FKS, KDMFI FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Milí čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 24. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s ktorými ste sa v roku 2021 mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste niektorému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Táto zbierka by nikdy nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Väčšina z nás sú študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a časť z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom každého polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke `https://fks.sk/`.

V tomto roku opäť poznačila Fyzikálny Náboj pandémia koronavírusu. Z tohoto dôvodu sa vo všetkých krajinách konal online. Za vyvinutie online herného systému pre Náboje a za zabezpečenie zdarného priebehu Fyzikálneho Náboja po technickej stránke ďakujeme Adamovi Zahradníkovi.

S prihliadnutím na tieto neľahké podmienky si o to viac ceníme, že sa nám podarilo zorganizovať Náboj nie len vo všetkých krajinách kde doteraz, ale pribudli nám aj prvé tímy z Iránu. Za to patrí vďaka lokálnym organizátorom: Šimon Pajger (Česká republika), Ágnes Kis-Tóth (Maďarsko), Kamil Żmudziński (Poľsko), Patrik Lamoš (Rusko) a Mostafa Noori (Irán).

V mene celého organizátorského tímu veríme, že ste si v roku 2021 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že sa všetci uvidíme na Náboji o rok už naživo! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov.

Jaroslav Valovčan

hlavný organizátor

Zbierku zostavili:

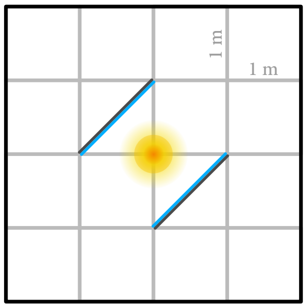
Martin ‚Kvík‘ Baláž
Jozef Csipes
Viliam Furík
Lucia ‚Želé‘ Gelenekyová
Nina Hronkovičová
Jakub ‚Andrej‘ Kliment
Justína ‚Plyš‘ Nováková
Patrik Rusnák
Adam Škrlec
Jaroslav Valovčan
Tomáš Vörös

Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke `https://physics.naboj.org/`.

Zadania

1 Sabinka si kúpila do šatníka dve rovnaké dokonalé zrkadlá a postavila ich oproti sebe tak, aby sa mohla naraz vidieť aj spredu aj zozadu. Presne v strede medzi zrkadlami visí žiarovka. Marcelovi to pravdaže nedalo a išiel ich preskúmať. Počas Marcelovho obzerania sa však vbehla do izby Sabinka a jemu nezostalo iné, ako sa schovať do tmavého kúta. Aká dlhá je časť obvodu šatníka, ktorá nie je osvetlená?

Na obrázku je pôdorys šatníka zaznačený na mriežke 1 m × 1 m. Zrkadlá sú znázornené modrou farbou.



Výsledok odovzdajte v metroch.

2 Helboj a Samko navštívili novú cukráreň. Helboja najviac očaril kúsok čokoládovej torty s orieškami. Samko sa nenechal zahanbiť a objednal si kus torty s len polovičným priemerom, ktorý však bol dvojnásobne vyšší, uhol medzi rezmi bol dvakrát väčší a k tomu všetkému mal aj dvojnásobnú hustotu. Koľkokrát viac priberie Samko potom, ako zje svoj kúsok?

Výsledok odovzdajte ako obyčajné číslo (bez „-krát“ a pod.).

3 Nina sa v horúcich letných dňoch osviežuje svojím čarovným nápojom, ktorý si chladí vo vedre s vodou a ľadom. Napadla jej takáto otázka: aká je maximálna hmotnosť ľadu s teplotou −18 °C, ktorý sa dokáže roztopiť v jednom litri vody s teplotou 20 °C?

Výsledok odovzdávajte v gramoch zaokrúhlený na najbližšie celé číslo.

4 Nevedko vymeral bežeckú trať, ktorá má podľa neho dĺžku 100 m. Prebehol ju konštantnou rýchlosťou za 15 s, pričom jeho hmotnosť je vraj 70 kg.

Vševedko však vie, že Nevedko robí veci len tak halabala: dĺžku trate odmeral iba s presnosťou ±5 m, čas s presnosťou ±1 s a svoju hmotnosť pozná s presnosťou ±3 kg. Aký je rozdiel najväčšej a najmenšej kinetickej energie, ktorú mohol Nevedko v skutočnosti mať počas svojho behu?

Výsledok odovzdajte v jouloch zaokrúhlený na najbližšie celé číslo.

5 Pľyš zozbierala zo záhradky uhorky a pobrala sa ich pozavárať. Pritom použila ortuťový teplomer, ktorý má pod stĺpcom výšky 36 cm s plochou prierezu 0,5 mm^2 malú guľatú nádobku. Zistite objem nádobky, ak teplomer má rozsah teplôt 125 °C. Koeficient objemovej tepelnej rozťažnosti ortuti je $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}.

Výsledok odovzdajte v mililitroch.

6 Usain Bolt šprintuje na 100 m dlhej trati. Celý čas rovnomerne zrýchľuje a celú trať prebehne za 10 s. Aký je jeho priemerný výkon počas šprintu, ak jeho hmotnosť je 80 kg?

Výsledok odovzdajte vo wattoch.

7 Tomáš by rád odvážil špeciálnu mincu z otcovej zbierky. Použil na to trubicu v tvare písmena U naplnenú vodou. Trubica je na oboch koncoch otvorená a jej prierez je práve taký ako plocha mince – presne 4 cm^2. Do jedného otvoru trubice opatrne položil na hladinu mincu, pričom medzi mincou a hladinou nezostal žiaden vzduch. Kým sa hladiny ustálili, minca pomaly klesla o 2 cm. Aká bola jej hmotnosť?

Výsledok odovzdajte v gramoch.

8 Lucku prikvačilo veľké upratovanie: umýva okná, vysáva za skriňami, olejuje parkety… ba aj luster by sa patrilo poutierať od prachu. Z komory preto vytiahla veľký maliarsky rebrík (v tvare písmena A) a rozložila ho tak, že jeho ramená zvierali uhol 60°.

Ramená rebríka majú hmotnosť 10 kg a dĺžku 2 m. Lucku by teraz zaujímalo, akou silou je napínaný povraz spájajúci stredy ramien. Trenie medzi rebríkom a čerstvo naolejovanými parketami zanedbajte.

Výsledok odovzdajte v newtonoch zaokrúhlený na aspoň jedno desatinné miesto.

9 Jaro vyrobil z tenkého plechu dutú kocku a hodil ju do bazéna. Nad hladinou vody ostala trčať presne polovica kocky. I zamyslel sa a z takého istého plechu vyrobil valec, ktorého priemer aj výška sú rovnaké, ako bola dĺžka hrany kocky. Aká časť objemu valca bude trčať nad hladinou, keď ho Jaro hodí do bazéna?

Výsledok odovzdajte ako bezrozmerné číslo.

10 Je mimoriadne horúci bratislavský deň. Edo vylovil zo skrinky valcový pohár s výškou 20 cm a s polomerom 5 cm a z posledných síl sa doplazil k umývadlu. Tam však s hrôzou zistil, že kohútik je len vo výške 16 cm nad jeho dnom. Akú najväčšiu časť objemu pohára dokáže Edo naplniť vodou?

Výsledok odovzdajte ako zlomok celého objemu pohára (t. j. bezrozmerné číslo).

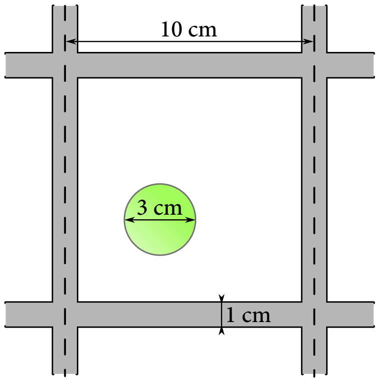
11 Kvík a Pľyš majú romantický večer pri sviečkach. Zapálili dve sviečky rôznej výšky a hrúbky. Na obale bolo napísané, že vyššia zhorí za 7 hodín, nižšia za 10 hodín. Po štyroch hodinách vyplnených romantikou si všimli, že sviečky sú práve rovnako dlhé. Koľkokrát bola na začiatku prvá sviečka vyššia?

Výsledok odovzdajte ako obyčajné číslo (bez „-krát“ a pod.).

