Rovnakú intenzitu zvuku zabezpečím tak, že budem od hlasnejšieho reproduktora $\sqrt{2}$-krát ďalej ako od toho druhého. Na úsečke medzi reproduktormi tomu vyhovuje jedine bod vo vzdialenosti $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}d$ od hlasnejšieho repráku.

$\boxed{8.}$ Označme celkovú dĺžku rovných úsekov na trase z domu na chatu r, celkovú dĺžku úsekov dole kopcom d a celkovú dĺžku úsekov hore kopcom h. Na ceste z chaty domov pôjde Dano úsek h dole kopcom a úsek d hore kopcom. Nech sú rovinky, klesania a stúpania rozdelené akokoľvek, celkový čas, ktorý pôjde Dano z domu na chatu je

$$4 + \frac{2}{3}\,\mathrm{h} = \frac{r}{15\,\mathrm{km/h}} + \frac{d}{30\,\mathrm{km/h}} + \frac{h}{10\,\mathrm{km/h}} \qquad \Rightarrow \qquad 140\,\mathrm{km} = 2r + d + 3h$$

a celkový čas, ktorý Dano pôjde z chaty domov je

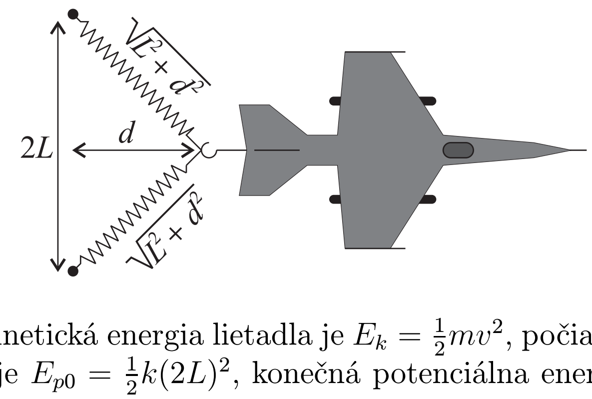
$$4\,\mathrm{h} = \frac{r}{15\,\mathrm{km/h}} + \frac{d}{10\,\mathrm{km/h}} + \frac{h}{30\,\mathrm{km/h}} \qquad \Rightarrow \qquad 120\,\mathrm{km} = 2r + 3d + h$$

Zdá sa teda, že máme dve rovnice a tri neznáme. Nás ale zaujíma iba celková dĺžka cesty, teda $r + d + h$. Keď sčítame tieto dve rovnice, dostaneme výsledok

$$r + d + h = 65\,\mathrm{km}.$$

$\boxed{9.}$ Vieme, že potenciálna energia pružiny s tuhosťou k a pokojovou dĺžkou y_0, natiahnutej do dĺžky $y > y_0$, je $E_p = \frac{1}{2}k(y - y_0)^2$. V našom prípade máme $y_0 = 0$, takže $E_p = \frac{1}{2}ky^2$.

Neuvažujme stratu energie pri zrážke lietadla s pružinou – táto strata bude malá, keďže pružina bude snáď oveľa ľahšia než lietadlo. Potom sa všetka jeho počiatočná kinetická energia premení na potenciálnu pružiny. Ak lietadlo prešlo pri brzdení dráhu d, z pravouhlého trojuholníku ako na obrázku a z Pytagorovej vety vypočítame dĺžku natiahnutej pružiny $y = 2\sqrt{L^2 + d^2}$.



Počiatočná kinetická energia lietadla je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, počiatočná potenciálna energia pružiny je $E_{p0} = \frac{1}{2}k(2L)^2$, konečná potenciálna energia pružiny $E_p = \frac{1}{2}ky^2$. Z rovností energií

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\left(2\sqrt{L^2 + d^2}\right)^2 - \frac{1}{2}k\,(2L)^2$$

potom dostávame

$$k = \frac{mv^2}{4d^2}.$$

$\boxed{10.}$ Predstavme si, že všetka páska je namotaná na jednej cievke, a začneme ju pomaly pretáčať na druhú. Kým je polomer kotúča pásky na prvej cievke väčší ako polomer kotúča na druhej, odmotaním jednej vrstvy pásky z prvej cievky namotáme viac než jednu vrstvu na druhú cievku. (Prvá cievka má totiž aj väčší obvod.) Inými slovami, druhý kotúč sa čo do polomeru zväčšuje rýchlejšie, než sa prvý zmenšuje. Preto sa medzera medzi kotúčmi zmenšuje. Toto sa deje, kým je prvý kotúč väčší než druhý – keď už bude páska za polovicou, vieme podobnou úvahou odvodiť, že sa medzera medzi páskami začne zväčšovať.

Ak je páska pridlhá, môže sa pri pretáčaní stať, že sa medzera medzi kotúčmi zmenší až na nulu a páska sa zasekne. Medzera medzi kotúčmi je najmenšia vtedy, keď je na oboch cievkach rovnako veľa pásky – kritické je teda, aby sa páska do magnetofónu zmestila v tomto momente.

Keď sú oba kotúče rovnako veľké, ich polomer môže byť nanajvýš $d/2$. Ak je šírka pásky b, maximálny možný objem pásky namotanej na kotúčoch bude objemom dvoch medzivalcí s vonkajším polomerom $d/2$, vnútorným polomerom r a výškou b:

$$V = 2\left(\pi(d/2)^2 b - \pi r^2 b\right) = \pi b\left(\frac{d^2}{2} - 2r^2\right).$$

Ak si označíme dĺžku pásky namotanej na kotúčoch ako L, jej objem sa dá napísať tiež ako $V = Lbh$. Dostávame teda

$$L = \frac{\pi(d^2 - 4r^2)}{2h}.$$

Toto je teda maximálna dĺžka používateľnej pásky. Neuvažovali sme síce kúsok pásky, ktorý práve nie je namotaný na žiadnom kotúči, ale ak je páska tenká, na kotúčoch jej bude oveľa viac ako v krátkom úseku medzi nimi.

