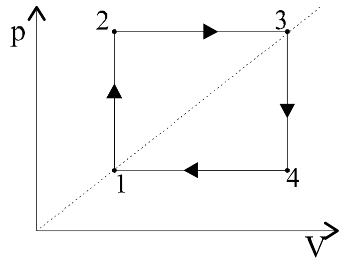
Kapitola 1

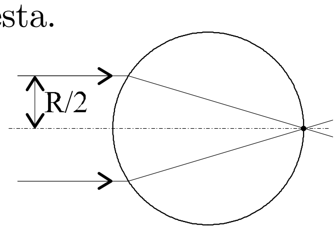
Zadania

$\boxed{1.}$ Nájdite prácu, ktorú vykoná jeden mól ideálneho plynu v cykle $1-2-3-4-1$ na obrázku. Teploty plynu v bodoch 1 a 3 sú T_1 a T_3. Spojnica bodov 1 a 3 prechádza cez počiatok p-V diagramu.



$\boxed{2.}$ Máme žiarovku, ktorá pripojená na napätie veľkosti $U_1 = 110$ V svieti výkonom $P_1 = 500$ W. Aký odpor je jej potrebné predradiť (pripojiť ho k nej sériovo), aby pripojená na napätie veľkosti $U_2 = 220$ V svietila rovnakým výkonom?

$\boxed{3.}$ Lúče dopadajúce na guľu vo vzdialenosti $R/2$ od optickej osi ako na obrázku sa pri výstupe z gule pretínajú na jej povrchu. V jej okolí je vákuum. Aký je index lomu materiálu, z ktorého je zhotovená guľa? Výsledok uveďte s presnosťou na dve desatinné miesta.

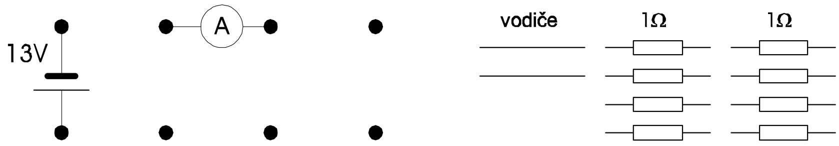


$\boxed{4.}$ Nájdite priemernú hmotnosť ρ planéty tvaru gule, ak tiažové zrýchlenie je na rovníku o 10 % menšie ako póle. Jedna otočka planéty trvá $\tau = 6\,\mathrm{h}$. Gravitačná konštanta je $\kappa \approx 6,7.10^{-11}$ N.m^2/kg^2.

$\boxed{5.}$ Kameň na nitke sa pohybuje po vodorovnej kružnici, ktorá je od bodu úchytu nitky vzdialená h. Nájdite periódu jeho otáčania.

$\boxed{6.}$ Polomer Zeme sa dal odhadnúť z Eratostenovho pozorovania: Keď bolo slnko v nadhlavníku v Asuáne, bolo práve vtedy 7° mimo nadhlavníka v Alexandrii, ktorá je 780 km na sever od Asuánu. Aký je polomer Zeme podľa tohto merania?

$\boxed{7.}$ Použite len súčiastky na pravej strane obrázku a vymyslite také zapojenie, v ktorom by bol prúd ampérmetrom rovný $3A$.



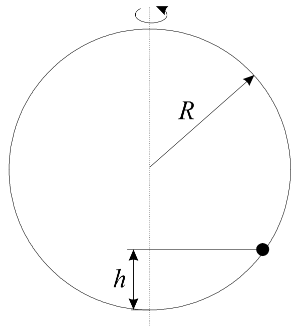
$\boxed{8.}$ Homogénna retiazka dĺžky l leží na hladkom stole, pričom malý kúsok zo stola prečnieva. Na začiatku ešte retiazku držíme, ale keď ju pustíme, začne sa zo stola skĺzavať (trenie neuvažujte). Nájdite rýchlosť retiazky v okamihu, keď zo stola prečnieva dĺžka x.

$\boxed{9.}$ V trubici tvaru U s prierezom S je naliata ortuť. Do jedného z ramien nalejeme vodu objemu V a do toho istého ramena pustíme železnú kocku hmotnosti m. O akú výšku h stúpne hladina ortuti v druhom ramene? Hustoty ortuti je ρ, hustota vody je ρ_0.

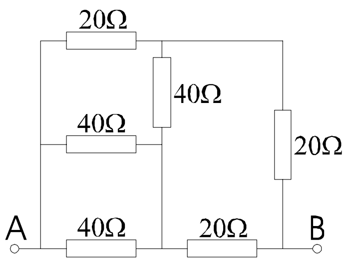
$\boxed{10.}$ Dvaja športovci bežia priamočiaro rovnako dlhý čas. Prvý z nich beží prvú polovicu tohto času so zrýchlením a a druhú zrýchlením $2a$. Druhý naopak najprv so zrýchlením $2a$, potom a. Prvý prebehne spolu 20 km. Akú vzdialenosť prebehne druhý bežec?

$\boxed{11.}$ Ploskovypuklá šošovka zobrazíobraz z miesta $20cm$ pred ňou do miesta $40cm$ za ňou. Ako zobrazí tento obraz, ak tesne za ňu dáme opačne obrátenú rovnakú ploskovypuklú šošovku?

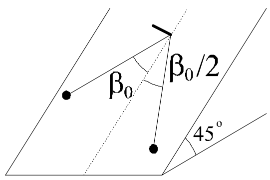
$\boxed{12.}$ Obruč polomeru R, ktorá sa nachádza vo zvislej rovine sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω. Na obruči sa nachádza korálka, ktorá sa po nej môže voľne pohybovať (obr.). Na akej výške sa h sa korálka ustáli?



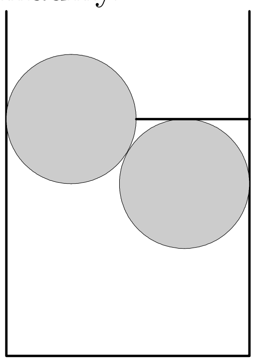
$\boxed{13.}$ Nájdite veľkosť odporu medzi uzlami A, B siete!



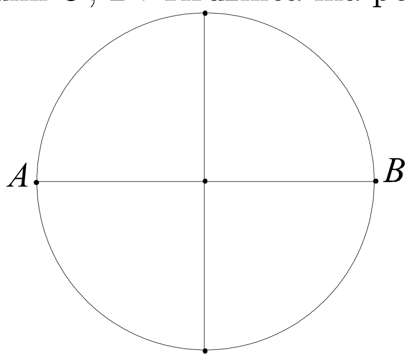
$\boxed{14.}$ Na naklonenej rovine so sklonom $\alpha = 45°$ je priviazaná niť dĺžky L s malým závažím na konci. Ak ho z rovnovážnej polohy vychýlime o uhol β_0 a pustíme, prekmitne do polohy s maximálnou výchylkou veľkosti $\beta_0/2$. Aká je veľkosť koeficientu trenia f medzi závažím a podložkou? Tiažové zrýchlenie má veľkosť g.



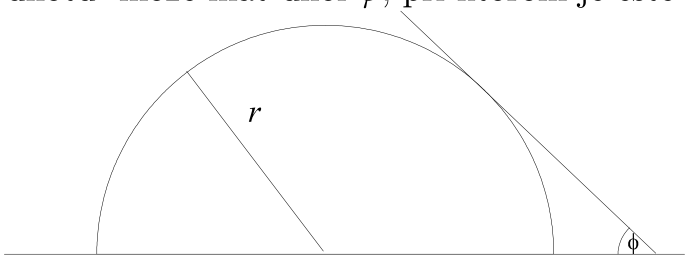
$\boxed{15.}$ Akou silou pôsobia na steny úzkej nádoby dve brvná (obr.)? Hmotnosť každého dreva je 100 kg. Jedno brvno je do polovice ponorené vo vode, vrchná časť druhého sa dotýka vodnej hladiny.



$\boxed{16.}$ Z drôtu s dĺžkovým odporom ρ zhotovíme nasledovnú schému (obr.) Vypočítajte odpor medzi bodmi C, D. Kružnica má polomer r.



$\boxed{17.}$ Homogénna tyč dĺžky $2l$ sa opiera o vodorovnú podložku a o pripevnený polovalec polomeru r (obr.). Koeficient trenia tyče o valec a o podložku je μ. Akú najväčšiu hodnotu môže mať uhol φ, pri ktorom je ešte tyč v rovnováhe?