12 V pohári je naliata voda s hustotou 1000 kg m^{-3} a nad ňou je naliata nafta s hustotou 850 kg m^{-3}. Na rozhraní kvapalín sa vznáša malá drevená kocka tak, že vo vode je dvakrát väčšia časť jej objemu ako v nafte. Aká je hustota kocky?

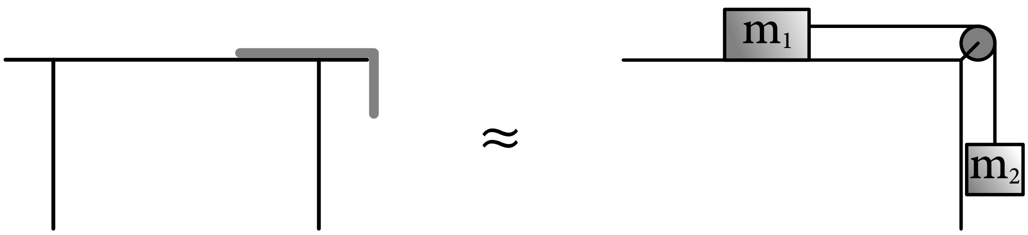
Výsledok odovzdajte v kilogramoch na meter kubický.

13 Patrik hádže loptičky s priemerom 3 cm na štvorcovú mrežu z tyčiek hrubých 1 cm, ktorých stredy majú rozostup 10 cm. Aká časť loptičiek prejde mrežou bez dotyku s tyčkou?



Výsledok odovzdajte ako bezrozmerné číslo.

14 Maťkovi sa po dlhom čase podarilo dostať do reštaurácie. Ako to však býva, dlho čakal na jedlo, a preto sa začal hrať so servítkou, ktorú mal poruke. Začal ju postupne posúvať zo stola, až kým nespadla na zem. A keďže to čakanie bolo nekonečné, stihol si aj zrátať, kedy k tomu došlo. Aby si uľahčil výpočet, rozhodol sa pretŕčajúcu časť servítky a časť servítky na stole modelovať dvojicou kvádrov s príslušnými hmotnosťami, spojených nehmotným lanom prehodeným cez kladku. Aká najväčšia časť servítky mohla pretŕčať zo stola bez toho, aby servítka spadla, uvažujúc Maťkov model? Koeficient statického trenia medzi servítkou a stolom je 0,25.



Výsledok odovzdajte ako bezrozmerné číslo.

15 Želé a Patrik bežia po trati dlhej 50 m. Patrik sa rozbehne so zrýchlením 2 m s^{-2} až po maximálnu rýchlosť 10 m s^{-1}, zatiaľ čo Želé dokáže zrýchľovať až so zrýchlením 4 m s^{-2}, ale jej maximálna rýchlosť je len 8 m s^{-1}. Ako ďaleko od cieľa bude druhý z nich v okamihu, keď prvý prebehne cieľovou čiarou?

Výsledok odovzdajte v metroch.

16 Jaro v pokoji váži 80 kg a obsahuje 75 % vody. Jaro po bicyklovom výlete obsahuje už len 70 % vody. Aká je vtedy jeho hmotnosť, ak vplyv bicyklovania na hmotnosť pevného podielu Jara môžeme zanedbať?

Výsledok odovzdajte v kilogramoch zaokrúhlený na aspoň jedno desatinné miesto.

17 Dávid sa vybral na bicyklový výlet. Po náročnom stúpaní vysmädol, nuž zašiel do bufetu po pohár vody. Pohár mal tvar valca vysokého 14 cm, a keďže Dávid svojím šarmom na bufetárku značne zapôsobil, bol naplnený až po okraj. Keď ho Dávid položil na stôl, jeho ťažisko bolo vo výške 6 cm.

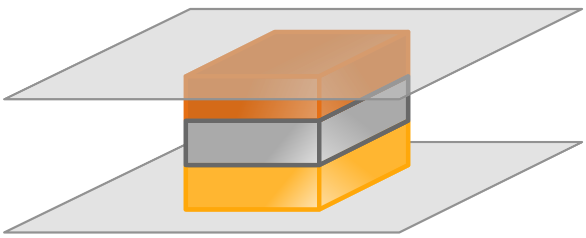
Avšak ani plný pohár nedokázal uhasiť Dávidov veľký smäd. Preto si išiel načapovať vodu ešte raz, ale tentokrát už len do polovice výšky pohára. Ťažisko bolo teraz vo výške 4 cm. Ako vysoko je ťažisko prázdneho pohára?

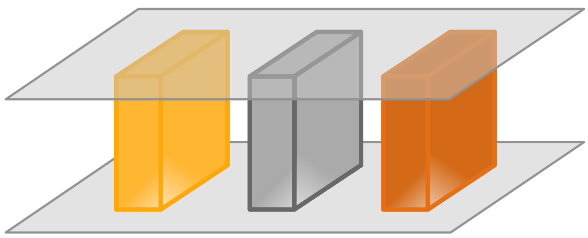
Hrúbka stien a dna pohára je zanedbateľná.

Výsledok odovzdajte v centimetroch.

18 Kráľovič Kajo dostal od kráľa v rámci skúšky dospelosti tri tehly: zlatú, striebornú a medenú, každú s rozmermi 30 cm × 30 cm × 10 cm. Kráľ dal Kajovi ohmmeter, nakázal mu, aby ich premeral, a pobral sa za svojimi štátnickými povinnosťami.

Kajo tehly najprv vložil medzi dve rovnobežné dokonale vodivé platne vzdialené od seba 30 cm ako na prvom obrázku a zistil, že celkový odpor je 4 mΩ. Aký odpor nameria, keď tehly umiestni medzi platne ako na druhom obrázku? Rozprávkové zlato je dvakrát vodivejšie ako rozprávkové striebro a trikrát vodivejšie ako rozprávková meď.





Výsledok vyjadrite v miliohmoch s presnosťou na aspoň tri platné cifry.

19 Peter je na výlete v severnom Nórsku. Práve sedí v chatrči a hundre na mizerný signál. Pozerá totiž priamy prenos a vysielanie prijíma z geostacionárneho satelitu obiehajúceho okolo Zeme. V týchto zemepisných šírkach je však satelit dosť nízko nad obzorom a signál je značne rušený losmi, lososmi a polárnymi medveďmi, takže kvalita obrazu trpí.

Vždy však môže byť ešte horšie. V akej najväčšej zemepisnej šírke by mohla byť Petrova chatrč, aby ešte stále mohol vidieť geostacionárny satelit nad obzorom?

Výsledok odovzdajte v stupňoch s presnosťou na aspoň tri platné cifry.

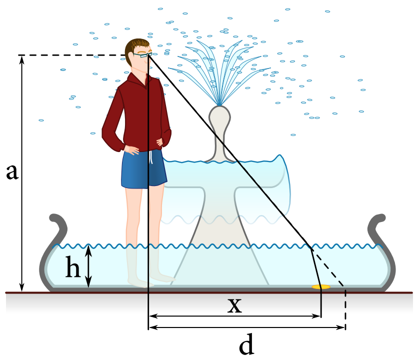
20 Vilo má vozík s dvomi pevne spojenými kolesami na osi dlhej 1 m, pričom pravé má priemer 42 cm a ľavé iba 38 cm. Ako ho tak zamyslene tlačí po rovnej lúke, nevdojak si všimne, že na tomto mieste už pred chvíľou bol. Koľko otáčok medzitým vykonali kolesá?

Odpoveď zaokrúhlite na celé číslo.

21 Tomáš sa zabáva so svojím novým pravidelným štvorstenom, ktorý sa skladá zo šiestich rovnakých drôtov, pričom každý má odpor 10 Ω. Keď na dva jeho vrcholy pripojí batériu s napätím 12 V, obvodom začne tiecť prúd. Aká je jeho veľkosť?

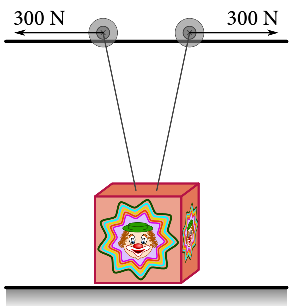
Výsledok odovzdajte v ampéroch.

22 Po pandémii nastali ťažké časy. Adam si musí zarábať upratovaním fontán. Keď opatrne vliezol do fontány, zistil, že voda v nej má hĺbku h = 0,5 m. Veľmi sa potešil, keď svojimi očami vo výške a = 2 m zbadal mincu na dne. Pri pohľade zhora sa mu zdá, že sa nachádza vo vodorovnej vzdialenosti d = 0,8 m od jeho nôh. Do akej vzdialenosti x má rukou siahnuť, aby ju vylovil?