$\boxed{11.}$ Pozrime sa na situáciu z pohľadu hviezdy. Tesne po vypustení má sonda nejakú rýchlosť a bude sa ďalej pohybovať nezávisle od kozmickej lode, teda podľa Keplerových zákonov. Ľahko si rozmyslíme, že ak by sonda mala nejakú rýchlosť v tangenciálnom smere (v smere kolmom na spojnicu hviezda-sonda), začala by sa pohybovať po elipse, prípadne inej kužeľosečke, s jedným ohniskom vo hviezde. To by však znamenalo, že by sa s hviezdou nikdy nezrazila. Zrazí sa s ňou iba vtedy, keď je jej tangenciálna rýchlosť nulová a jej dráha sa degeneruje na úsečku. (V skutočnosti by sa dráha nemusela degenerovať úplne na úsečku, stačilo by, keby bola tangenciálna rýchlosť veľmi malá a dráha by bola veľmi tenká elipsa pretínajúca povrch hviezdy. Keďže však zadanie hovorí, že rozmery hviezdy sú malé, musela by byť táto elipsa naozaj veľmi tenká. Preto si povieme, že tangenciálna rýchlosť musí byť prakticky nulová.)

Kozmická loď sa pohybuje okolo hviezdy po kružnici nejakou rýchlosťou v. Ak má mať sonda po vypustení nulovú tangenciálnu rýchlosť, musí jej loď (vo svojej vzťažnej sústave) udeliť aspoň rýchlosť v smerom proti svojmu pohybu. V takom prípade bude mať sonda po vypustení vzhľadom na hviezdu nulovú rýchlosť a po čase na ňu spadne.

Stačí nám už len zistiť kruhovú rýchlosť kozmickej lode v. Tú si buď ešte pamätáme zo školy, alebo ju ľahko zistíme z rovnosti gravitačnej sily pôsobiacej na loď a dostredivej sily potrebnej na to, aby sa pohybovala po kružnici s polomerom R.

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

$\boxed{12.}$ Ak kvapka padá so zrýchlením g, za čas t prejde dráhu $\frac{1}{2}gt^2$. Ak sa vrchná kvapka na fotke odlepila od odkvapu v čase t pred odfotením a ak je perióda medzi odkvapnutiami kvapiek Δt, kvapky na fotke padajú po dobu postupne t, $t + \Delta t$ a $t + 2\Delta t$ a sú teda od odkvapu vzdialené o

$$\frac{1}{2}gt^2, \qquad \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{2}g(t+2\Delta t)^2.$$

Ak je odkvap vo výške k nad horným okrajom fotky (v rovnakých jednotkách, v akých sú vyznačené vzdialenosti na obrázku), z obrázku potom ľahko vyčítame, že vzdialenosti kvapiek od odkvapu sú $k + 1$, $k + 4$ a $k + 8$. Pre vzdialenosť každej kvapky od odkvapu sme teda dostali dve rôzne vyjadrenia. Dostávame tak tri rovnice a je už len na našej šikovnosti vyjadriť z nich k nejakým bezbolestným spôsobom. Ak si napríklad označíme $\frac{t}{\Delta t} = q$ a $\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = C$, rovnice sa nám zjednodušia na

$$\begin{aligned} k+1 &= \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2q^2 = Cq^2 \\ k+4 &= \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2(q+1)^2 = C(q+1)^2 \\ k+8 &= \frac{1}{2}g(t+2\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2(q+2)^2 = C(q+2)^2. \end{aligned}$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej a druhej rovnice od tretej dostávame

$$\begin{aligned} 3 &= C((q+1)^2 - q^2) = C(2q+1) \\ 4 &= C((q+2)^2 - (q+1)^2) = C(2q+3). \end{aligned}$$

Odčítaním vzniknutých rovníc dostaneme $1 = 2C$, čiže $C = \frac{1}{2}$. Dosadením do jednej z rovníc dostávame $q = \frac{5}{2}$ a dosadením za C aj q do prvej z pôvodných troch rovníc dostávame

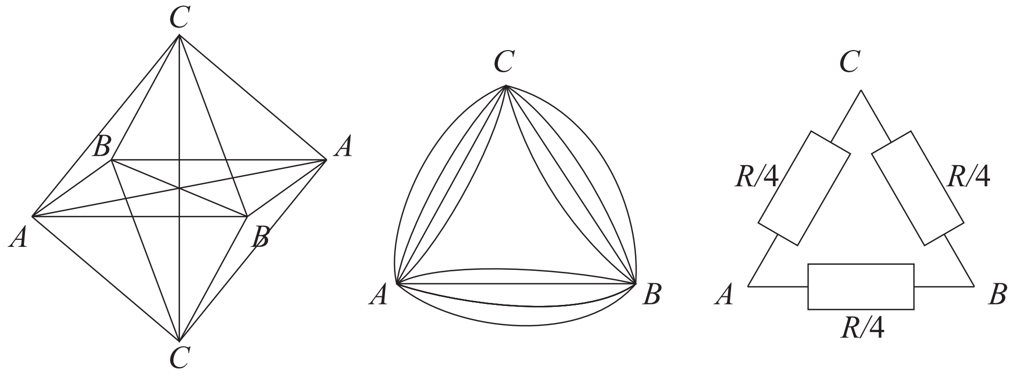
$$k = Cq^2 - 1 = \frac{1}{2}\frac{5^2}{2^2} - 1 = \frac{25}{8} - 1 = \frac{17}{8}.$$

Odkvap sa teda nachádza vo vzdialenosti $\frac{17}{8}$ od horného okraja fotky, vyjadrenej v rovnakých jednotkách ako vzdialenosti na fotke.

Úloha sa dala riešiť aj jednoduchšie, a to graficky. Ak si uvedomíme, že graf rýchlosti kvapky od času je priamka prechádzajúca nulou, a ňou prejdená dráha je úmerná ploche pod touto priamkou, správny výsledok sa dá vyčítať zopár jednoduchými úvahami a manipuláciami s obsahmi trojuholníčkov. Skúste si to!

$\boxed{13.}$ Ak vodivo spojíme dva protiľahlé vrcholy, tak v nich bude vždy rovnaký potenciál a môžeme ich uvažovať ako jeden a ten istý bod v schéme. Osemsten má šesť vrcholov a teda tri takéto páry protiľahlých vrcholov, označme si tieto páry A, B a C. (Situácia je načrtnutá na ľavom obrázku. Pre prehľadnosť obrázku sa vodiče spájajúce páry protiľahlých bodov pretínajú, hoci v skutočnosti spojené nie sú.)