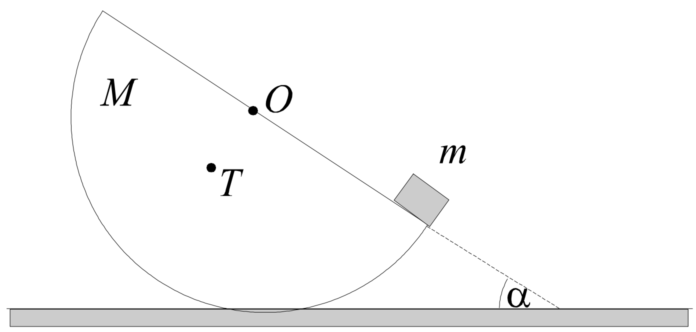


$\boxed{18.}$ Uzavretá valcová nádoba je rozdelená na dve zhodné časti membránou. V ľavej časti nádoby je hélium s tlakom p_1, v pravej argón. s tlakom p_2. Membrána prepúšťa iba molekuly hélia. V rovnovážnom stave je tlak v ľavej časti nádoby p_2, v pravej časti p_1. Aký je pomer p_1/p_2?

$\boxed{19.}$ Dve guličky s hmotnosťami m_1 a m_2 visia vedľa seba na dvoch nitiach rovnakej dĺžky. Prvú z nich vykloníme tak, že bude $0,2m$ nad úrovňou tej druhej a pustíme ju. Guličky sa pružne zrazia a následne vystúpia obe do tej istej výšky. Aká je jej numerická hodnota?

$\boxed{20.}$ Vo vrcholoch pravidelného 6-uholníka s dĺžkou strany a sú umiestnené rovnaké náboje Q. Aký náboj treba dať do stredu tohto 6-uholníka, aby bola sústava v rovnováhe?

$\boxed{21.}$ Homogénna pologuľa hmotnosti M s polomerom r, leží vypuklou časťou na vodorovnej podložke. Na jej kraj položíme malé teliesko hmotnosti m (obr.). Pod akým uhlom α sa pologuľa nakloní? Vzdialenosť ťažiska od stredu polgule je $|OT| = 3r/8$.



$\boxed{22.}$ Na povrchu bazéna hĺbky H pláva polystyrénový disk polomeru r, vo výške h nad ktorým je žiarovka. Menením tejto výšky h meníme aj veľkosť tieňa disku na dne bazéna. Aký maximálny môže byť tento polomer? Index lomu vody je n.

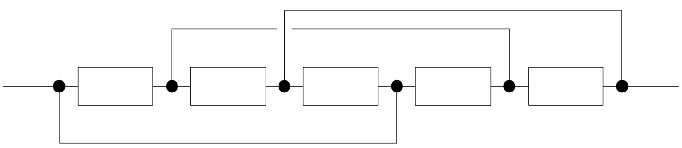
$\boxed{23.}$ Na vrchu oblej časti polvalca s polomerom R sa nachádza malé teliesko hmotnosti m. Jemne doň strčíme. Po prejdení akej dráhy sa „odlepí" z povrchu valca?

$\boxed{24.}$ Dva navzájom kolmé vodiče s prúdom I sa míňajú veľmi tesne, ale nedotýkajú sa. Nakreslite body, v ktorých je nulová intenzita magnetického poľa.

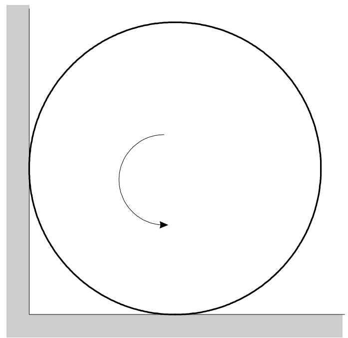
$\boxed{25.}$ V nádobe s prierezom $S = 2\ \mathrm{m}^2$ pláva ponorená polovicou svojho objemu kocka s dĺžkou hrany $a = 1$ m. Akú práce je potrebné vykonať na jej vytiahnutie z vody? Pri tomto vyťahovaní predpokladajte po celý čas hornú stenu kocky vodorovnú. Hustota vody je $\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, tiažové zrýchlenie je $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

$\boxed{26.}$ V nádobe je uložený ľad s teplotou 0 °C. Do nádoby priteká voda teploty t_1 a obmýva ľad. Jej prítok má veľkosť q. Von z nádoby vyteká voda s teplotou t_2. Aké množstvo vody q' vyteká z nádoby za jednotku času? Skupenské teplo topenia ľadu je λ, merná tepelná kapacita vody je c.

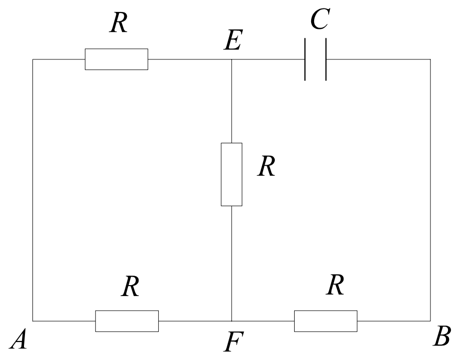
$\boxed{27.}$ Vypočítajte odpor zapojenia (každý z odporov má hodnotu R):



$\boxed{28.}$ Tenkostenný valec polomeru R sme roztočili uhlovou rýchlosťou ω a postavili ku stene (obr.) Koeficient trenia medzi valcom a podlahou aj stenou je μ. Určite, po koľkých obrátkach sa valec zastaví.

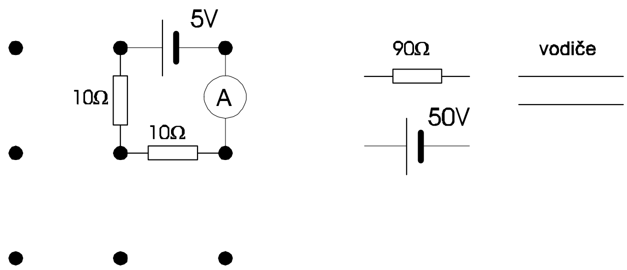


$\boxed{29.}$ Vypočítajte náboj na kondenzátore kapacity C v nasledujúcej schéme, keď k bodom A, B priložíme napätie U.

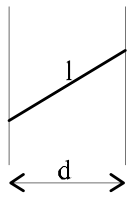


$\boxed{30.}$ Na vodorovnej ľadovej ploche chce človek ($m = 60\,\mathrm{kg}$) potiahnuť ťažké sane ($M = 90\,\mathrm{kg}$) ťahaním za povraz. Koeficient trenia saní o ľad je $\mu_1 = 0,2$, trenie človeka o ľad je $\mu_2 = 0,25$. Pod akým najmenším uhlom k ľadu môže človek ťahať za povraz, aby sa sane pohli? Uvažujte hodnotu $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

$\boxed{31.}$ Použite len súčiastky na pravej strane obrázku a vymyslite také zapojenie, v ktorom by bol prúd ampérmetrom nulový.

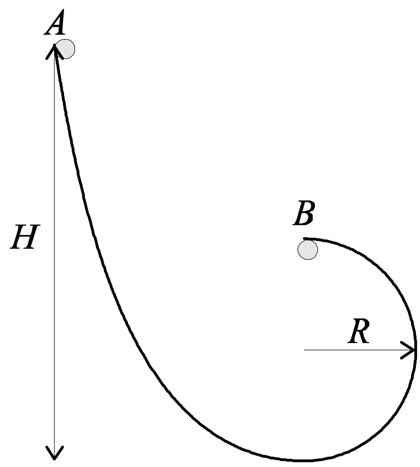


$\boxed{32.}$ Tyč akej maximálnej dĺžky môžeme vložiť (a zašprajcovať) do zvislej jamy na obrázku tak, aby tam sama ostala, ak koeficient trenia medzi tyčou a stenami je μ? Šírka jamy je d.

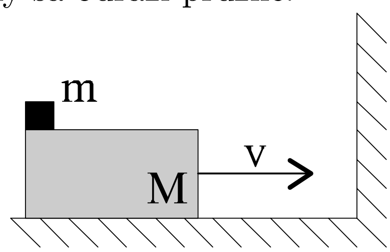


$\boxed{33.}$ Dva bodové náboje rovnakého znamienka sa pohybujú proti sebe. Ich hmotosti sú rovnaké - m, ich náboje sú q_1 a q_2. V okamihu, keď je ich vzájomná vzdialenosť r, sú ich rýchlosti v_1, v_2. Na akú minimálnu vzdialenosť R sa k sebe priblížia?