Výsledok odovzdajte v centimetroch zaokrúhlený na celé číslo.

23 Maťko s Majom by radi zdvihli úroveň svojho humoru. Krátky prieskum trhu však ukázal, že komerčne dostupné žeriavy na to nestačia. Svoje vtipy preto naložili do škatule a tú zavesili na dve mocné laná dĺžky L = 3 m. Na konci každého z lán je pripevnené koliesko, ktoré môže voľne jazdiť po koľajnici na strope. Maťko s Majom dokážu každý ťahať koliesko silou F = 300 N. O koľko najviac vedia škatuľu s hmotnosťou m = 100 kg nadvihnúť?



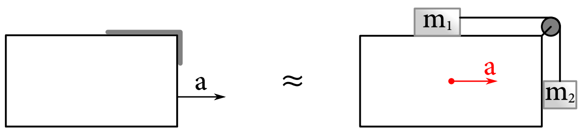
Výsledok odovzdajte v metroch s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

24 Vilo sa so svojím dvojkolesovým vozíkom značne natrápi. Napriek viacerým zúfalým pokusom o opravu sú kolieska stále nerovnako veľké a vozík pri potlačení neúprosne zatáča do strany. Pri poslednej opravárenskej seanse sa mu ho podarilo vylepšiť aspoň natoľko, že sa vozík vždy pohybuje po oblúku s konštantným polomerom 20 m.

Vilo je ale prešpekulovaný: občas zastaví a kolieska jednoducho prehodí. Ako najrýchlejšie takto dokáže s vozíkom prejsť na druhý koniec záhrady dlhej 200 m, ak vozík tlačí rýchlosťou 1 m s^{-1} a výmena koliesok mu trvá zakaždým 10 s? Na začiatku a konci trasy môže byť otočený ľubovoľným smerom, ako sa mu to najviac hodí.

Výsledok odovzdajte v sekundách zaokrúhlený na celé číslo.

25 Keď sa Maťko celý naradovaný vrátil domov z reštaurácie, napadla mu hneď ešte jedna vec, ktorá by sa so servítkou dala vyskúšať. Zobral si servítku a položil ju na kváder tak, že z nej pretŕčali dve pätiny. Potom servítku pustil a ihneď začal kváder posúvať s nejakým zrýchlením a. S akým najmenším zrýchlením musel Maťko kváder posúvať, aby servítka nespadla? Opäť uvažujte Maťkov model, v ktorom aproximoval servítku dvojicou kvádrov s príslušnými hmotnosťami, spojených nehmotným lanom prehodeným cez kladku. Medzi servítkou a kvádrom pôsobí koeficient statického trenia 0,25.



Výsledok vyjadrite v m/s^2 s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

26 Tomáš pri zjazde na lyžiach stretáva cestou dolu 24 lyžiarov na vleku za minútu. Pri vyťahovaní sa na vleku uvidí na svahu v priemere 12 lyžiarov za minútu. Vlek sa hýbe rýchlosťou 2 m s^{-1}. Aký je rozostup medzi kotvami?

Výsledok vyjadrite v metroch.

27 Vladko zavítal na hokejový zápas. V návale radosti po skórovanom góle hádžu fanúšikovia na ľad konfety. Vladko namiesto konfiet hodil na plochu rolku toaletného papiera, ktorá sa po dopade úplne rozvinula. Hmotnosť prázdnej rolky bola 10 g a jej priemer bol 5 cm, zatiaľ čo hmotnosť toaletného papiera na nej navinutého bola 70 g, jeho hrúbka 0,5 mm a dĺžka 20 m.

Vzápätí na ľad vybehli usporiadatelia a pokúsili sa tento neporiadok čo najskôr upratať. Jeden z nich zobral prázdnu rolku, prudko ju roztočil a priložil k rozvinutému toaletnému papieru. S akou frekvenciou ju musel rozrotovať, aby sa celý toaletný papier na rolku navinul a tá po navinutí práve zastala?

Trenie medzi ľadom a toaletným papierom je zanedbateľne malé.

Výsledok odovzdajte v hertzoch zaokrúhlený na aspoň jedno desatinné miesto.

28 Krtkovi sa pri plienení bufetu vo FKS na hlavu vysypala bezodná škatuľa s rôzne tuhými dokonalými pružinami s nulovou pokojovou dĺžkou. I spojil za seba pružinky s tuhosťami k, $2k$, $4k$, $8k$, …, $2^n k$, … S akou periódou bude Krtko kmitať, keď túto výslednú veľpružinu zavesí zo stropu, chytí sa za koniec a rozhojdá sa vo zvislom smere?

Krtkova hmotnosť po vyplienení bufetu je 100 kg a tuhosť prvej zo série pružín je 10 kN m^{-1}.

Výsledok vyjadrite v sekundách s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

29 Kubo našiel na smetisku dejín pohodené UFO a rozhodol sa ho vzkriesiť. Čo už nenašiel, bola odvaha naskočiť na jeho palubu osobne. Preto naň posadil psíka svojej babky, Maca, a vypustil ho do beztiažového stavu.

Maco sa teraz nachádza na okraji UFA tvaru disku s polomerom 5 m rotujúceho s takou uhlovou rýchlosťou, že na jeho okraji cíti preťaženie 10 m s^{-2}. Koľko najmenej práce musí vynaložiť, ak sa chce dostať do jeho stredu? Maco váži 10 kg a oproti UFU je zanedbateľne ľahký.

Výsledok odovzdajte v jouloch.

30 Kristián a Leoš hrajú futbal na betónovom ihrisku. Leoš s loptou bežal ku Kristiánovej bráne, kde mu ju Kristián zobral, a teraz s ňou beží k Leošovej bráne rýchlosťou 8 m s^{-1}. Leoš beží tesne za ním tou istou rýchlosťou. Kristián je veľký frajer, takže kopne loptu na bránu zo vzdialenosti 20 m tak, že lopta tesne po kopnutí nerotuje a vykonáva len posuvný pohyb. Lopta sa postupne rozkotúľa. Akou najmenšou rýchlosťou musí Kristián odkopnúť loptu, aby ju Leoš nedobehol skôr, ako lopta vojde do bránky?

Koeficient šmykového trenia medzi loptou a betónom je 0,75 a valivý odpor je zanedbateľný. Nezabúdajte, že lopta je dutá.

Výsledok odovzdajte v metroch za sekundu zaokrúhlený na aspoň dve desatinné miesta.

31 Chceme do vesmíru vypustiť homogénny guľatý satelit s polomerom 50 cm a hmotnosťou 100 kg. Vieme, že keď sa oddelí od nosnej rakety, bude rotovať rýchlosťou jednej otáčky za sekundu. Na jeho povrch preto ešte pred štartom pripevníme dve rovnaké závažia. Každé závažie bude pripevnené na nehmotnom lane dlhom 20 m. Po oddelení od rakety sa laná odvinú a následne odstrihnú. Aká musí byť hmotnosť jedného závažia, aby po ich odstrihnutí rotoval satelit rýchlosťou jednej otáčky za minútu?

Hmotnosť závaží nerátajte do hmotnosti satelitu.

Výsledok odovzdajte v kilogramoch s presnosťou na aspoň tri platné cifry.

32 Krtko má doma na stole položeného malého robota, ktorého pre účely fyzikálnej analýzy môžeme aproximovať ako dva hmotné body situované nad sebou, každý s hmotnosťou 200 g, a spojené pružinou s pokojovou dĺžkou 5 cm a tuhosťou 100 N m^{-1}. Minulý mesiac však Krtko zabudol zaplatiť účet za gravitáciu a v jedno pekné slnečné ráno z komunálnych služieb poslali technika, aby mu ju odpojil.

V okamihu, keď sa gravitácia v byte vypla, robot sa kvôli pružinke pomaly odtlačil od stola a začal sa vznášať po miestnosti. Aká bude najväčšia dĺžka pružinky pri tomto pohybe?

Výsledok odovzdajte v centimetroch zaokrúhlený na aspoň dve platné cifry.

33 Maťko a Kubko stoja na grúni a hádžu si slepačie vajcia. Maťko hodí Kubkovi vajce dolu svahom so sklonom 27° v čase $T_0 = 0$ s a Kubko, ktorý stojí o 18 m nižšie, ho chytí v čase $T_1 = 3$ s. V akom čase bude vajce najďalej od svahu?