Vezmime si nejaký vrchol označený A. Z neho vedie jeden rezistor do oboch vrcholov B a do oboch vrcholov C. Z druhého vrchola A vedie tiež jeden rezistor do každého z vrcholov B a C. Ak teda spojené páry vrcholov považujeme za body, z A budú viesť štyri (paralelné) rezistory do B a štyri do C. Podobne aj medzi B a C budú štyri paralelné rezistory.



Takto prekreslená schéma vyzerá oveľa jednoduchšie. Dva susedné vrcholy v pôvodnom osemstene zodpovedajú dvom susedným vrcholom v novej schéme, no a odpor medzi dvoma susednými vrcholmi v novej schéme už vypočítame jednoducho pomocou vzťahov pre odpor paralelného a sériového zapojenia. Napríklad medzi A a B máme paralelne zapojené odpory $R/4$ a $R/4 + R/4 =$

$R/2$, čo dáva výsledný odpor

$$R_v = \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{4}{R}} = \frac{R}{6}.$$

$\boxed{14.}$ Označme si smernice polpriamok v pV-diagrame q a r, pričom q bude smernica tej strmšej. Nižšia izoterma teda obsahuje body (V_1, qV_1) a (V_2, rV_2). Na izoterme platí $pV = $ konšt., odkiaľ máme vzťah $qV_1^2 = rV_2^2$. Nuž, ale rovnako môžeme argumentovať aj pre druhú izotermu, odkiaľ dostávame $qV_2^2 = rV_x^2$. Teda platí

$$V_x = \sqrt{\frac{q}{r}} V_2 = \frac{V_2^2}{V_1}.$$

$\boxed{15.}$ Aby bola každá podpera namáhaná rovnakou silou, musí byť spoločné ťažisko dosky a Mirka presne v ťažisku trojuholníka tvoreného podperami. Prečo? Označme si spoločné ťažisko dosky a Mirka ako T. Teraz si môžeme predstaviť, že celá tiaž G dosky a Mirka pôsobí v bode T. Ak by sme si celú situáciu obrátili hore nohami, sila G by vlastne podopierala dosku, na ktorú zhora pôsobia tri podpery, každá rovnakou silou F. Ak si namiesto podpier predstavíme tri rovnaké kamene s tiažou F, bude už úplne jasné, že ich ťažisko musí byť akurát v bode T. Inými slovami, spoločné ťažisko T dosky a Mirka musí byť práve v ťažisku trojuholníka daného podperami.

Teraz je už úloha jednoduchá. Podpery sú v bodoch $[1,4]$, $[2,1]$ a $[6,4]$, ich ťažisko je teda v bode

$$T = \frac{[1,4] + [2,1] + [6,4]}{3} = \left[\frac{1+2+6}{3}, \frac{4+1+4}{3}\right] = [3,3].$$

Mirko je v bode $[x,y]$ a stred (ťažisko) dosky v bode $[\frac{7}{2}, \frac{5}{2}]$. Aby bolo ich spoločné ťažisko v bode $[3,3]$, musí platiť

$$[3,3] = \frac{50[x,y] + 150[\frac{7}{2}, \frac{5}{2}]}{50 + 150} = \left[\frac{2x+21}{8}, \frac{2y+15}{8}\right],$$

z čoho dostávame

$$[x,y] = \tfrac{1}{2}(8[3,3] - [21,15]) = [\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{2}].$$

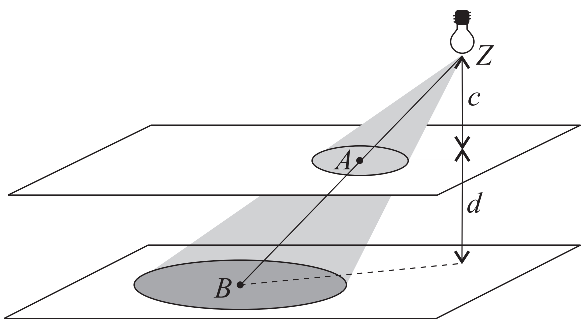
Druhá časť úlohy sa dala riešiť aj graficky. Stačí si uvedomiť, že keďže pomer hmotností Mirka a dosky je 1 : 3, vzdialenosti ich ťažísk od ich spoločného ťažiska musia byť v opačnom pomere 3 : 1. Dostali by sme ten istý výsledok bez toľkého počítania.

$\boxed{16.}$ Predstavme si kúsok bubliny tvaru časti gule s polomerom R vyrobený z mydlovej vody s povrchovým napätím σ. Aby bol tento kúsok v pokoji, musí byť na jej vnútornej strane o $\frac{4\sigma}{R}$ väčší tlak než na vonkajšej.

Majme teraz naše dve spojené bubliny s polomermi r a R, kde $R > r$. Ak je atmosférický tlak p_a, v menšej z nich bude tlak $p_r = p_a + \frac{4\sigma}{r}$ a vo väčšej bude tlak $p_R = p_a + \frac{4\sigma}{R}$. V menšej bude väčší tlak, ich spoločný povrch sa teda preliači smerom do väčšej a jeho polomer krivosti ρ bude taký, aby $p_r - p_R = \frac{4\sigma}{\rho}$. Riešením rovnice pre ρ dostávame

$$\rho = \frac{Rr}{R - r}.$$

$\boxed{17.}$ Keďže d je vzdialenosť dosky od tienidla, označme si vzdialenosť zdroja od dosky ako c. Keď budeme zdroj posúvať v smere rovnobežnom s doskou, táto kolmá vzdialenosť sa nemení. Pomer kolmých vzdialeností zdroja od dosky a zdroja od tienidla bude teda stále $\frac{c}{c+d}$.