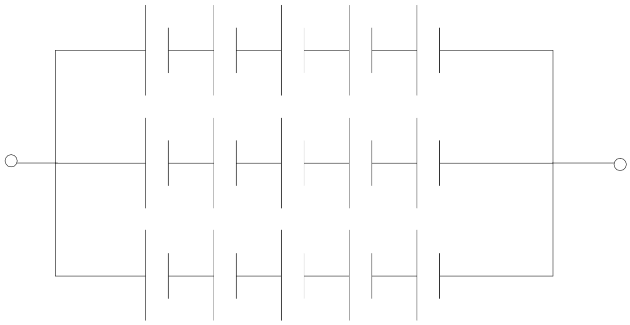
$\boxed{34.}$ Malý valček s momentom zotrvačnosti $I = \frac{1}{2}mr^2$ sa kotúľa bez peršmykovania z bodu A do bodu B. Aká má byť výška H, aby sa tam vôbec dokotúľal?



$\boxed{35.}$ Kváder hmotnosti M a dĺžky L sa pohybuje proti stene rýchlosťou v. Aká môže byť maximálna hodnota tejto rýchlosti, aby malé teliesko hmotnosti m položené na začiatku kvádra z neho nespadlo po zrážke kvádra so stenou? Koeficient šmykového trenia medzi kvádrom a telieskom je f, kváder sa po podložke šmýka bez trenia a od steny sa odrazí pružne.



$\boxed{36.}$ Nájdite kapacitu nasledovnej schémy akumulátorov (obr.). Kapacita každého akumulátora je 64 A.h. (Kapacita akumulátora je celkový náboj, ktorý prejde akumulátorom pri jeho vybíjaní).



$\boxed{37.}$ Dvaja parašutisti s ešte neotvorenými padákmi padajú smerom k zemi. Jeden je $50m$ pod tým druhým, ktorý zareve, zvuk sa odrazí od toho pod ním a potom čosi počuje. Aký je pomer frekvencií vyslaného a zaregistrovaného odrazeného zvuku? Padajú rýchlosťami v_1 a v_2.

$\boxed{38.}$ Máme žiarovku, ktorá zapojená na napätie veľkosti $U_1 = 110\,\mathrm{V}$ svieti výkonom $P_1 = 100\,\mathrm{W}$. Aký bude jej výkon, ak ju zapojíme na napätie veľkosti $U_2 = 220\,\mathrm{V}$? Predpokladajte priamu úmernosť medzi odporom vlákna žiarovky a jeho teplotou. Tepelné vyžarovanie vlákna žiarovky je úmerné štvrtej mocnine jeho teploty.

$\boxed{39.}$ Na vodorovne rotujúci disk s kinetickou energiou E_0 dopadne zhora druhý (rovnaký, ale nerotujúci) disk. Aká bude výsledná rotačná energia sústavy?

$\boxed{40.}$ Na dne jazera s hĺbkou H leží malá minca. V akej hĺbke sa nám javí, keď sa na ňu pozeráme takmer zhora? Index lomu vody je n.

Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Vychádzame z toho, že práca vykonaná počas cyklu je daná obsahom útvaru vymedzeného prebiehajúcimi dejmi. Označme tlak a objem plynu v bode 1 diagramu p_1, V_1, obdobne v bode 2 p_2, V_1 a v bode 3 nech je to p_2, V_3. Práca vykonaná plynom je

$$W = (p_2 - p_1)\Delta V = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) \tag{1}$$

Navyše platí vo všetkých bodoch diagramu stavová rovnica. Ak zohľadníme fakt, že ide o jeden mól ideálneho plynu, môžeme zapísať $p_1V_1 = RT_1$, $p_2V_3 = RT_3$. Dosadením druhej rovnice do prvej dostávame pre V_3 vzťah

$$V_3 = V_1 \frac{T_3}{T_1}\frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

Podľa zadania spojnica bodov 1 a 3 prechádza počiatkom p-V diagramu. Preto musí platiť úmernosť

$$\frac{p_2}{V_3} = \frac{p_1}{V_1}$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť objem V_3 a porovnať výsledok so vzťahom (2), dostávame

$$V_3 = V_1 \frac{p_2}{p_1} = V_1 \frac{T_3}{T_1}\frac{p_1}{p_2} \quad \Longrightarrow \quad p_2 = p_1\sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$$

Toto stačí dosadiť do (1) a zistíme, že

$$W = p_1\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right)V_1\left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right) = p_1V_1\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right) = RT_1\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right)^2$$

$\boxed{2.}$ Chceme, aby žiarovka svietila s rovnakým výkonom. To znamená, že jej vlákno musí mať rovnakú teplotu, tým pádom aj rovnaký odpor (ten s teplotou úzko súvisí) a musí na ňu byť priložené z celkového napätia 220 V opäť iba 110 V. To dosiahneme sériovým pripojením odporu veľkosti R. Veľkosť odporu žiarovky samotnej označme R_0. Platí preň vzťah

$$P_0 = \frac{U_0^2}{R_0} \quad \Longrightarrow \quad R_0 = \frac{U_0^2}{P_0},$$

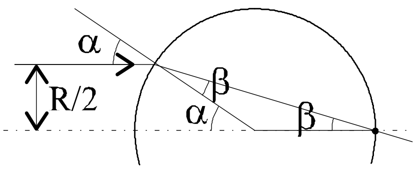
kde $U_0 = 110$ V a $P_0 = 500$ W je pôvodný výkon žiarovky. Po pripojení odporu a zvýšení napätia zdroja na U bude výkon žiarovky $P = RI^2$. Ten musí ostať rovnaký a tak, keďže sa odpor žiarovky nezmenil (nezmenila sa totiž jej výkon a teda ani teplota jej vlákna a tým pádom ani jeho odpor), rovnaký musel ostať aj žiarovkou prechádzajúci prúd. Preto môžeme zapísať

$$\frac{U_0}{R_0} = \frac{U}{R + R_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{110 \text{ V}}{R_0} = \frac{220 \text{ V}}{R + R_0} \quad \Longrightarrow R = R_0.$$

Ostáva dosadiť za R_0 z prvej rovnice, nakoniec teda dostávame, že

$$R = R_0 = \frac{U_0^2}{P_0} = \frac{(110 \text{ V})^2}{500 \text{ W}} = 24,2\ \Omega.$$

$\boxed{3.}$ Označme si uhly ako na obrázku.



Pre veľkosť uhla α platí

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 30°.$$

Doplnok k uhlu α má veľkosť $180° - \alpha$. Je to uhol vo vrchole rovnoramenného trojuholníka daného lúčom prechádzajúcim guľou. Preto veľkosť uhlov pri ramenách tohto trojuholníka je

$$\beta = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Vzhľadom na vákuum v okolí gule, ak označíme jej index lomu n, podľa Snellovho zákona lomu musí platiť

$$\sin\alpha = n \sin\beta \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha/2)}.$$

Požadovaná číselná hodnota tohto výrazu je $n = 1,93$.

$\boxed{4.}$ Tiaž na povrchu planéty je daná napätím pružiny, na ktorej je uchytené závažie. Tá je menšia ako mg v dôsledku otáčania planéty

$$T = mg - m\,\frac{v^2}{R}$$

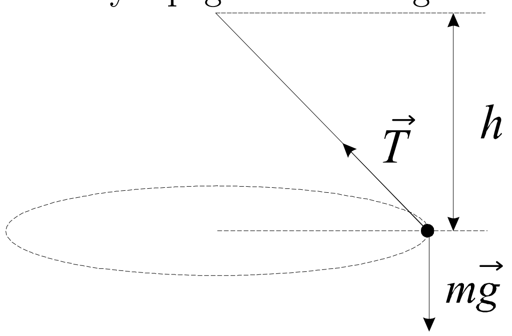
Zároveň zo zadania $T = 0,9\,mg$. Súvis rýchlosti s jej obežnou dobou je

$$v = \frac{2\pi R}{\tau}$$

Pomocou týchto rovníc nájdeme hľadanú hustotu

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^3/3} = \frac{3\pi}{0,1\kappa\tau^2} \approx 3000\,\mathrm{kg/m^3}$$

$\boxed{5.}$ Na kameň pôsobia dve sily: špagát silou $\vec{T}$ a gravitačná sila $m\vec{g}$.