Výsledok vyjadrite v sekundách.

34 Lucka vzala Patrika na romantický prelet balónom ponad Ivachnovú. Nenafúknutý balón aj s posádkou má hmotnosť 1 t, po nafúknutí má polomer 20 m a jeho horák ohrieva vzduch konštantným výkonom 10 kW. Koeficient prestupu tepla cez balón je 0,1 W m^{-2} K^{-1}. Do akej výšky vystúpa v izotermickej atmosfére s teplotou 0 °C?

Tiažové pole v širšom okolí Ivachnovej je homogénne a jeho veľkosť je g, zatiaľ čo liptovský vzduch sa senzorickými a fyzikálnymi vlastnosťami podobá ideálnemu plynu.

Výsledok odovzdajte v kilometroch s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

35 Po úspešnom testovacom lete sa aj Kubo pochlapil, nastúpil do UFA osobne a odletel do otvoreného vesmíru. Teraz sedí na jeho okraji, kde v dôsledku rotácie cíti preťaženie 10 m s^{-2}. Kubo sa následne presunul do stredu UFA. Akú prácu pri tom musel vykonať?

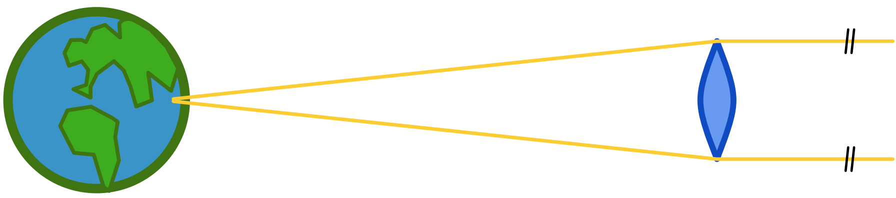
UFO má tvar disku s polomerom 5 m. Hmotnosť UFA je 600 kg. Kuba považujte za veľmi hmotný bod s hmotnosťou 150 kg.

Výsledok odovzdajte v jouloch.

36 Zlí mimozemšťania by radi zapálili Zem! Mesiac nahradili gigantickou dokonalou šošovkou s ohniskovou vzdialenosťou rovnou polomeru jeho niekdajšej dráhy. Aký výkon na jednotku plochy budú prijímať solárne panely na Zemi na mieste presne pod Slnkom počas toho, čo by predtým bývalo úplným zatmením Slnka?

Bežná solárna konštanta je 1361 W m^{-2}. Uhlový rozmer Mesiaca a Slnka považujte za rovnaký a Slnko za dokonalú guľu s polomerom $R_☼ = 7 \cdot 10^5$ km.

Výsledok odovzdajte v W m^{-2} s presnosťou na aspoň tri platné cifry.



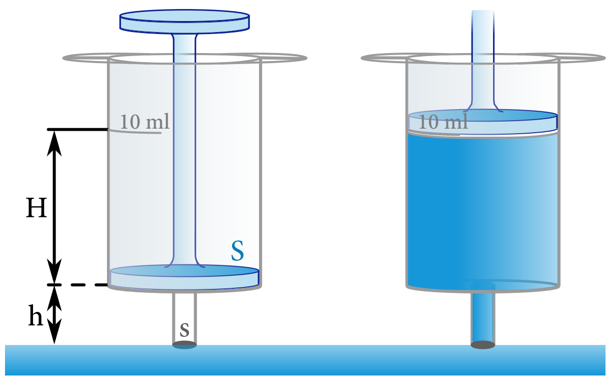
37 Tomáša by zaujímalo, akú časť hmotnosti Venuše tvorí jej atmosféra. Pozná gravitačnú konštantu G, hmotnosť Venuše $M_♀ = 4{,}87 \cdot 10^{24}$ kg, polomer Venuše $R_♀ = 6052$ km a predpokladá, že jej atmosféra je izotermická a je tvorená čistým CO_2 s teplotou $T = 737$ K a že tlak na povrchu je 93-krát vyšší ako na Zemi.

Hrúbku atmosféry považujte za zanedbateľnú voči rozmeru planéty.

Výsledok odovzdajte ako zlomok hmotnosti Venuše (t. j. bezrozmerné číslo) s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

38 Vychýrená biofyzička Kaťa vyvíja novú vakcínu a testuje ju na morčatách. Na vstreknutie vakcíny používa injekčné striekačky s nominálnym objemom 10 ml v tvare valca s podstavou $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ a desaťmililitrovou ryskou vo výške $H = 10$ cm.

Striekačka má vo svojej dolnej časti výbežok s výškou $h = 1$ cm a otvorom veľkosti $s = 1\,\mathrm{mm}^2$. Vakcínu do striekačky naťahuje tak, že ju priloží dolným okrajom výbežku k voľnej hladine a rýchlo potiahne piestom až po značku označujúcu desať mililitrov. O koľko sa líši objem natiahnutej vakcíny v striekačke oproti jej nominálnej hodnote?



Hustota vakcíny je rovná hustote vody. Vzduch v laboratóriu pokladajte za ideálny dvojatómový plyn.

Výsledok odovzdajte v mililitroch s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

39 Milan v koronových časoch zistil, že vyučovať online je veľmi náročné. Študenti mu na prednáškach z neznámych príčin postupne zaspávajú a prestávajú reagovať. Polčas straty vedomia jedného študenta je 20 minút.

Koľko najmenej študentov musí byť na prednáške, aby aj po hodine ostal s pravdepodobnosťou 99 % pri vedomí aspoň jeden?

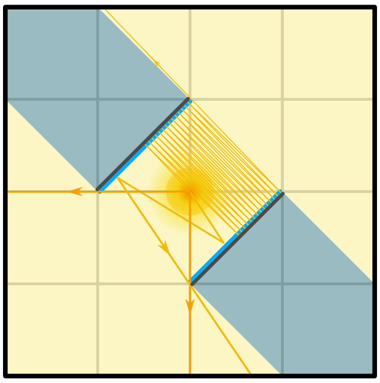
Počet študentov musí byť, samozrejme, celočíselný.

40 Justína v očkovacej lotérii okrem iného nevyhrala permanentný tyčový magnet. Jeden jeho pól má plochu 3 cm^2 a unesie železnú tyč vo vertikálnej polohe s rovnakým prierezom nanajvýš hmotnosti 1,5 kg. Aká je veľkosť magnetickej indukcie v jeho tesnej blízkosti?

Výsledok vyjadrite v teslách s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

Vzorové riešenia

1 Svetlo sa podľa zákona odrazu odráža tak, že uhol odrazu je rovný uhlu dopadu, čiže osovo symetricky podľa normály (kolmice na povrch) v mieste odrazu. Keďže zrkadlá v Sabinkinej izbe sú postavené k sebe rovnobežne, lúč odrazený od jedného z nich k druhému dopadne na druhé pod rovnakým uhlom, pod akým sa odrazil od prvého. To znamená, že aj lúč, ktorý sa zo žiarovky od zrkadla odrazí pod veľmi malým uhlom, sa bude pod rovnakým uhlom odrážať medzi zrkadlami, až nakoniec po konečnom počte odrazov spomedzi nich vyletí a narazí na stenu skoro kolmo za okrajom zrkadla.



Obrázok 1.1: *Odrazy svetla v Sabinkinej izbe*

Z toho už vidíme, že neosvetlené budú len steny kolmo za zrkadlom, ktoré tvoria 4 m z obvodu šatníka.

2 Uvažujme, že Helboj si odkrojil kúsok torty o výške h, pričom torta mala polomer r, hustotu ρ a uhol kruhového výseku bol α. Hmotnosť kúsku torty vypočítame ako súčin jeho objemu a hustoty. Hmotnosť kúsku Helbojovej torty je teda

$$m_H = \pi r^2 h \frac{\alpha}{2\pi}\rho = \frac{1}{2} r^2 h\alpha\rho, \tag{2.1}$$

zatiaľ čo Samkov kus torty má síce iba polovičný polomer, zato však v ostatných parametroch je dvojnásobne výživnejší. Jeho hmotnosť je

$$m_S = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 2h \frac{2\alpha}{2\pi} 2\rho = r^2 h\alpha\rho. \tag{2.2}$$

Po vydelení zistíme, že Samkov kúsok má dvojnásobnú hmotnosť oproti Helbojovmu.