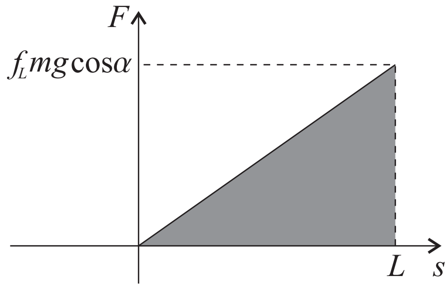


Pozrime sa teraz na hocijaký lúč vychádzajúci zo zdroja Z, pretínajúci rovinu dosky v bode A a dopadajúci na tienidlo v bode B. Zvislá vzdialenosť bodov Z a B a zvislá vzdialenosť bodov Z a A budú v pomere $\frac{c+d}{c}$. Z podobnosti trojuholníkov dostávame, že vodorovná vzdialenosť bodov Z a B a vodorovná vzdialenosť bodov Z a A budú tiež v pomere $\frac{c+d}{c}$. To znamená, že ak sa na celú situáciu pozrieme zhora, bude bod B len obrazom bodu A v rovnoľahlosti so stredom v Z a koeficientom $\frac{c+d}{c}$.

Každému osvetlenému bodu B na tienidle zodpovedá nejaký bod diery A, ktorým prešiel lúč osvetľujúci B. Naopak, každému bodu diery A takto zodpovedá nejaký osvetlený bod B na tienidle. To znamená, že osvetlená plocha na tienidle bude práve obrazom diery v rovnoľahlosti so stredom v Z a koeficientom $\frac{c+d}{c}$. Inými slovami, bude to kruh s polomerom $\frac{c+d}{c}$krát väčším než je polomer diery.

Keďže hodnota $\frac{c+d}{c}$ je konštanta a nezávisí od polohy zdroja (ak ho posúvame iba rovnobežne s doskou), osvetlený kruh bude stále rovnako veľký. Je zadané, že na začiatku má polomer R, taký polomer bude mať potom vždy a jeho plocha bude πR^2.

$\boxed{18.}$ Vieme, že práca, ktorú vykoná premenlivá sila na dráhe medzi bodmi x_1 a x_2, je rovná ploche pod grafom závislosti sily od polohy. Ak sila pôsobí proti pohybu, je potrebné túto prácu vykonať. V našom prípade je trecia sila priamo úmerná prejdenej vzdialenosti a jej grafom bude priamka.



Práca, ktorú je potrebné vykonať proti trecej sile na dráhe L, je rovná ploche vyšrafovaného trojuholníka, ktorá je

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (f_L mg \cos\alpha) = \frac{1}{2} kL^2 mg \cos\alpha.$$

Keď teleso zastane, nemá žiadnu kinetickú energiu. Podľa zákona zachovania energie sa celá zmena potenciálnej energie musela minúť sa prácu proti trecej sile. Inak povedané,

$$mgL \sin\alpha = \frac{1}{2} L^2 kmg \cos\alpha,$$

z čoho

$$L = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{k}.$$

Dostali sme aj riešenie $L = 0$, vtedy je však teleso na začiatku naklonenej roviny. Nadšenci si môžu rozmyslieť, ako táto úloha súvisí s pružinkami a či by sa nedala riešiť aj jednoduchšie.

$\boxed{19.}$ Ak je hĺbka jamy h, čas, za ktorý padne kameň voľným pádom na dno, je $t_1 = \sqrt{2h/g}$. Čas, za ktorý sa potom zvuk z dna jamy dostane rýchlosťou c naspäť k ústiu, je $t_2 = h/c$. Celkovo teda chalani odmerajú čas

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c},$$

z čoho

$$h^2 - 2h\left(tc + \frac{c^2}{g}\right) + t^2c^2 = 0.$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu a s ňou dve riešenia

$$h = ct + \frac{c^2}{g} \pm \sqrt{\frac{c^4}{g^2} + \frac{2c^3 t}{g}}.$$

Správne bude zrejme riešenie so znamienkom mínus. Všetky členy sú totiž kladné, preto riešenie s plusom by bolo väčšie než prvý z nich, ct. Ale ak by bola jama hlbšia než ct, za čas t by ňou ani neprešiel zvuk dopadu.

$\boxed{20.}$ Označme rýchlosť náboja v, jeho hybnosť je teda mv. Ak náboj v kuse dreva uviazne, budú sa po zrážke pohybovať spoločnou rýchlosťou w a ich spoločná hybnosť bude $(M+m)w$. Zo zákona zachovania hybnosti $mv = (M+m)w$ dostávame

$$w = \frac{m}{M+m}v.$$

Kus dreva spolu s nábojom sa teda začne pohybovať rýchlosťou w. Ak sa špagát nepretrhne, začne sa drevo s nábojom pohybovať touto rýchlosťou po kružnici s polomerom l. Na pohyb po kružnici však treba dostredivú silu o veľkosti

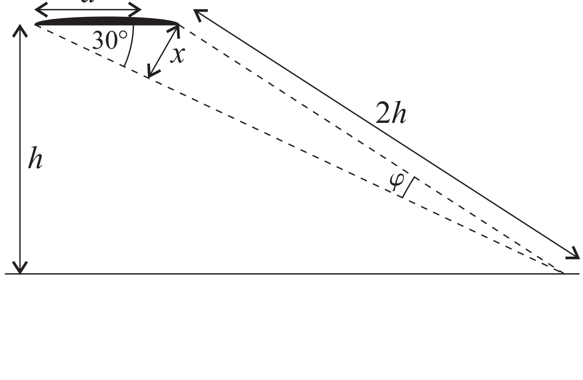
$$F_d = \frac{(M+m)w^2}{l} = \frac{m^2v^2}{(M+m)l}.$$

Na drevo s nábojom navyše pôsobí tiažová sila $F_g = (M+m)g$ smerom nadol. Sila, ktorou pôsobí špagát na drevo, musí byť po odčítaní tejto tiažovej sily práve rovná dostredivej. Inými slovami, špagát musí na drevo pôsobiť silou $F_g + F_d$. No a aby sa nepretrhol, musí platiť $F_g + F_d \leq F$. Z tejto podmienky už vieme vyjadriť vzťah pre rýchlosť v.

$$\begin{aligned} F_d &\leq F - F_g \\ \frac{m^2v^2}{(M+m)l} &\leq F - (M+m)g \\ v^2 &\leq \frac{(F-(M+m)g)(M+m)l}{m^2} \\ v &\leq \frac{M+m}{m}\sqrt{\left(\tfrac{F}{M+m} - g\right)l}. \end{aligned}$$

$\boxed{21.}$ Ak frisbee na nejaké miesto nevrhá tieň, ale iba polotieň, znamená to, že pri pohľade z tohoto miesta nezakrýva celý slnečný kotúč, iba jeho časť.