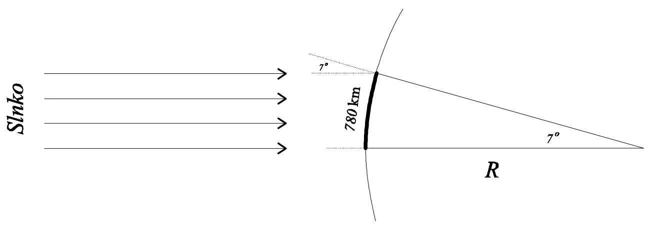
Ak uhol odklonu je α, potom Newtonova rovnica $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ v prepise so zvislého a vodorovného smeru má tvar

$$\begin{aligned} T\cos\alpha - mg &= 0 \\ T\sin\alpha &= m\omega^2 R\sin\alpha \end{aligned}$$

Odtiaľ pre obežnú dobu dostávame

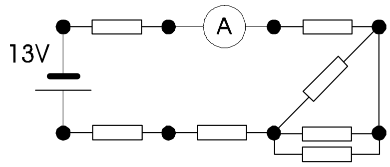
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

$\boxed{6.}$ Keďže lúče zo slnka prichádzajú z približne rovnakého smeru, môžeme podľa obrázka napísať



$$\begin{aligned} 2\pi R \frac{7^\circ}{360^\circ} &= 780\,\mathrm{km} \\ R &\approx 6384\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

$\boxed{7.}$ Napríklad:



$\boxed{8.}$ V čase, keď zo stola prečnieva dĺžka x, nech má retiazka rýchlosť v. Jej kinetická energia je $1/2mv^2$, kým jej potenciálna energia sa zníži o $(x/l\,m)g(x/2)$. Zo zákona zachovania energie teda dostávame

$$(x/l\,m)g(x/2) = 1/2mv^2$$

odkiaľ $v = x\sqrt{g/l}$.

$\boxed{9.}$ Nech vodu aj kocku dáme do ľavého ramena. Potom v pravom ramene vystúpi ortuť o h. Ale v ľavom zase poklesne o h. Teda rozdiel hladín ortuti bude $2h$. Tento rozdiel tlakov musí byť kompenzovaný tiažou vody a kocky, teda

$$2hS\rho g = (mg + \rho_0 V)g$$

odkiaľ $h = (m + \rho_0 V)/2\rho S$.

$\boxed{10.}$ Označme dráhu, ktorú prebehnú za daný čas s_1, respektíve s_2. Označme čas trvania prvej fázy ich behu t, trvanie druhej fázy je rovnaké, tiež t. Využijeme vzorec pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu $s = v_0 t + at^2/2$, kde v_0 je rýchlosť telesa na začiatku pohybu, a jeho zrýchlenie. Počiatočnú rýchlosť našich bežcov vieme, je nulová. Rýchlosť, s akou vstupujú do druhej fázy behu určíme pomocou vzťahu $v = at$. Dosadením podmienok zo zadania do zapísaných rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}at^2 + (at)t + \frac{1}{2}(2a)t^2 = \frac{5}{2}at^2, \\ s_2 &= \frac{1}{2}(2a)t^2 + (2at)t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{7}{2}at^2. \end{aligned}$$

Tu vidíme, že $s_2 = 7s_1/5 = 28$ km.

$\boxed{11.}$ Vieme, že pre ohniskovú vzdialenosť šošovky platí rovnica

$$\frac{1}{f} = n\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Takže v prvom prípade máme plosko ($r_2 = \infty$) vypuklú (r_1) šošovku a zobrazovaciu rovnicu

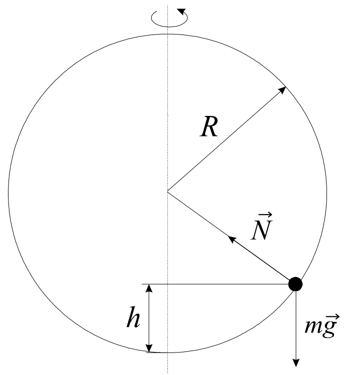
$$\begin{aligned} \frac{1}{f_1} &= n\frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{20\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{40\,\mathrm{cm}} &= \frac{1}{f_1} \end{aligned}$$

V druhom prípade zložením dvoch šošoviek dostávame vypuklú šošovku s $r_2 = -r_1$ a teda

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_2} &= n\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{-r_1}\right) = 2n\frac{1}{r_1} = 2\frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{20\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{f_2} = 2\frac{1}{f_1} = 2\left(\frac{1}{20\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{40\,\mathrm{cm}}\right) = \frac{1}{20\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{10\,\mathrm{cm}} \end{aligned}$$

Z čoho vidíme, že obraz bude 10 cm za spojenými šošovkami.

$\boxed{12.}$ Na teleso pôsobia dve sily: gravitačná $m\vec{g}$ a sila od obruče $\vec{N}$.



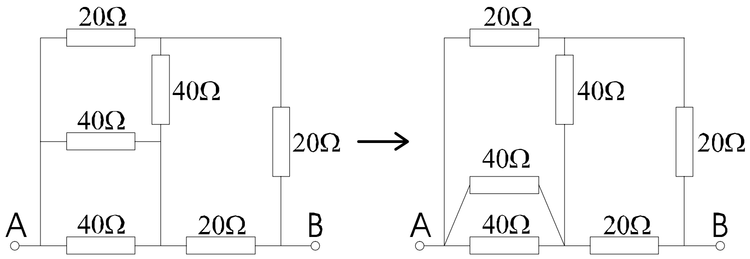
Ak uhol odklonu od zvislice je α, potom polomer otáčania guličky je $\rho = R\sin\alpha$. Newtonovu rovnicu $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ môžeme zapísať v prepise na zvislú a vodorovnú os:

$$\begin{aligned} N\cos\alpha &= mg \\ N\sin\alpha &= m\omega^2\rho \end{aligned}$$

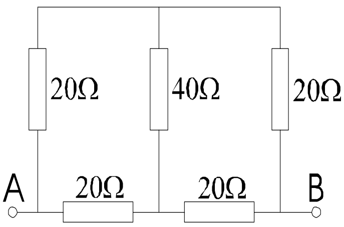
Odtiaľ

$$h = R - R\cos\alpha = R - \frac{g}{\omega^2}$$

$\boxed{13.}$ Stačí si uvedomiť, že vďaka dokonalej vodivosti vodičov v schéme môžeme previesť prekreslenie ako na obrázku.



Výsledná hodnota paralelného zapopojenia dvoch odporov veľkosti 40 Ω je 20 Ω. Nahradením spomínanej dvojice takýmto jedným odporom dostávame symetrickú schému.



Jej symetria spôsobuje, že prostredným odporom veľkosti 40 Ω nebude tiecť prúd. Z tohto dôvodu je možné jej odpor vypočítať ako obyčajnú paralelnú kombináciu dvoch odporov veľkosti 40 Ω (táto veľkosť je daná zapojením dvoch odporov veľkosti 20 Ω za sebou). Takto nakoniec dostávame výsledný odpor R_{AB} podľa vzťahu

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{40\ \Omega} + \frac{1}{40\ \Omega} = \frac{1}{20\ \Omega} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{\mathrm{AB}} = 20\ \Omega$$

$\boxed{14.}$ Koeficient trenia f spôsobuje, že časť kinetickej energie závažia sa pri jeho pohybe premení na teplo a preto nakoniec závažie vystúpi do menšej výšky než bola pôvodná. Strata energie je zrejme rovná rozdielu potenciálnych energií závažia na začiatku a na konci celého deja, pretože v oboch krajných polohách je jeho kinetická energia nulová. Vypočítame ju, ak si uvedomíme, že sa zmenila dĺžka priemetu nite na priamku smerujúcu priamo nadol po naklonenej rovine. Veľkosť tohto priemetu je pritom $x = L\cos\beta$. Zvislá výška koncového bodu nite nad podložkou je daná veľkosťou tohto priemetu a vzťahom $h = K - x/\sqrt{2}$. Hodnota K je konštanta závislá od výšky pripevnenia nite na naklonenej rovine, koeficinet $\sqrt{2}$ je daný sklonom naklonenej roviny 45°. Zmena potenciálnej energie závažia počas deja je preto

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} = L\left(\cos\frac{\beta_0}{2} - \cos\beta\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

Potenciálna energia poklesla na úkor práce vykonanej trecou silou. Túto vypočítame jednoducho, pretože počas pohybu závažia sa nemenila naňho pôsobiaca prítlačná sila k podložke a tým pádom ani veľkosť trecej sily. Teda môžeme použiť vzťah

$$F_T = fF_N = fmg\cos 45^\circ = mgf\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dráha, na ktorej trecia sila konala prácu je dĺžkou časti kružnice s vnútorným uhlom $\beta_0 + \beta_0/2$. Celková veľkosť vykonanej práce je preto