3 Ak vložíme do nádoby ľad s našou hľadanou hmotnosťou m_l, ľad sa začne topiť až pokiaľ nezostane v nádobe iba voda s teplotou 0 °C. Voda ohrievaním ľadu vykoná prácu a odovzdá ľadu teplo. Pretože sa odovzdané teplo rovná prijatému teplu, použijeme kalorimetrickú rovnicu

$$m_v c_v \left(T_v - T_0\right) = m_l c_l \left(T_0 - T_l\right) + m_l l_l, \tag{3.1}$$

kde c_v a c_l sú merné tepelné kapacity vody a ľadu, m_v a m_l sú ich hmotnosti a T_v a T_l ich počiatočné teploty, T_0 je konečná teplota 0 °C a l_l je skupenské teplo potrebné na roztopenie ľadu na vodu.

Odtiaľ nám stačí vyjadriť m_l ako

$$m_l = \frac{m_v c_v \left(T_v - T_0\right)}{c_l \left(T - T_l\right) + l_l}. \tag{3.2}$$

Po dosadení hodnôt zo zadania a konštantovníka dostávame $m_l = 225$ g.

4 Rýchlosť Nevedka vypočítame ako $v = \frac{s}{t}$, takže jeho kinetická energia je $T = \frac{1}{2} m \frac{s^2}{t^2}$.

Maximálnu hodnotu nadobudne vtedy, keď za veličiny v čitateli (hmotnosť a dráha) dosadíme najväčšie hodnoty, ktoré Nevedko mohol namerať, a za hodnoty v menovateli (čas) najmenšie možné hodnoty. Minimálnu T vypočítame presne naopak, teda do čitateľa dosádzame čo najmenšie hodnoty, do menovateľa čo najväčšie.

Po dosadení hodnôt do zadania sa dozvieme, že

$$\begin{aligned} T_{\max} - T_{\min} &= \frac{1}{2}\left(m_{\max}\frac{s_{\max}^2}{t_{\min}^2} - m_{\min}\frac{s_{\min}^2}{t_{\max}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 73\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{105\ \mathrm{m}}{14\ \mathrm{s}}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot 67\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{95\ \mathrm{m}}{16\ \mathrm{s}}\right)^2 \doteq 2053\ \mathrm{J} - 1181\ \mathrm{J} \doteq 872\ \mathrm{J}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

5 Na počiatku nech ortuť vypĺňa celú nádobku naspodku teplomera, ktorej objem označíme V_0. Keď sa nám podarí teplomernú kvapalinu zohriať tak, že vystúpi až do výšky H, jej objem bude $V_1 = V_0 + HS$. Zároveň nám stupnica teplomera hovorí, že teplota ortuti stúpla o ΔT, teda za predpokladu lineárnej objemovej tepelnej rozťažnosti vieme jej objem vyjadriť aj ako $V_1 = V_0\left(1 + \beta\,\Delta T\right)$, kde β je koeficient objemovej tepelnej rozťažnosti.

Týmto sme sa dostali k výsledku tak blízko, že ho uvádzame už v nasledujúcich dvoch riadkoch.

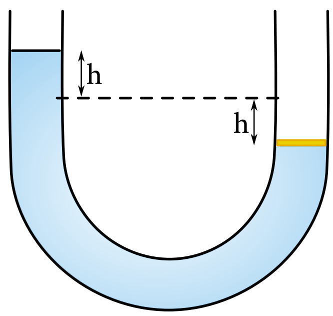
$$V_0 + HS = V_0\left(1 + \beta\,\Delta T\right) \quad\Rightarrow\quad V_0 = \frac{HS}{\beta\,\Delta T}. \tag{5.1}$$

Pre hodnoty zo zadania to je presne 8 ml.

6 Usainov výkon vieme spočítať ako $P = \frac{W}{t}$, kde čas t poznáme. Prácu W spočítame ako $W = F\cdot s = m\cdot a\cdot s$. Zrýchlenie a odvodíme z $s = \frac{1}{2}at^2$ ako $a = \frac{2s}{t^2}$. Dosadením potom dostaneme

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m\cdot a\cdot s}{t} = \frac{m\cdot 2s\cdot s}{t^3} = \frac{m\cdot 2s^2}{t^3} = \frac{80\ \mathrm{kg}\cdot 20\,000\ \mathrm{m}^2}{1000\ \mathrm{s}^3} = 1600\ \mathrm{W}. \tag{6.1}$$

7 Po položení mince na hladinu sa hladina zníži o výšku h vplyvom tiažovej sily $F_g = mg$. Keďže voda je pre praktické účely nestlačiteľná, objem sa musí zachovať, a hladina na druhej strane musí o rovnakú výšku h vystúpať.



Obrázok 7.1: *Minca v trubici*

Tlak, ktorým tlačí minca, musí byť rovnaký ako hydrostatický tlak vytvorený stĺpcom o výške $2h$, takže

$$\begin{gathered} p_m = \frac{F_g}{S} = \frac{mg}{S} \stackrel{!}{=} 2\rho g h = p_h, \\ 2\rho h = \frac{m}{S} \end{gathered} \tag{7.1}$$

a odtiaľ

$$m = 2\rho h S \approx 2 \cdot 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 2\ \mathrm{cm} \cdot 4\ \mathrm{cm^2} = 16\ \mathrm{g}. \tag{7.2}$$

$\boxed{8}$ Na úvod si treba uvedomiť, že zo symetrie obrázka môžeme jednu časť rebríka odstrániť a nahradiť stenou kolmou na zem. Dostaneme prípad, kedy rebrík so stenou zviera uhol $\frac{\alpha}{2}$.

Napíšeme si sily vo vertikálnom a horizontálnom smere. Vo vertikálnom smere pôsobí normálova sila N_1 od podlahy hore a tiažová sila G z ťažiska dole. V horizontálnom smere pôsobí normálova sila N_2 od steny a napínajúca sila lana T smerom ku stene. Na to, aby sa rebrík nehýbal, potrebujeme ešte dosiahnuť rovnováhu momentov síl. Vyberieme si preto bod, vzhľadom na ktorý ho budeme počítať. Najlepšie bude zvoliť si ťažisko, pretože sily T a G majú na tento bod nulový moment.

Teraz už iba dáme do rovnosti moment sily N_2 s ramenom $\frac{L}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ a moment sily N_1 s ramenom $\frac{L}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, kde L je dĺžka ramena rebríka. Napíšeme si naše rovnice

$$\begin{gathered} N_1 = mg, \\ N_2 = T, \\ N_2 \frac{L}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = N_1 \frac{L}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \end{gathered} \tag{8.1}$$

a dostaneme

$$T = mg \tan\frac{\alpha}{2}. \tag{8.2}$$

Po dosadení hodnôt dostávame $T \doteq 56{,}6\ \mathrm{N}$.

9 Z informácie, že nad hladinou zostala polovica kocky, vieme napísať rovnicu pre rovnosť gravitačnej a vztlakovej sily, z ktorej zistíme hmotnosť kocky:

$$mg = \frac{1}{2}a^3\rho_{H_2O}g \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}a^3\rho_{H_2O}. \tag{9.1}$$

Aby sme vedeli odpovedať na otázku zo zadania, potrebujeme napísať rovnakú rovnicu pre valec. Tenký plech je len nejaká zakrivená plocha, preto budeme počítať s plošnou hustotou $\sigma = \frac{m}{S}$.

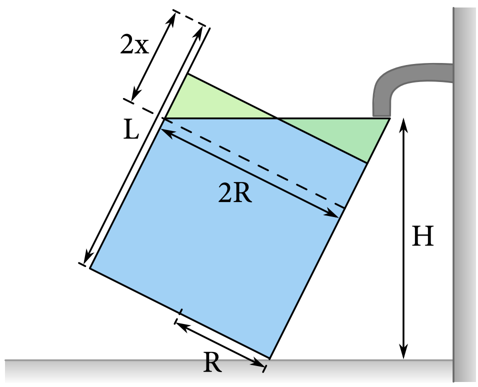
Plochu kocky poznáme, teda plošná hustota plechu je $\sigma = \frac{a\rho_{H_2O}}{12}$. Dáme si pozor, že a nie je polomer valca, ale jeho priemer, a potom jednoducho vypočítame plochu valca ako $S = 2\pi\frac{a^2}{4} + 2\pi\frac{a}{2}a = \frac{3}{2}\pi a^2$. Odtiaľ poznáme hmotnosť valca $m = \sigma S = \frac{1}{8}\pi a^3\rho_{H_2O}$ a môžeme ju použiť v rovnici pre rovnosť síl.