Ak sa pri pohľade z nejakého miesta frisbee hoci len čiastočne prekrýva so slnkom, bude sa tiež nachádzať približne 30° nad obzorom. Ak je vo výške h, bude teda vo vzdialenosti $\frac{h}{\sin 30°} = \frac{h}{1/2} = 2h$ od pozorovateľa.



Navyše sa nám bude zdať sploštené vo vertikálnom smere, t.j. bude mať väčší uhlový priemer na šírku než na výšku. Z obrázku vidíme, že ak si jeho uhlový priemer na výšku označíme φ, potom

$$2h\sin\varphi = x = d\sin 30^\circ = \frac{d}{2},$$

kde $d = 30$ cm je priemer frisbee. Uhol φ však bude pomerne malý, preto môžeme použiť aproximáciu $\sin\varphi \approx \varphi$ a dostávame

$$\varphi \approx \sin\varphi = \frac{d}{4h}.$$

Aby frisbee nemohlo zakryť celý slnečný kotúč, musí zrejme platiť $\varphi < 30'$, čiže

$$\frac{d}{4h} < 30'$$

$$h > \frac{d}{120'} = \frac{d}{2^\circ} = \frac{d}{2\frac{\pi}{180}} = \frac{90d}{\pi} = \frac{27}{\pi}\ \text{m} \approx 8{,}6\ \text{m}.$$

$\boxed{22.}$ Zrejme najrýchlejšie môže plachetnica plávať priamo po vetre. Ak plachetnica pláva rýchlosťou u (pričom $0 < u < v$), tak veľkosť odporovej sily v plachtách (predpokladáme turbulentné prúdenie) je $F_p = \frac{1}{2}C_pS_p\rho_{\text{vzduch}}(v-u)^2$ a pôsobí vpred. Pri plavbe maximálnou (konštantnou) rýchlosťou musí na trup lode pôsobiť rovnako veľká odporová sila od vody, ktorá pôsobí dozadu. Jej veľkosť pri rýchlosti u je $F_t = \frac{1}{2}C_tS_t\rho_{\text{voda}}u^2$. Má teda platiť $F_p = F_v$. Riešenie tejto rovnice vyhovujúce podmienke $0 < u < v$ je

$$\frac{\sqrt{C_pS_p\rho_{\text{vzduch}}}}{\sqrt{C_pS_p\rho_{\text{vzduch}}} + \sqrt{C_tS_t\rho_{\text{voda}}}}\, v.$$

$\boxed{23.}$ Najprv zavesme závažie na všetky tri pružiny, zapojme ich teda „vedľa seba“. Závažie teraz posuňme o Δx nadol. Výsledná sila, ktorou pružiny pôsobia na závažie, je $3k\Delta x$, lebo každá pružina sa natiahla o Δx a pôsobí silou $k\Delta x$. Znamená to, že takto uložené pružiny sa správajú ako jedna pružinka s tuhosťou $3k$.

Zavesme teraz pružiny postupne na seba, závažie zavesme na poslednú a posuňme ho o Δx smerom nadol. Spodná pružina sa natiahne o Δx_1, prostredná o Δx_2. Spodná pružina takto pôsobí na prostrednú silou $k\Delta x_1$, prostredná na spodnú silou $k\Delta x_2$. Aby boli pružiny v rovnováhe, musia sa tieto dve sily rovnať a teda $\Delta x_1 = \Delta x_2$. Podobne dostaneme pre natiahnutie hornej pružiny $\Delta x_3 = \Delta x_2$. Každá z pružín sa preto natiahne o tretinu vzdialenosti Δx. Na závažie pôsobí spodná pružina silou $k\Delta x/3$ a takáto sústava sa správa ako pružina s tuhosťou $k/3$.

Vieme, že ak teleso hmotnosti m zavesíme na pružinu tuhosti k, bude kmitať s periódou $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Pre peródu T_1 je táto tuhosť $3k$, pre periódu T_2 je to $k/3$, ich pomer je teda

$$\eta = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k/3}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{3}} = \frac{1}{3}.$$

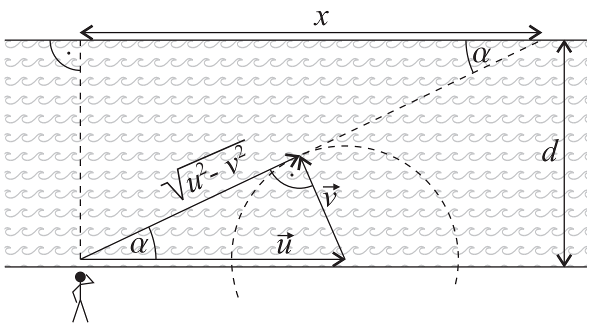
Skúste sa zamyslieť nad tým, ako to bude vyzerať, keď budeme takto „vedľa seba“, „za seba“ a rôzne kombinovane prikladať rôzne veľa pružín s rôznou tuhosťou. Vyskúšajte najskôr dve pružinky, potom tri, atď. Existuje nejaké jednoduché pravidlo, ako je to napríklad pri zapájaní odporov?

$\boxed{24.}$ Ak meriame odpor medzi dvoma z našich N uzlov (nazvime ich A a B), zvyšných $N-2$ z nich (nazvime ich vnútorné) je úplne rovnocenných: z každého z nich ide jeden odpor do A, jeden do B, a jeden do každého zvyšného uzlu. Inak povedané, ak medzi sebou dva vnútorné uzly vymeníme, nikto si nič nevšimne. Z toho vyplýva, že ak meriame odpor medzi A a B, vo všetkých vnútorných uzloch bude rovnaký potenciál. Preto môžeme všetky odpory medzi vnútornými uzlami zo schémy vyhodiť – aj tak nimi nebude tiecť žiaden prúd.