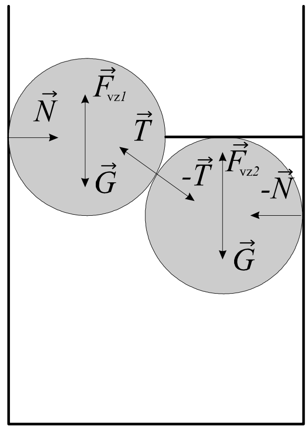
$$W = sF_T = L(\beta_0 + \beta_0/2)F_T = \frac{3}{2}\,mgfL\beta_0\,\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

Ak dáme (2) do rovnosti so zmenou potenciálnej energie podľa (1), dostaneme hľadaný výsledok

$$mg\Delta h = W \quad\Longrightarrow\quad L\left(\cos\frac{\beta_0}{2} - \cos\beta\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\,mgfL\beta_0\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f' = \frac{2\left(\cos\frac{\beta_0}{2} - \cos\beta\right)}{3\beta_0}.$$

$\boxed{15.}$ Na každé brvno pôsobí sila zo strany nádoby $\vec{N}$, tiažová sila $\vec{G}$, vztlaková sila $\vec{F}_{vz}$ a sila zo strany druhého brvna $\vec{T}$.



Smer sily $\vec{T}$ určíme z pravouhlého trojuholníka, ktorého prepona je spojnicou stredov kružníc a jeho jedna odvesna je kolmá na hladinu. Prepona má dĺžku $2r$, odvesna dĺžku r, teda sila $\vec{T}$ zviera s horizontálou uhol 30°. V rovnováhe je súčet síl nulový. Pre ľavé brvno dostávame rovnice

$$\begin{aligned} V\rho_0 - mg - T\sin 30^\circ &= 0 \\ N - T\cos 30^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Pre pravé brvno

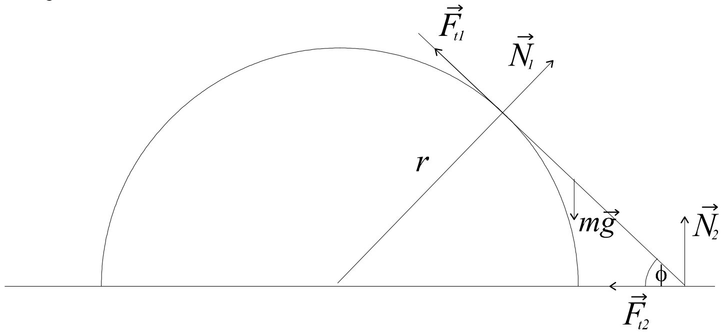
$$\frac{V}{2}\rho_0 g - mg + T\sin 30^\circ = 0$$

druhá rovnica je identická ako pre ľavé brvno. Riešením týchto rovníc dostávame $T = mg/\sqrt{3}$.

$\boxed{16.}$ Vzhľadom na symetriu schémy môžme zvislý drôt vypustiť, v dôsledku čoho sa celá schéma zjednoduší a zostanú nám tri paralelné odpory s hodnotami $\pi r\rho$, $2r\rho$, $\pi r\rho$, ktorých výsledný odpor je

$$R = \frac{2\pi r\rho}{4+\pi}$$

$\boxed{17.}$ Na tyč pôsobia trecie sily $\vec{F}_{t1}$, $\vec{F}_{t2}$, sily podložky $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ a gravitačná sila $m\vec{g}$ v smeroch ako je znázornené na obrázku



Pre rovnováhu platí, že súčet síl je nulový a aj výsledný moment síl je nulový. Tento budeme počítať vzhľadom na dotykový bod s podložkou.

$$\begin{aligned} F_{t1}\cos\varphi + F_{t2} - N_1\sin\varphi &= 0 \\ N_2 + F_{t1}\sin\varphi + N_1\cos\varphi - mg &= 0 \\ mgl\cos\varphi - N_1\frac{r}{\operatorname{tg}\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Ak už tyč skĺzava, vtedy $F_{t1} = \mu N_1$, $F_{t2} = \mu N_2$. Riešením týchto rovníc dostávame

$$\varphi_{\max} = \arcsin\sqrt{\frac{\mu r}{(1+\mu^2)l}}$$

$\boxed{18.}$ To, že membrána oddeľujúca obe časti nádoby prepúšťa iba molekuly hélia znamená, že aj v rovnovážnom stave bude všetok argón v pravej časti nádoby, zatiaľ čo hélium sa rovnomerne rozdelí tak, aby jeho molekuly prechádzali z ľavej časti nádoby do pravej rovnako často ako z pravej do ľavej. To nastane vtedy, keď bude tlak hélia v oboch častiach nádoby rovnaký. Podľa stavovej rovnice polovičnému množstvu plynu zodpovedá polovičný tlak, takže spomínaný rovnovážny tlak hélia bude $p_1/2$. Výsledný tlak plynu je daný súčtom tlakov jednotlivých jeho zložiek. Preto môžeme zapísať rovnice

$$\begin{aligned} \text{výsledný tlak v ľavej časti nádoby} &: \quad p_2 = p_1/2 \\ \text{výsledný tlak v ľavej časti nádoby} &: \quad p_1 = p_2 + p_1/2 \end{aligned}$$

Z oboch rovníc zhodne vyplýva, že $p_2 = p_1/2$. Preto pre hľadaný pomer tlakov platí $p_1/p_2 = 2$.

$\boxed{19.}$ Napíšeme si ZZE:

$$E_0 = m_1 g h_0 = (m_1 + m_2)\, g h \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, h_0$$

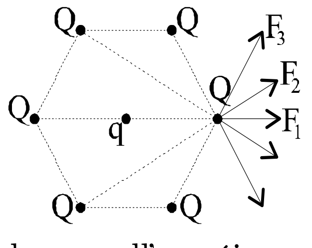
Keďže po náraze vystúpia do rovnakých výšok ($h = \frac{v^2}{2g}$ nezávisí od hmotnosti), veľkosti ich rýchlostí po náraze museli byť rovnaké (v). Napíšme si teraz zákon zachovania momentu hybnosti a energie pre náraz

$$\begin{aligned} l m_1 v_0 = l m_2 v - l m_1 v \qquad &\rightarrow \qquad \frac{v}{v_0} = \frac{m_1}{m_1 - m_2} \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v^2 \qquad &\rightarrow \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \frac{m_1^2}{(m_1 - m_2)^2} \end{aligned}$$

z čoho vyplýva

$$\begin{aligned} m_1^2 - 2m_1 m_2 + m_2^2 &= m_1^2 + m_1 m_2 \\ m_2 &= 3m_1 \\ \frac{m_1}{m_1 + m_2} &= \frac{1}{4} \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{1}{4}\, h_0 = 5cm \end{aligned}$$

$\boxed{20.}$ Na obrázku je znázornené rozloženie síl, ktoré odtláčajú každý z nábojov od stredu.



V zásade sú tieto sily troch druhov, podľa vzájomnej vzdialenosti nábojov, medzi ktorými pôsobia. Ich veľkosti sú postupne

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\, \frac{Q^2}{(2a)^2}, \qquad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\, \frac{Q^2}{(a\sqrt{3})^2}, \qquad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\, \frac{Q^2}{a^2}$$

Zrejme výslednica týchto síl smeruje presne od stredu 6-uholníka. Preto keď chceme určiť jej veľkosť, stačí sčítať zložky týchto síl v smere tejto osi. Tieto zložky majú postupne veľkosť

$$F_1' = F_1 \cos 0°, \qquad F_2' = F_2 \cos 30°, \qquad F_3' = F_3 \cos 60° \Longrightarrow$$
$$F_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{4a^2}, \qquad F_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{3a^2}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad F_3' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{2a^2}$$

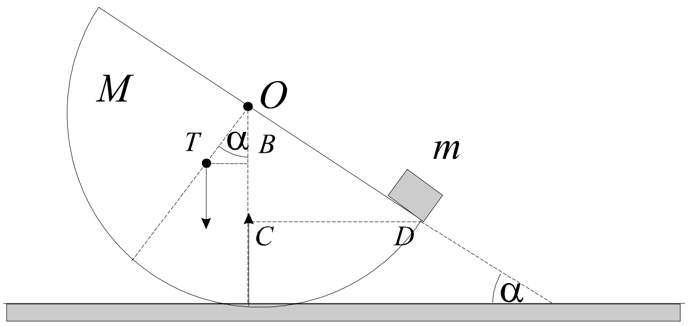
Celková sila vytláčajúca náboj má teda veľkosť

$$F = F_1' + 2F_2' + 2F_3' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{a^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{a^2}\left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Je potrebné ju vyrovnať príťažlivou silou od náboja q v strede 6-uholníka. Preto musí mať tento náboj opačného znamienka ako ostatné a musí platiť rovnosť

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{a^2}\left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad\Longrightarrow\quad q = \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)Q$$

$\boxed{21.}$ V stave rovnováhy je výsledný moment síl nulový. Tento je najlepšie počítať vzhľadom na bod D..