Nech výška valca, ktorá je ponorená, je x. Potom

$$\frac{1}{8}\pi a^3\rho_{H_2O}g = x\pi\frac{a^2}{4}\rho_{H_2O}g \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}. \tag{9.2}$$

Nad hladinou vody teda zostane presne polovica objemu valca rovnako ako pri kocke.

10 Označme si výšku pohára L, výšku, v ktorej sa nachádza kohútik, H a polomer pohára R.



Obrázok 10.1: *Geometria vody v pohári*

Keďže hladina je vodorovná, voda v pohári má tvar zrezaného valca, kde výška odrezaného kúsku je $2x$. Keď si naplnený pohár pomyselne nakloníme naspäť do nenaklonenej polohy, hladina bude od okraja pohára vzdialená x. Z podobnosti trojuholníkov vyplýva

$$\frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{H} = \frac{2x}{2R}, \tag{10.1}$$

odkiaľ

$$x = \frac{R\sqrt{L^2 - H^2}}{H} \tag{10.2}$$

za predpokladu, že $H \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$, čo vieme rýchlo overiť (v opačnom prípade by voda zaujala iný tvar, ktorého objem sa počíta o niečo ťažšie). Keďže veľkosť podstavy je rovnaká, pomer objemu vody a objemu pohára je

$$\frac{V_{\text{voda}}}{V_{\text{pohár}}} = \frac{L - \frac{R\sqrt{L^2-H^2}}{H}}{L} = 1 - \frac{R\sqrt{L^2-H^2}}{LH}. \tag{10.3}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania dostávame $^{13}/_{16} = 0{,}8125$.

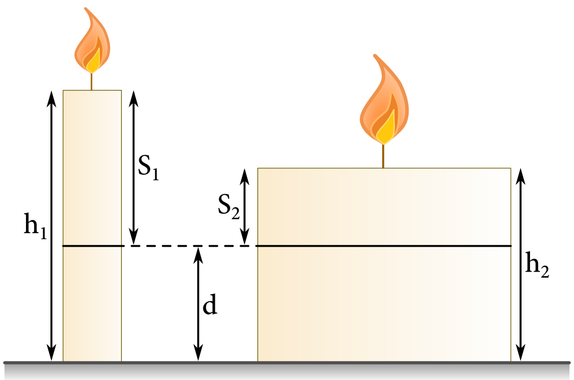
11 Označme si rýchlosť horenia sviečok ako $v_1 = \frac{h_1}{t_1}$ a $v_2 = \frac{h_2}{t_2}$. Po štyroch hodinách sa prvá sviečka zmenší o s_1 a druhá o s_2, takže pre rýchlosť horenia sviečok platí

$$v_1 = \frac{s_1}{t} = \frac{h_1}{t_1} \qquad \text{a} \qquad v_2 = \frac{s_2}{t} = \frac{h_2}{t_2}. \tag{11.1}$$

Ak si teraz vyjadríme s_1, s_2 a odčítame ich od h_1 a h_2, dostávame výšku sviečok d, ktorá je po štyroch hodinách rovnaká,

$$h_1 - \frac{h_1}{t_1}t = d = h_2 - \frac{h_2}{t_2}t. \tag{11.2}$$

Po vyjadrení pomeru $\frac{h_1}{h_2}$ a dosadení hodnôt zo zadania dostávame výsledok $\frac{7}{5}$.



Obrázok 11.1: *Horiace sviečky na začiatku romantiky*

12 Na začiatku by bolo načim zistiť, aká časť objemu kocky sa nachádza v jednotlivých kvapalinách. Ak časť objemu kocky v nafte označíme x, potom je vo vode $2x$ objemu kocky, a spolu tieto dva objemy tvoria objem jednej kocky. Riešime teda hrozivo vyzerajúcu rovnicu $x + 2x = 1$, ktorej riešením je $x = \frac{1}{3}$.

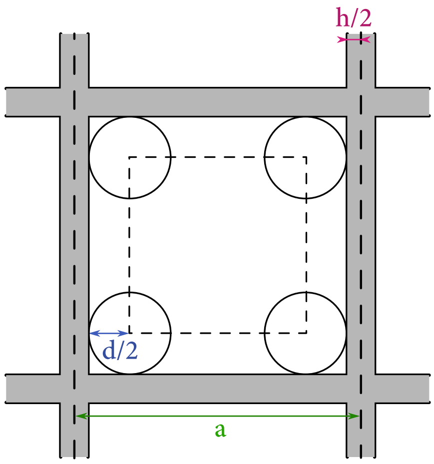
Predpokladajme, že kocka má objem V a hustotu ρ. a označme hustotu vody $\rho_{\mathrm{H_2O}}$ a hustotu nafty ρ_{N}. Na kocku pôsobí nadol gravitačná sila a nahor pôsobí vztlaková sila. Kocka sa voľne vznáša, preto musia byť veľkosti síl rovnaké. Napíšeme si rovnicu rovnosti síl

$$V\rho g = \frac{1}{3}V\rho_{\mathrm{N}}g + \frac{2}{3}V\rho_{\mathrm{H_2O}}g. \tag{12.1}$$

Ako možno vidieť, výsledok nezávisí od veľkosti kocky ani od veľkosti tiažového zrýchlenia, pretože všetky tieto veličiny môžeme z rovnice vykrátiť. Potom nám zostane

$$\rho = \frac{\rho_{\mathrm{N}} + 2\rho_{\mathrm{H_2O}}}{3} = 950\ \mathrm{kg\,m^{-3}}. \tag{12.2}$$

13 Stačí nám uvažovať len jedno oko mreže, v ktorom si vytýčime oblasť, ktorou musí prejsť stred loptičky, aby nedošlo k dotyku. Časť loptičiek, ktorá prejde, je potom rovná pomeru našej vytýčnej plochy a plochy celého oka. Stred loptičky pochopiteľne nemôže prejsť tyčkou a určite od nej musí byť vzdialený aspoň polovicu priemeru loptičky.

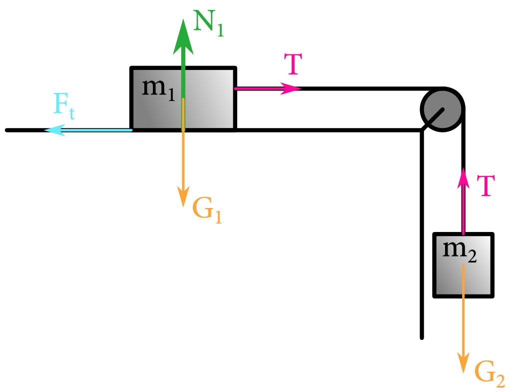


Obrázok 13.1: *Loptička a štvorcová mreža*

V obrázku sú zakreslené hraničné polohy loptičky, kedy ešte prejde bez dotyku. Z toho vidíme, že z celkového rozostupu stredov tyčiek a musíme dvakrát odčítať polovicu hrúbky tyčky h a dvakrát odčítať polovicu priemeru loptičky d, aby sme vytýčili našu plochu. Je to vyšrafovaný štvorec, ktorého plocha je $(a - h - d)^2$. Vydelíme to plochou celého oka, čím dostávame výsledok

$$\frac{N_{\mathrm{prejde}}}{N} = \frac{(a - h - d)^2}{a^2} = 0{,}36. \tag{13.1}$$

14 Servítku visiacu cez roh stola máme aproximovať ako dve závažia spojené lanom. Jedno závažie hmotnosti m_1 sa nachádza na stole a druhé hmotnosti m_2 z neho visí, pričom celková hmotnosť sústavy bude $m = m_1 + m_2$.



Obrázok 14.1: *Sily pôsobiace na idealizovanú servítku*

Keď sa pozrieme na sily, vidíme, že vertikálne nám na druhé teleso pôsobia tiažová sila G_2 smerom dole a napínajúca sila lana T smerom hore. Vertikálne sily pôsobiace na prvé teleso sú smerom nadol tiažová sila G_1 a smerom nahor normálová sila N_1. Horizontálne sily pôsobiace na prvé teleso sú trecia sila F_t pôsobiaca doľava a napínajúca sila T pôsobiaca doprava.

$$\begin{aligned} N_1 = G_1 &= m_1 g, \\ T = G_2 &= m_2 g, \\ T = F_t &= N_1 f, \end{aligned} \tag{14.1}$$

kde f je koeficient trenia medzi servítkou a stolom.