Takto sa nám schéma značne zjednodušila. Jediné, čo v nej zostalo, sú odpory z A do všetkých vnútorných uzlov, odpory z B do všetkých vnútorných uzlov, a odpor medzi A a B. Máme teda $N-1$ paralelných vetiev medzi A a B, jedna má odpor R a každá zo zvyšných sa skladá z dvoch sériovo zapojených odporov R. Celkový odpor medzi A a B bude potom

$$r = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \cdots + \frac{1}{2R}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + (N-2)\frac{1}{2R}} = \frac{1}{\frac{N}{2R}} = \frac{2R}{N}.$$

$\boxed{25.}$ Výsledná Tomášova rýchlosť vzhľadom na breh bude vektorovým súčtom rýchlosti vody a jeho rýchlosti plávania vzhľadom na vodu. Rýchlosť vody je pevne daná, má veľkosť u a smer dole prúdom. Rýchlosť plávania si však Tomáš môže zvoliť takmer ľubovoľne, jedinou podmienkou je, že jej veľkosť musí byť menšia než v. Znázornené graficky, vektor jeho výslednej rýchlosti musí ležať v naznačenom kruhu na obrázku.



Ak chce Tomáš k druhému brehu priplávať čo najbližšie k protiľahlému bodu, musí aj vektor jeho rýchlosti smerovať čo najbližšie k protiľahlému bodu. Zároveň musí vektor jeho rýchlosti ležať v spomínanom kruhu – z obrázku potom vidno, že bude ležať na jeho dotyčnici. Tomášova výsledná rýchlosť bude potom kolmá na rýchlosť jeho plávania, z Pytagorovej vety bude mať veľkosť $w = \sqrt{u^2 - v^2}$.

Z podobnosti trojuholníkov potom dostaneme

$$\frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v} = \frac{x}{d},$$

čiže najbližšia vzdialenosť od protiľahlého bodu, v akej vie Tomáš priplávať ku druhému brehu, je

$$x = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v}\, d.$$

$\boxed{26.}$ V oboch prípadoch sa cyklista pohybuje rovnomerne, takže všetka práca, ktorú vykoná, sa spotrebuje na prekonávanie odporových síl. Výkon cyklistu je teda rovný výkonu síl, ktoré ho brzdia. Vieme, že ak sila F pôsobí na teleso, ktoré sa pohybuje rýchlosťou v, jej výkon je Fv. V prípade vodorovnej cesty brzdí cyklistu odporová sila, ktorá je úmerná druhej mocnine cyklistovej rýchlosti. Konštanta úmernosti v sebe skrýva hustotu vzduchu, tvar a veľkosť cyklistu a označme ju κ. Podľa zadania je rovnaká v oboch prípadoch. Pre cyklistov výkon P dostaneme (z podmienky rovnosti výkonu cyklistu a výkonu odporových síl)

$$P = \kappa v_1^3.$$

V prípade cesty dole kopcom cyklistovi pomáha zložka tiažovej sily, výsledná sila brzdiaca jeho pohyb je menšia a dostávame

$$P = (\kappa v_2^2 - mg\sin\alpha)v_2.$$

Z prvej rovnice vyjadríme neznámy koeficient κ a dosadíme do druhej rovnice

$$P = v_2\left(P\frac{v_2^2}{v_1^3} - mg\sin\alpha\right),$$

z čoho dostaneme výkon cyklistu

$$P = \frac{mgv_2 \sin\alpha}{v_2^3/v_1^3 - 1}.$$

$\boxed{27.}$ Nech sa kozmická loď v skutočnosti pohybuje rýchlosťou v. Pozrime sa na nejaký malý úsek jej letu, kým sa ešte približuje k Zemi. Ak má tento úsek dĺžku L, loď ho prejde za čas L/v. Pozorovateľom na Zemi sa však zdá, že ho prešla rýchlejšie. Ako je to možné? Jediná ich informácia o polohe lode je totiž svetlo, ktoré sa od nej odráža (alebo ktoré sama vydáva). Tomuto svetlu tiež trvá nejaký čas, kým príde od lodi k Zemi, pretože sa samo šíri konečnou rýchlosťou c. Navyše svetlu, ktoré nesie informáciu o lodi na začiatku spomínaného úseku, bude trvať let k Zemi dlhšie, ako svetlu nesúcemu informáciu o lodi na konci úseku. Konkrétne mu to bude trvať o L/c dlhšie, pretože musí prekonať o L dlhšiu dráhu.

Takže lodi síce trvá čas L/v, kým sa priblíži o vzdialenosť L, ale signál o tom, že svoju vzdialenosť zmenila o L, príde na Zem už po čase $L/v - L/c$. Je to vlastne zdanlivý čas (ktorý vníma pozorovateľ na Zemi), za ktorý sa loď priblíži o vzdialenosť L bližšie k Zemi. Zdanlivá rýchlosť približovania lode bude teda

$$w = \frac{L}{\frac{L}{v} - \frac{L}{c}} = \frac{vc}{c - v}.$$

Ak $w = 2c$, dostávame $v = \frac{2}{3}c$.

Pri vzďaľovaní lode sa bude diať niečo podobné, až na to, že signály z lode sa budú čím ďalej tým viac oneskorovať. Konkrétne, loď sa vzdiali o vzdialenosť L za čas L/v, ale správa o tom príde na Zem až o $L/v + L/c$ neskôr. Zdanlivá rýchlosť vzďaľovania lode bude

$$w' = \frac{L}{\frac{L}{v} + \frac{L}{c}} = \frac{vc}{c + v} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}}c = \frac{2}{5}c.$$

$\boxed{28.}$ Ak sa bowlingová guľa pohybuje rýchlosťou v a má spätnú rotáciu ω, bod gule, ktorý sa dotýka bowlingovej dráhy, má rýchlosť $w = R\omega + v$ rovnakým smerom, ako stred gule. Preto trecia sila pôsobí na guľu opačným smerom. Jej veľkosť označme T. Trecia sila spomaľuje pohyb gule smerom dopredu a aj jej otáčavý pohyb. Zrýchlenie posuvného pohybu je T/M, uhlové zrýchlenie otáčavého pohybu je TR/I, kde I je moment zotrvačnosti gule. Rýchlosť a uhlová rýchlosť gule v čase t sú teda

$$v(t) = v - \frac{T}{M}t \qquad \text{a} \qquad \omega(t) = \omega - \frac{TR}{I}t.$$