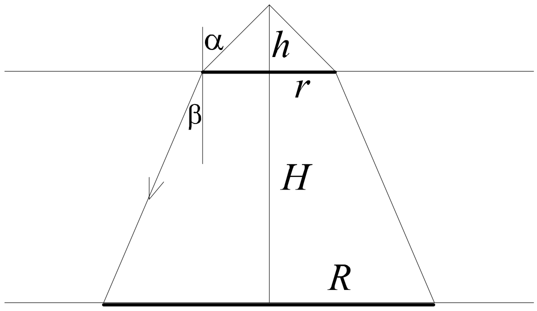
Gravitačná sila Mg má rameno $TB + CD$, sila podložky $N = Mg + mg$ má rameno CD. Z geometrie obrázka vyplýva $TB = OT \sin\alpha = 3/8r\sin\alpha$, $CD = r\cos\alpha$, takže po dosadení má momentová veta tvar

$$Mg(3/8r\sin\alpha + r\cos\alpha) = (Mg + mg)r\cos\alpha$$

odkiaľ

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{3}\frac{m}{M}\right)$$

$\boxed{22.}$ Nech zdroj svetla sa nachádza vo výške h nad hladinou:



Z geometrie obrázka vyplývajú nasledujúce vzťahy medzi vzdialenosťami

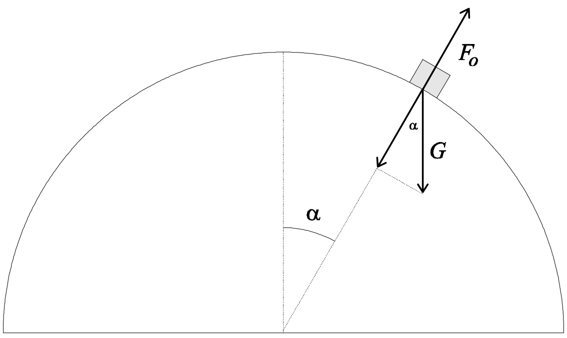
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= r/h \\ R &= r + H\operatorname{tg}\beta \end{aligned}$$

Podľa Snellovho zákona lomu $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Riešením týchto rovníc dostávame

$$R = r\left(1 + \frac{H}{\sqrt{n^2h^2 + r^2(n^2-1)}}\right)$$

Najväčší bude tento polomer pri $h = 0$ a jeho hodnota bude $R_{\max} = r + H/\sqrt{n^2-1}$

$\boxed{23.}$ V momente „odlepenia" sa od valca na teliesko nepôsobí sila v smere sprievodiča. Teda podľa obrázka



$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Zo zákona zachovania energie získame rýchlosť telieska:

$$mgR\,(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2$$

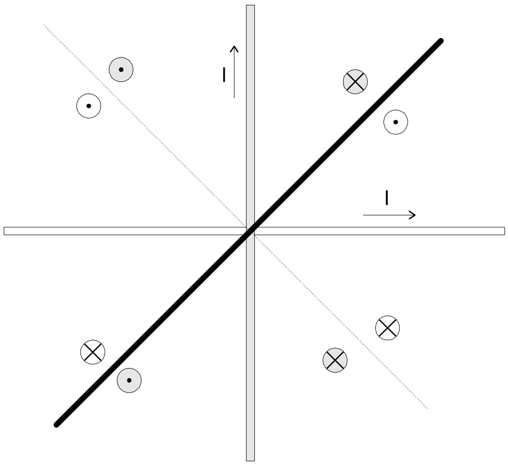
Po dosadení za mv^2:

$$\begin{aligned} g\cos\alpha &= 2g\,(1-\cos\alpha) \\ \alpha &= \arccos\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pre prejdenú dráhu potom dostávame

$$s = R\alpha = R \arccos \frac{2}{3}$$

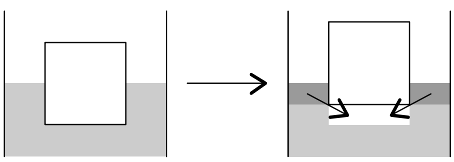
$\boxed{24.}$ Veľkosť magnetickej indukcie môže byť nulová len na 2osiach symetrie, pretože tam sú veľkosti B_1 a B_2 rovnaké. Kde presne to bude zistíme orientáciou B_1 a B_2. Tam, kde sú navzájom opačné, ležia hľadané body (hrubšie vyfarbená os)



$\boxed{25.}$ Pri vyťahovaní vody konáme prácu proti tiažovej sile zmenšenú o pôsobenie vztlakovej sily nadľahčujúcej kocku ponorenú vo vode. Najjednoduchšie je zistiť celkovú veľkosť vykonanej práce porovnaním počiatočnej a koncovej hodnoty potenciálnej energie systému. Jej zmena je daná našou prácou. Keď vyťahujeme kocku z vody, o koľko ju vytiahneme, o toľko klesne voda v nádobe. To preto, lebo prierez kocky je $S_0 = a^2 = 1\ \mathrm{m}^2$ a prierez zvyšku nádoby nezabratého kockou je $S - S_0 = 1\ \mathrm{m}^2$. Preto treba kocku dvihnúť o $a/4$,.kým sa začne jej spodná stena dotýkať hladiny vody. Jej potenciálna energia sa pritom zvýši o

$$\Delta E_P^1 = mg\Delta h = \frac{\rho_0}{2} a^3 g \frac{a}{4} = \frac{\rho_0 g a^4}{8} \tag{1}$$

Tu sme využili, že hustota kocky je zrejme polovičná ako hustota vody ρ_0, pretože na začiatku v nej plávala ponorená polovicou svojho objemu.
Potenciálna energia vody pri našej práci klesne. Na obrázku je znázornené, ako sa voda zníži svoje ťažisko.



Celkový objem vody, ktorá poklesne je $V = (S - S_0)a/4$ a zmena jej potenciálnej energie je

$$\Delta E_P^2 = V\rho_0 \left(-\frac{a}{4}\right) = -\frac{\rho_0 g a^4}{16} \tag{2}$$

Výslednú nami vykonanú prácu zistíme sčítaním vzťahov (1) a (2), dostaneme

$$W = \Delta E_P^1 - \Delta E_P^2 = \frac{\rho_0 g a^4}{16} = 625 \text{ J}$$

$\boxed{26.}$ To, že voda vyteká z nádoby s menšou teplotou znamená, že odovzdáva časť svojej vnútornej energie ľadu. Odovzdané teplo má podľa zadania veľkosť

$$Q = mc(t_1 - t_2) \tag{1}$$

kde m je hmotnosť vody, ktorá nádobou pretečie za istý čas. Ak tento čas označíme Δt, platí $m = q\Delta t$. Keďže ľad má teplotu $0\,^\circ\mathrm{C}$, každé teplo jemu dodané spôsobí roztopenie určitej jeho časti. Dodané teplo sa spotrebuje na skupenské teplo topenia sa ľadu a zohriatie takto získanej vody na teplotu t_2. Preto môžeme napísať rovnosť

$$Q = \Delta m\lambda + \Delta mc(t_2 - 0) \tag{2}$$

Tu Δm je hmotnosť ľadu roztopeného za skúmaný čas Δt. Ak označíme množstvo vody vytekajúce z nádoby q', zrejme môžeme zapísať rovnosť

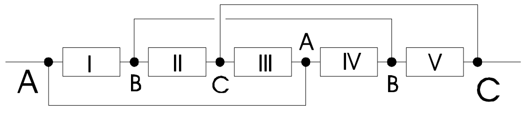
$$q' - q = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

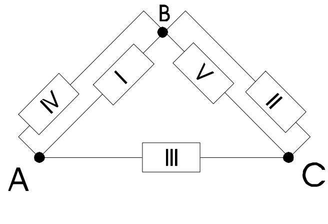
Dosadením tohto vzťahu do rovnosti (1)=(2) a úpravou dostaneme

$$c(t_1 - t_2)q\Delta t = (\lambda + ct_2)\,(q' - q)\Delta t \quad \Longrightarrow \quad q' = q\,\frac{\lambda + ct_1}{\lambda + ct_2}$$

Čo už je hľadaný výsledok.