Dosadením do tretej rovnice z (14.1) dostávame

$$m_2 g = f m_1 g = f m g - f m_2 g,$$

odkiaľ vieme vyjadriť

$$\frac{m_2}{m} = \frac{fg}{g + fg} = \frac{f}{f+1}.$$

Pomer $\frac{m_2}{m}$ vyjadruje hmotnosť pretŕčajucej časti ku celkovej hmotnosti, čo je presne čo sme chceli zistiť. Po dosadení dostaneme, že môže pretŕčať $1/5 = 0{,}2$ servítky.

Na záver poznamenajme, že takýto model servítky nie dobre vystihuje realitu. V skutočnosti totiž dochádza k pomerne výraznej zmene v napätí v servítke cez hranu stola, čo sa v kvádrikovom modeli prejaví tak, že ťahová sila v lanku sa mení, a teda horný a dolný kvádrik sú ťahané rôzne veľkými silami.

15 Pohyb Želé a Patrika si rozdelíme na dve časti, zrýchlený a rovnomerný pohyb. Označme si dĺžku trasy s a čas potrebný na jej prebehnutie t_P, resp. t_Z.

Najprv sa pozrime na zrýchlený pohyb. Pre prejdený čas tu platí

$$t_I = \frac{v}{a} \tag{15.1}$$

a pre ubehnutú vzdialenosť musí pre oboch bežcov platiť

$$s_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}at_{\mathrm{I}}^2 = \frac{v^2}{2a}. \tag{15.2}$$

Pre rovnomerný pohyb platí jednoducho

$$t_{\mathrm{II}} = \frac{s_{\mathrm{II}}}{v} = \frac{s - s_{\mathrm{II}}}{v}. \tag{15.3}$$

Celkový čas, ktorý to bude trvať, je teda

$$t = t_{\mathrm{I}} + t_{\mathrm{II}} = \frac{v}{a} + \frac{s - s_{\mathrm{II}}}{v} = \frac{v}{a} + \frac{2sa - v^2}{2av} = \frac{2v^2 + 2sa - v^2}{2av} = \frac{v^2 + 2sa}{2av}. \tag{15.4}$$

Vidíme, že po dosadení hodnôt bude Patrikov beh trvať $t_P = 7{,}5$ s a Želé bude na prebehnutie trasy potrebovať $t_Z = 7{,}25$ s.

Želé teda bude v cieli o 0,25 sekundy skôr. Patrik sa v tej chvíli už pohybuje rovnomerne, pretože zrýchľoval iba 5 sekúnd. Od cieľa bude teda vzdialený

$$s_p = v_p \cdot \left(t_p - t_z\right) = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}25\ \mathrm{s} = 2{,}5\ \mathrm{m}. \tag{15.5}$$

Takže preteky vyhrá Želé a Patrik bude v tom okamihu vzdialený 2,5 m od cieľa.

16 Jarovo telo je sčasti tvorené aj sušinou, ktorej sa úbytok vody netýka. Keďže Jaro váži 80 kg a z troch štvrtín je tvorený vodou, Jarova sušina tvorí štvrtinu jeho hmotnosti, čiže 20 kg. Telo vyšťaveného Jara je tvorené vodou už len zo 70 %, teda suchých 20 kg jeho tela tvorí teraz až 30 % hmotnosti. Využitím trojčlenky vypočítame, koľko kilogramov je 100 % hmotnosti, a výsledkom je, že Jaro teraz váži 66,67 kg.

17 Označme si hmotnosť pohára m_p, hmotnosť vody v plnom pohári m_v, výšku pohára h, výšku ťažiska prázdneho pohára v, výšku ťažiska plného pohára v_1 a výšku ťažiska poloplného pohára v_2. Pre ťažisko plného pohára potom možno písať rovnicu

$$m_p v + m_v \frac{h}{2} = \left(m_p + m_v\right) v_1 \tag{17.1}$$

a pre ťažisko poloplného pohára rovnicu

$$m_p v + \frac{m_v}{2}\frac{h}{4} = \left(m_p + \frac{m_v}{2}\right) v_2. \tag{17.2}$$

Ak budeme uvažovať plochu podstavy pohára S a hustotu nápoja ρ, rovnice prejdú na

$$\begin{aligned} m_p v + \frac{1}{2}S\rho h^2 &= \left(m_p + S\rho h\right) v_1, \\ m_p v + \frac{1}{8}S\rho h^2 &= \left(m_p + \frac{1}{2}S\rho h\right) v_2. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Výrazy obsahujúce plochu podstavy prehádžeme na jednu stranu rovníc, výrazy obsahujúce hmotnosť pohára na druhú stranu a rovnice medzi sebou predelíme. Po krátkych úpravách dostávame

$$v = \frac{v_2\left(\frac{1}{2}h - v_1\right) - v_1\left(\frac{1}{8}h - \frac{1}{2}v_2\right)}{\frac{3}{8}h - v_1 + \frac{1}{2}v_2}. \tag{17.4}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania dostávame $v = 4{,}4$ cm.

18 Zo zadania vieme, že vzťah medzi vodivosťami kovov je

$$\sigma_{\mathrm{Au}} = 2\sigma_{\mathrm{Ag}} = 3\sigma_{\mathrm{Cu}}. \tag{18.1}$$

Odpor vodiča, ktorého prierez sa nemení, vypočítame podľa vzorca

$$R = \frac{L}{\sigma S}. \tag{18.2}$$

Označme odpor sériového zapojenia R_1, odpor paralelného zapojenia R_2, dĺžku 10 cm strany tehál a a dĺžku 30 cm strán b. Na ľavom obrázku máme sériové zapojenie, pre ktoré platí

$$R_1 = \frac{a}{\sigma_{\mathrm{Au}}b^2} + \frac{a}{\sigma_{\mathrm{Ag}}b^2} + \frac{a}{\sigma_{\mathrm{Cu}}b^2} = \frac{a}{\sigma_{\mathrm{Au}}b^2} + \frac{2a}{\sigma_{\mathrm{Au}}b^2} + \frac{3a}{\sigma_{\mathrm{Au}}b^2} = \frac{6a}{\sigma_{\mathrm{Au}}b^2}, \tag{18.3}$$

odkiaľ vieme vyjadriť vodivosť rozprávkového zlata ako

$$\sigma_{\mathrm{Au}} = \frac{6a}{R_1 b^2}. \tag{18.4}$$

Na pravom obrázku sú rovnaké tehly zapojené paralelne, zmenila sa však aj ich orientácia. Pre paralelne zapojené rezistory platí

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{\mathrm{Au}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{Ag}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{Cu}}}, \tag{18.5}$$

takže môžeme zostaviť rovnicu

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sigma_{\mathrm{Au}}ab}{b} + \frac{\sigma_{\mathrm{Au}}ab}{b} + \frac{\sigma_{\mathrm{Au}}ab}{b} = \sigma_{\mathrm{Au}}a + \frac{\sigma_{\mathrm{Au}}a}{2} + \frac{\sigma_{\mathrm{Au}}a}{3} = \frac{11\sigma_{\mathrm{Au}}a}{6}. \tag{18.6}$$

Úpravou a dosadením vodivosti rozprávkového zlata z rovnice 18.4 dostaneme

$$R_2 = \frac{6L}{11\sigma_{\mathrm{Au}}a} = \frac{R_1 b^2}{11a^2} \approx 3{,}27\ \mathrm{m}\Omega. \tag{18.7}$$

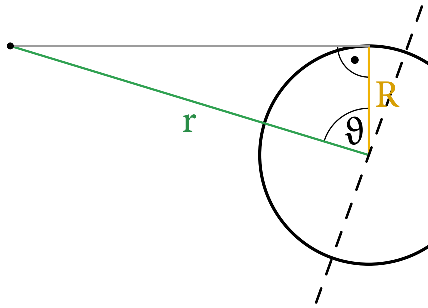
19 Geostacionárny satelit stojí vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou, teda jeho perióda obehu je presne jeden siderický deň[1], t. j. $\omega = 2\pi/T_{\mathrm{sid}}$. Vzdialenosť r takéhoto satelitu od stredu Zeme je podmienená tým,

[1] Siderický deň na Zemi trvá len približne23,934 h.