Guľa sa začne pohybovať naspäť v prípade, že stred gule úplne zastane skôr, ako dotykový bod. Ten sa v takom prípade bude stále pohybovať smerom dopredu a trecia sila bude stále zrýchľovať guľu smerom dozadu. Dopredný pohyb gule zastane v čase $t' = \frac{Mv}{T}$ a bod dotyku bude mať v tom čase rýchlosť $R.\omega(t')$. Tá má byť stále dopredu, teda väčšia ako nula, čím dostávame podmienku

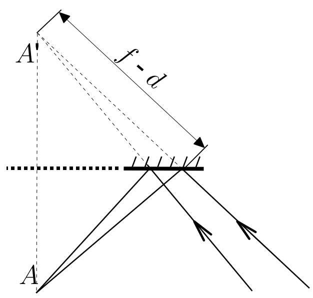
$$R\left(\omega - \frac{TR}{I}\frac{Mv}{T}\right) > 0$$
$$\omega > \frac{MR}{I}v.$$

Po dosadení vzťahu pre moment zotrvačnosti gule $I = \frac{2}{5}MR^2$ dostávame

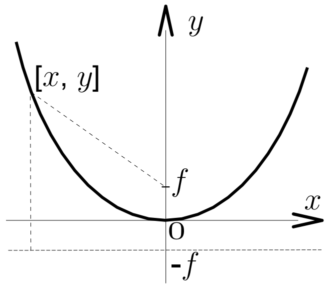
$$\omega > \frac{5}{2}\frac{v}{R}.$$

Ak poznáte zákon zachovania momentu hybnosti, môžete skúsiť vymyslieť aj kratšie riešenie.

$\boxed{29.}$ Najprv zodpovedzme otázku, kde má byť umiestnený čip. Totiž tam, kde sa všetky lúče zbiehajú do jedného bodu a vytvárajú skutočný obraz hviezdy v diaľke. Zrejme nám stačí určiť toto miesto iba pre lúče prichádzajúce do ďalekohľadu rovnobežne s rotačnou osou zrkadla, lebo máličko odchýlené lúče sa zobrazia iba máličko vedľa. Ďalej si treba uvedomiť, že rovinné zrkadlo iba zmení smer všetkých lúčov, ale nezmení vzdialenosť, v ktorej sa od neho pretnú:



V akej vzdialenosti sa teda pretnú lúče rovnobežné s osou prístroja? To je predsa jednoduché. Veď parabola je množina takých bodov v rovine, ktoré sú rovnako vzdialené od vybraného bodu v tejto rovine a vybranej priamky, ktorá neprechádza týmto bodom a tiež leží v danej rovine. Navyše o tomto vybranom bode vieme, že je to ohnisko pre lúče prichádzajúce rovnobežne s osou y.



Stačí nám teda určiť parabolu cez parameter f z obrázku. Množina vyhovujúcich bodov je popísaná rovnicou

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+(y-f)^2} &= (y+f)\\ x^2 &= (y+f)^2-(y-f)^2 = 4fy\\ y &= \frac{1}{4f}x^2.\end{aligned}$$

Teda náš ďalekohľad má ohniskovú vzdialenosť $f = \frac{1}{4a}$ a čip treba dať do vzdialenosti $f - d = \frac{1}{4a} - d$ od rovinného zrkadla.

$\boxed{30.}$ Spočítajme účinnosť druhého deja. Účinnosť prvého deja tým získame tiež, stačí, ak dosadíme $k = 2$. Označme si teplotu plynu v bode $A' = (p, V)$ písmenom T. Z pV-diagramu vidíme, že plyn vykoná počas jedného cyklu prácu $W = (k-1)^2 pV$. Keďže účinnosť deja s plynom je definovaná ako $\eta = \frac{W}{Q}$, kde Q je teplo dodané plynu počas jedného cyklu, už stačí iba určiť Q.

Cyklus plynu pozostáva z izochory $A' \to B' = (kp, V)$. Pri ňom teplota plynu stále stúpa vďaka dodávanému teplu. Zo stavovej rovnice plynu vieme, že teplota plynu v B' bude kT, zmena vnútornej energie $\Delta U = Q_{A'B'} = \frac{5}{2}Nk_B(k-1)T = \frac{5}{2}pV(k-1)$. (Kde k_B je Boltzmannova konštanta a N počet molekúl.)

Dej $B' \to C' = (kp, kV)$ je izobarický. Teplota plynu pri ňom opäť stále stúpa a plyn zároveň koná prácu. Teda $Q_{B'C'} = \Delta U + W = \frac{5}{2}Nk_B(k^2-k)T + kp(k-1)V = \frac{7}{2}kpV(k-1)$.

Pri deji $C' \to D' = (p, kV)$ plyn teplo odovzdáva, lebo jeho vnútorná energia klesá a nekoná prácu. Pri deji $D' \to A'$ plyn teplo tiež iba odovzdáva, lebo sa mu znižuje teplota napriek tomu, že je na ňom konaná práca. Účinnosť cyklu teda je $\eta(k) = \frac{W}{Q_{A'B'}+Q_{B'C'}} = \frac{2(k-1)}{5+7k}$. Hľadaný pomer účinností je

$$\frac{\eta(2)}{\eta(k)} = \frac{\frac{2}{5+14}}{\frac{2(k-1)}{5+7k}} = \frac{5+7k}{19(k-1)}.$$

$\boxed{31.}$ Zo zadania vieme, že loptička bude mať po odraze β-násobne väčšiu kinetickú energiu ako pred dopadom ($\beta < 1$). Teda jej rýchlosť vzhľadom na dosku bude po odraze $\sqrt{\beta}$-násobkom dopadovej rýchlosti. Keď budeme dosky približovať k sebe, tak sa bude loptička pohybovať od dosky k doske. Ak zanedbáme čas potrebný na odraz, loptička vykoná nekonečne veľa odrazov, kým sa dosky k sebe priblížia natoľko, že medzi nimi ostane už iba miesto na loptičku. Treba si uvedomiť, že toto nekonečné množstvo odrazov sa udeje v konečnom čase, rýchlosť približovania sa dosiek je predsa konštantná!