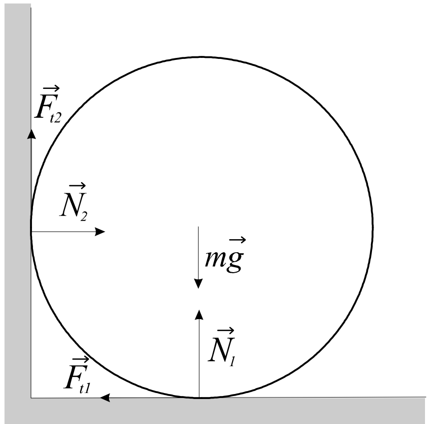
$\boxed{27.}$ Prekreslime si schému na





z čoho zrejme $R_{AC} = \frac{R}{2}$.

$\boxed{28.}$ Na valec pôsobia tlakové sily $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, trecie sily $\vec{F}_{t1}$, $\vec{F}_{t2}$ a gravitačná sila $m\vec{g}$.



Keďže ťažisko valca sa nehýbe, výslednica všetkých síl, pôsobiacich na teleso, je unlová. Zapíšeme túto rovnosť v prepise na x-ovú a y-ovú os

$$\begin{aligned} N_1 + F_{t2} - mg &= 0 \\ N_2 - F_{t1} &= 0 \end{aligned}$$

Zároveň, keďže sa valec otáča, $F_{t1} = \mu N_1$, $F_{t2} = \mu N_2$. Samotný počet otázok získame zo zákona zachovania energie: zmena kinetickej energie sa rovná práci trecích síl:

$$(F_{t1} + F_{t2})n\ 2\pi r = \frac{1}{2} mr^2\omega^2$$

Riešením týchto rovníc dostávame

$$n = \frac{\omega^2 R(1+\mu^2)}{4\pi\mu g(1+\mu)}$$

$\boxed{29.}$ Celkový odpor medzi bodmi A, B je

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} + R = \frac{5}{3} R$$

Vetvou FB teda tečie prúd

$$I_{FB} = \frac{3}{5}\frac{U}{R}$$

Celkový prúd sa medzi vetvy AE a AF delí v pomere 1:2, takže vetvou AE tečie prúd

$$I_{AE} = I_{EF} = \frac{1}{5}\frac{U}{R}$$

Potom výsledný náboj na kondenzátore je

$$Q = C(U_{EF} + U_{FB}) = \frac{4}{5} UC$$

$\boxed{30.}$ Predpokladajme, že človek pôsobí na sane silou F, ktorá zviera s podložkou uhol α (smeruje nahor). Aby sa sane pohli, musia byť splnené dve podmienky. Sila na ne pôsobiaca musí byť aspoň taká ako trecia sila pôsobiaca proti ich pohybu. Navyše sa človek ťahajúci sane nesmie šmýkať, trecia sila pôsobiaca naňho musí byť dostatočná na udržanie kontaktu so zemou. Na základe týchto viet môžeme zostaviť dve rovnice

$$(Mg - F\sin\alpha)\,\mu_1 \leqslant F\cos\alpha, \quad (mg + F\sin\alpha)\,\mu_2 \geqslant F\cos\alpha$$

Tieto je potrebné najskôr jednoducho upraviť osamostatnením výrazov obsahujúcich F

$$\frac{F}{M\mu_1}(\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha) \geqslant g \tag{1}$$

$$g \geqslant \frac{F}{m\mu_2}(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha) \tag{2}$$

Odtiaľ priamo vyplýva (keďže $g = g$) užitočná nerovnosť

$$\frac{F}{M\mu_1}(\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha) \geqslant \frac{F}{m\mu_2}(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha)$$

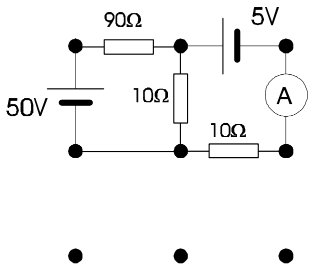
Ak ju predelíme F, zbavíme sa neznámej sily, ktorou ťaháme sane (zrejme je kladná a preto bolo predelenie nerovnice korektné). Ďalej môžeme deliť výrazom $\cos\alpha$, ktorý je tiež kladný. V našom prípade totiž sane ťaháme a preto $\alpha \leqslant 90°$. Ak navyše využijeme, že $\sin\alpha/\cos\alpha = \tan\alpha$, dostaneme

$$\begin{aligned} M\mu_1(1 - \mu_2\tan\alpha) &\leqslant m\mu_2(1 + \mu_1\tan\alpha) \qquad (3)\\ \tan\alpha &\geqslant \frac{M\mu_1 - m\mu_2}{\mu_1\mu_2(m+M)} \end{aligned}$$

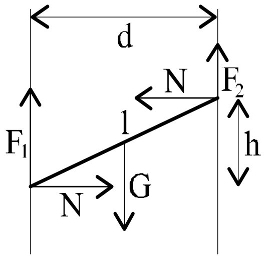
Nerovnosť (3) nám udáva tangens hľadaného minimálneho uhla, pod ktorým môžeme ťahať sane. Jeho hodnota je

$$\tan\alpha_{\min} = \frac{M\mu_1 - m\mu_2}{\mu_1\mu_2(m+M)} = 0,4 \quad \Longrightarrow \alpha_{\min} \doteq 22°$$

$\boxed{31.}$ Napríklad:



32. Označme si pôsobiace sily tak, ako na obrázku.



Na tyč vloženú (ľubovoľným spôsobom natlačenú) do jamy pôsobia z bokov reakcie stien jamy, v páde jej bránia trecie sily F_1, F_2. Pre ne zrejme platia nerovnosti

$$F_1 \leqslant \mu N, \qquad F_2 \leqslant \mu N \tag{1}$$

Tyč je v rovnováhe, preto musia byť súčet všetkých síl na ňu pôsobiacich nulový. Takto dostávame, že

$$F_1 + F_2 = G \tag{2}$$

Tyč sa v rovnovážnej polohe neotáča, preto musia byť momenty síl na ňu pôsobiacich v rovnováhe. Ak počítame momenty síl vzhľadom na ťažisko tyče, dostaneme rovnicu

$$\frac{d}{2}F_1 = \frac{d}{2}F_2 + 2\,\frac{h}{2}N \quad \Longrightarrow \quad F_1 = F_2 + \frac{2h}{d}N \tag{3}$$

Tu si môžeme všimnúť dôležitú skutočnosť. Sila F_1 je vždy väčšia, než F_2. Keďže sú to obe trecie sily vyvolané rovnakou normálovou zložkou N (stena pôsobí na tyč zľava aj sprava rovnakou silou N), je zrejmé, že tyč sa skôr šmykne v dolnom bode, sila F_1 skôr narazí na hranice svojich možností dané vzťahmi (1).
Zostavme preto ešte momentovú vetu vzhľadom na pravý koniec tyče. Má tvar

$$\frac{d}{2}G + hN = dF_1 \tag{4}$$

V medznom prípade nastáva pre F_1 v (1) rovnosť, dosadením tohto do (4) dostávame

$$\frac{d}{2}G + hN = dNf \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{dG}{2(df-h)} \tag{5}$$

Skúmajme hranice platnosti vzťahu (5). Zrejme sila N, ktorou pôsobia steny na tyč musí byť kladná. Takto dostávame nerovnosť

$$df - h \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad df \geqslant h$$

Tu stačí využiť, že $h = \sqrt{L^2 - d^2}$ a dostaneme

$$l \leqslant d\sqrt{f^2 + 1}$$

$\boxed{33.}$ Je užitočné prejsť do ťažiskovej sústavy systému. Ťažisková sústava sa vyznačuje tým, že celková hybnosť častíc v nej je nulová. To má tú výhodu, že v čase najväčšieho priblíženia v nej naše dve častice stoja. Je možné sa ľahko presvedčiť, že ťažiskovou je sústava pohybujúca sa rýchlosťou

$$v = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

V nej sa náboje pohybujú proti sebe rovnakou rýchlosťou $(v_1 + v_2)/2$, keďže ich hmotnosti sú rovnaké, je celková hybnosť naozaj nulová. Ako už bolo povedané, v čase najväčšieho priblíženia častíc na vzdialenosť R v ťažiskovej sústave častice stoja (to je dôsledok zákona zachovania hybnosti a toho, že v okamihu najväčšieho priblíženia nábojov sa tieto voči sebe nehýbu). Preto môžeme zapísať zákon zachovania energie v tvare

$$\frac{1}{2}m\left[\frac{v_1 + v_2}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}m\left[\frac{v_1 + v_2}{2}\right]^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\pi\varepsilon m}{q_1 q_2}(v_1 + v_2)^2$$