Nech má loptička po n odrazoch od každej z dosiek smer pohybu nahor a rýchlosť u_n vzhľadom na spodnú dosku. Potom jej rýchlosť vzhľadom na hornú dosku je $v + u_n$ a po odraze má rýchlosť $\sqrt{\beta}(v + u_n)$ od hornej dosky a teda rýchlosť $\sqrt{\beta}(v + u_n) + v$ voči spodnej doske. Po odraze od spodnej dosky bude mať rýchlosť $u_{n+1} = \sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}(v + u_n) + v)$ od spodnej dosky.

Keď sú dosky blízko pri sebe, loptička už má za sebou veľké množstvo zrážok. Ak predpokladáme, že jej rýchlosť po odraze od spodnej dosky sa ustálila na nejakej hodnote u, pre veľké n máme $u_n \approx u_{n+1} \approx u$, a teda

$$u = \sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}(v + u) + v)$$
$$u = \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \beta}\sqrt{\beta}\, v = \frac{\sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\, v.$$

Ak nás zaujíma rýchlosť pri pohybe smerom ku spodnej doske, táto je

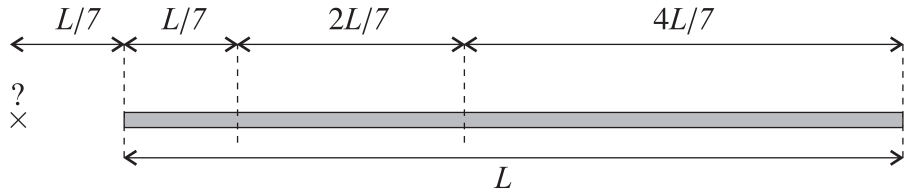
$$u' = \frac{u}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{1 - \sqrt{\beta}}\, v.$$

Nadšenci si môžu rozmyslieť, prečo (a za akých podmienok) sa rýchlosť loptičky bude naozaj blížiť k tejto hodnote.

$\boxed{32.}$ Označme si dĺžkovú hustotu náboja na našej tyči ako λ a situáciu si trochu zovšeobecnime. Predstavme si, že máme homogénne nabitú tyč s rovnakou hustotou náboja λ a dĺžkou αL. Intenzitu elektrického poľa vo vzdialenosti αL od jedného jej konca označme ako E_α. Zadanie nám hovorí, že $E_1 = E$.

Situácia s E_α je však len α-krát zväčšená (teda vlastne zmenšená, ak $\alpha < 1$) situácia s E_1. Ak by sme zobrali tyč dĺžky L vo vzdialenosti L od nás, nasekali ju na kúsky a každý jej kúsok α-krát vzdialili a α-krát zväčšili, dostali by sme tyč dĺžky αL vo vzdialenosti αL od nás. Každý spomínaný kúsok by pritom zväčšil svoj náboj α-krát, máme totiž vždy rovnakú hustotu náboja. Príspevok elektrickej intenzity od kúsku s nábojom q vo vzdialenosti r by sa teda zmenil z $k\frac{q}{r^2}$ na $k\frac{\alpha q}{\alpha^2 r^2} = \frac{1}{\alpha}k\frac{q}{r^2}$. Inými slovami, elektrická intenzita každého kúsku sa zväčší $\frac{1}{\alpha}$-krát, a preto $E_\alpha = \frac{1}{\alpha}E_1 = \frac{1}{\alpha}E$.

Teraz si už len stačí všimnúť, že ak zoberieme tri tyče s dĺžkami $\frac{1}{7}L$, $\frac{2}{7}L$ a $\frac{4}{7}L$ a umiestnime ich do vzdialeností $\frac{1}{7}L$, $\frac{2}{7}L$ a $\frac{4}{7}L$ od nás, spoja sa do jednej tyče dĺžky L, ktorá bude od nás vzdialená $\frac{1}{7}L$.



Inými slovami, dostaneme presne tú situáciu, na ktorú sa pýta zadanie. Intenzita elektrického poľa teda bude

$$E_{1/7} + E_{2/7} + E_{4/7} = 7E + \frac{7}{2}E + \frac{7}{4}E = \frac{49}{4}E.$$

$\boxed{33.}$ Budeme uvažovať model, v ktorom je tlaková sila, ktorou pôsobí podložka na puk, rovnomerná. Inak povedané, tlak spôsobený pukom je v každom mieste styku rovnaký. Počítajme moment sily vzhľadom na bod na povrchu ľadu pod ťažiskom puku – označím ho A. (Možno si vybrať ľubovoľný bod, s takýmto sa nám bude lepšie počítať.)

Moment tiažovej sily je nulový, lebo táto smeruje priamo do A. Moment normálových síl je tiež nulový, stačí sa pozrieť na styčné body stredovo symetrické voči vzťažnému bodu A. Moment trecích síl nulový nebude. Jeho veľkosť určím integráciou po medzikružiach. Zaujímajme sa o medzikružie medzi kružnicami o polomere r a $r + \mathrm{d}r$. Obsah medzikružia je $2\pi r \mathrm{d}r$, jeho hmotnosť je $\mathrm{d}m = m\frac{2\pi r \mathrm{d}r}{\pi R^2} = \frac{2m}{R^2} r \mathrm{d}r$ a teda súhrnná veľkosť trecej sily pôsobiacej na tento kúsok puku je $\mathrm{d}F_t = \frac{2mfg}{R^2} r \mathrm{d}r$. Veľkosť celkového momentu síl pôsobiacich na puk vzhľadom na bod A je teda

$$M = \int r \, \mathrm{d}F_t = \frac{2mfg}{R^2} \int_0^R r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{2}{3} Rfmg.$$

Pre moment sily však platí rovnica $M = I\varepsilon$, kde $I = \frac{1}{2}mR^2$ je moment zotrvačnosti puku (valca) okolo jeho rotačnej osi a ε je uhlové zrýchlenie (spomalenie). Čas do zastavenia puku teda je

$$t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\omega I}{M} = \frac{3\omega R}{4fg}.$$