Použili sme vyjadrenie potenciálnej energie dvoch bodových nábojov v tvare $q_1 q_2/(4\pi\varepsilon r)$, kde r je ich vzájomná vzdialenosť. Z posledného vzťahu už nie je ťažké vyjadriť R, dostávame

$$R = \frac{r}{1 + \frac{\pi\varepsilon m r}{q_1 q_2}(v_1 + v_2)^2}$$

$\boxed{34.}$ Napíšeme si zákon zachovania energie pre body A a B:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

a uvedomíme si, že náš valček neprešmykuje, teda rýchlosť postupného pohybu jeho ťažiska bude $v = \omega r$, a že v bode B musí byť odstredivá sila rovná tiažovej, aby sa tam ten valček naozaj dokotúľal, čiže

$$\frac{mv^2}{R} = mg \qquad \rightarrow \qquad v^2 = gR$$

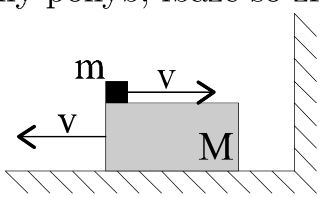
a z prvej rovnice dostaneme

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}\,mgR + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\,mr^2\,\frac{gR}{r^2}$$

čiže pre výšku H platí

$$H = \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) R = \frac{11}{4}\,R$$

$\boxed{35.}$ Dôležité je uvedomiť si, čo sa stane pri pružnej zrážke kvádra so stenou. Keďže pôjde o pružnú zrážku, kváder nestratí svoju energiu a bude sa hýbať opačným smerom nezmenenou rýchlosťou v. Keďže zrážka je veľmi krátky dej, nie je spôsob, akým by ho mohlo ovplyvniť teliesko položené na kvádri. Všetky sily, ktorými môže na kváder teliesko pôsobiť sú totiž konečné a tak ich účinok počas zrážky je zanedbateľný.
Skúmajme situáciu z pohľadu inerciálnej sústavy spojenej s podložkou tak, ako na obrázku. Trecia sila medzi telieskom a kvádrom má veľkosť $F_T = mgf$. To znamená, že kváder koná spomalený pohyb so zrýchlením $a_K = mgf/M$, teliesko na ňom tiež spomalený pohyb, ibaže so zrýchlením veľkosti $a_T = gf$.



Teliesko z kvádra nespadne, ak stihne vyrovnať svoju rýchlosť s rýchlosťou kvádra. Rýchlosť telieska v závislosti od času sa dá zapísať ako

$$v_T(t) = v - gft$$

Pre rýchlosť kvádra platí

$$v_K(t) = -v + gf\,\frac{m}{M}\,t$$

Rýchlosti sa vyrovnajú v čase τ, platí $v_K(\tau) = v_T(\tau)$. Na základe toho ľahko vyjadríme τ ako

$$\tau = \frac{2v}{gf\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Teliesko dovtedy prešlo po povrchu kvádra dráhu s danú rozdielom rýchlostí kvádra a telieska, dĺžka tejto dráhy je

$$s = 2v\tau - \frac{1}{2}gf\left(1 + \frac{m}{M}\right)\tau^2 = \frac{2v^2}{gf\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Ak platí, že $s \leqslant L$, teliesko z kvádra nespadne. Takto dostávame výslednú nerovnosť a hľadanú maximálnu rýchlosť

$$v \leqslant \sqrt{\frac{gfL\left(1 + \frac{m}{M}\right)}{2}} \quad \Longrightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{gfL\left(1 + \frac{m}{M}\right)}{2}}$$

$\boxed{36.}$ Treba si uvedomiť, že keď zapojíme dva akumulátory za sebou, kapacita zostane nezmenená, pretože ten istý náboj, čo pretečie cez jeden, pretečie aj cez druhý. Kapacitu zvyšujú len paralelné zapojenia, teda výsledná kapacita schémy je 3.64=192 A.h.

$\boxed{37.}$ Prejdeme do sústavy "jačiaceho" parašutistu padajúceho rýchlosťou v_1. Teraz sa od nás vzďaľuje spodný rýchlosťou $v = (v_2 - v_1)$. Teda ak horný vydáva zvuk s frekvenciou f_0, dolný ho registruje podľa zákonov Dopplerovho javu (stojaci zdroj, pozorovateľ sa vzďaľuje rýchlosťou v) s frekvenciou

$$f_d = \frac{c - v}{c}\, f_0$$

Tento zvuk sa odrazí smerom nahor a horný parašutista zaregistruje (stojaci pozorovateľ, zdroj vzďaľujúci sa rýchlosťou v) zvuk s frekvenciou

$$f_h = \frac{c}{c + v}\, f_1 = \frac{c}{c + v}\frac{c - v}{c}\, f_0 = \frac{c - v_2 + v_1}{c + v_2 - v_1}\, f_0$$

$\boxed{38.}$ Žiarovka vyžaruje výkon úmerne štvrtej mocnine teploty jej vlákna, teda podľa Stefan-Boltzmanovho zákona, ako to bolo uvedené v zadaní. Preto okrem klasického vzťahu $P = UI = U^2/R$ pre jej výkon platí

$$P = KT^4 = \frac{U^2}{R}$$

Ak uvážime, že odpor vlákna je priamo úmerný jeho teplote, dosadením vzťahu $R = \alpha T$ do predchádzajúceho dostávame

$$KT^4 = \frac{U^2}{\alpha T} \quad \Longrightarrow \quad T^5 = CU^2 \tag{1}$$

Pre pomer výkonov žiarovky v dvoch rôznych situáciách platí

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2^4}{T_1^4} \tag{2}$$

Dosadením vzťahu (1) do (2) dostávame výsledok

$$P_2 = P_1 \left(\frac{U_2^{2/5}}{U_1^{2/5}} \right)^4 = P_1 \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^{8/5} = 303\,\mathrm{W}$$

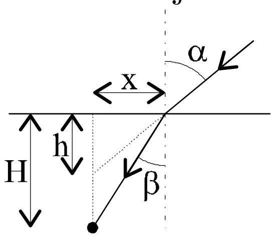
$\boxed{39.}$ Musí sa zachovať moment hybnosti sústavy, teda

$$L = I\omega_0 = (2I)\,\omega \qquad \to \qquad \omega = \frac{\omega_0}{2}$$

Potom bude rotačná energia sústavy

$$E = \frac{1}{2}\,(2I)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\,I\omega_0^2 = \frac{1}{2}\,E_0$$

$\boxed{40.}$ Neuvažujme zo začiatku fakt, že sa na mincu pod vodou pozeráme takmer zhora. Geometrické usporiadanie situácie je na obrázku.



Vodorovnú vzdialenosť medzi mincou a bodom vstupu lúča do vody sme označili x, zdanlivú hĺbku mince h. Zrejme bude menšia, ako skutočná hĺbka H. Podľa zákona lomu platí $\sin\alpha = n\sin\beta$ (index lomu vzuchu sme položili rovný jednej). Ďalej pre h, H platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{h}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{H}$$

Keďže v zákone lomu sa vyskytujú sínusy, v predchádzajúcich vzťahoch je potrebné nahradiť tangensy práve nimi. To nie je ťažké, ak si uvedomíme, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

Takýmto spôsobom môžeme využijúc predchádzajúce vzťahy vyjadriť $\sin\beta$ ako

$$\frac{x}{H} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+H^2}}$$

Podľa zákona lomu ďalej platí

$$\sin\alpha = n\sin\beta = \frac{nx}{\sqrt{x^2 + H^2}}$$

Ak toto dosadíme do vzorca pre $\tan\alpha$, dostaneme

$$\frac{x}{h} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{nx}{\sqrt{H^2 - x^2(n^2-1)}}$$

Odtiaľ priamo dostávame

$$h = \frac{1}{n}\sqrt{H^2 - x^2(n^2-1)}$$

Teraz si stačí uvedomiť, že sa na mincu pozeráme takmer zhora. To znamená, že x je ľubovoľne malé číslo. Výsledná hodnota hĺbky h, v ktorej sa nám minca zdá byť je preto daná dosadením $x = 0$ do predošlého vzťahu, dostaneme $h = H/n$.