že gravitačná sila musí plniť rolu dostredivej sily

$$m\omega^2 r = G\frac{M_{♁} m}{r^2}, \tag{19.1}$$

kde m je (nepodstatná) hmotnosť satelitu. Podľa zadania musí spojnica satelitu a Petrovej chaty ležať na dotyčnici Zeme prechádzajúcej satelitom:

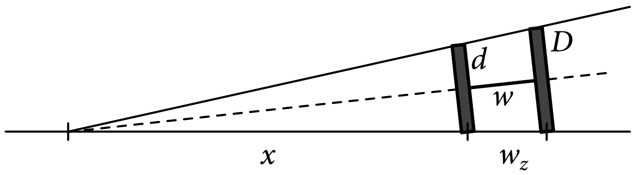


Obrázok 19.1: *Satelit na orbite okolo Zeme*

A teda

$$\vartheta = \arccos\frac{R}{r} = \arccos\frac{R}{\sqrt[3]{\frac{GM_{♁}}{\omega^2}}} \doteq 81{,}3°. \tag{19.2}$$

20 Označme si menší priemer d, väčší priemer D a vzdialenosť kolies w. Kolesá sú spojené pevne, takže sa budú obe točiť rovnakou uhlovou rýchlosťou. Uhol, ktorý počas svojho pohybu opíšu, si označme φ.



Obrázok 20.1: *Pomyselný stred otáčania*

Kolesá majú spoločnú os otáčania. Teraz ju predĺžime až po priesečník s rovinou lúky a nájdeme bod, okolo ktorého krúži celý vozík. Na spojené kolieska sa potom môžeme pozerať ako na časť veľkého kužeľa, ktorý sa pomaly prevaľuje po rovine okolo svojho vrchola. Keďže je os otáčania naklonená, vzdialenosť kolies na zemi bude trochu iná ako dĺžka osi. Vieme si ju vyrátať cez Pytagorovu vetu

$$w_z = \sqrt{w^2 + \left(\frac{D-d}{2}\right)^2}. \tag{20.1}$$

Označme si vzdialenosť vrchola tohto virtuálneho kužeľa od prvého kolesa x. Zaujíma nás, koľkokrát sa kolesá otočia, keď sa tento pomyselný kužeľ otočí o 2π. Bude platiť

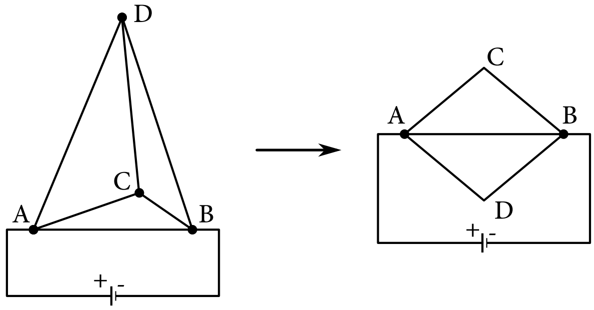
$$(2\pi x = \pi d n) \quad \wedge \quad (2\pi\,(x + w_z) = \pi D n) \quad \Rightarrow \quad dn + 2w_z = Dn \quad \Rightarrow \quad \frac{2w_z}{D-d} = n. \tag{20.2}$$

Po dosadení dostaneme

$$n = \sqrt{1 + \left(\frac{2w}{D-d}\right)^2} \doteq 50{,}01 \doteq 50. \tag{20.3}$$

21 Žiaľ, štvorsten nevieme prekresliť na obvod, ktorého celkový odpor by sme počítali ako zloženie nejakých sériových a paralelných odporov. Môžeme si ale uvedomiť, že elektrické napätie je vlastne rozdiel elektrických potenciálov. Potenciály fungujú tak, že objekty sa snažia ísť z miest s vysokým potenciálom do miest s nízkym potenciálom, čo sa v bežnom živote prejavuje napríklad tak, že Newtonovi na hlavu spadne jablko.

Ak je v dvoch bodoch rovnaký potenciál, prúd nemá dôvod tiecť z jedného bodu do druhého. Zo symetrie štvorstena vidíme, že body C a D sú na rovnakom potenciáli, a preto prúd medzi nimi netečie. Nič sa teda nestane, ak si vodič spájajúci dané body odmyslíme. Teraz sme šťastní, pretože takýto obvod pozostáva už len zo sériovo a paralelne zapojených rezistorov.



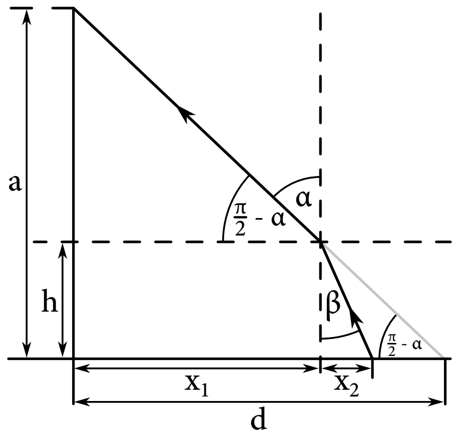
Obrázok 21.1: *Rozpojenie štvorstena*

Prevrátené hodnoty troch paralelne zapojených odporov sčítame, čím dostaneme prevrátenú hodnotu celkového odporu R_c

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{R}{2} \tag{21.1}$$

Z Ohmovho zákona je potom prúd pretekajúci batériou $I = \frac{U}{R_c} = 2{,}4$ A.

22 Hľadanú vzdialenosť x si vhodne rozdelíme na dve časti x_1 a x_2.



Obrázok 22.1: *Vyznačené dĺžky a uhly*

Od mince ide lúč svetla do Adamovho oka. Uhly lomu a dopadu označíme α a β. Potom z veľkého pravouhlého trojuholníka vieme, že

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{d} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{d}. \tag{22.1}$$

Uvažujeme, že vzduch má index lomu 1, preto Snellov zákon pre lúč na rozhraní má tvar

$$\sin\alpha = n_{\mathrm{H_2O}} \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n_{\mathrm{H_2O}}}. \tag{22.2}$$

Z malého trojuholníka obsahujúceho uhol β vidíme, že $x_2 = h\tan\beta$, a po dosadení už známeho vyjadrenia uhla β dostaneme

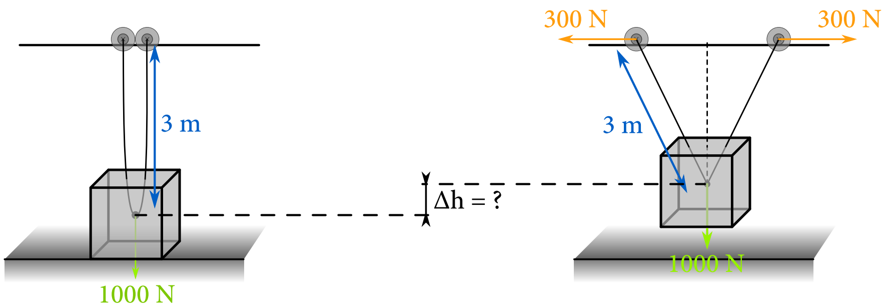
$$x_2 = h\tan\left(\arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{d}\right)}{n_{\mathrm{H_2O}}}\right)\right), \tag{22.3}$$

čo po využití všakovakých identít pre goniometrické a cyklometrické funkcie a ďalších úpravách prejde na oku lahodiacejší tvar

$$x_2 = \frac{hd}{\sqrt{n_{\mathrm{H_2O}}^2 a^2 + d^2\left(n_{\mathrm{H_2O}}^2 - 1\right)}}. \tag{22.4}$$

Zostáva nám ešte x_1, ktoré z podobnosti trojuholníkov ľahko vyjadríme ako $x_1 = \frac{d}{a}(a - h)$. Po dosadení všetkých hodnôt získavame výsledok $x = x_1 + x_2 \approx 0{,}75$ m.

23 Pozrime sa na to, aké sily pôsobia na laná v momente, keď sa sústava ustáli, ak Maťko s Majom odťahujú kolieska pri strope od seba každý silou $F_M = 300$ N.



Obrázok 23.1: *Dušan pred a počas zdvihu*

Aby bola sústava v pokoji, musia na laná pôsobiť nulové výsledné sily, čiže na ich konce musia pôsobiť rovnako veľké sily opačného smeru. V horizontálnom smere teda na obe laná pôsobí sila F_M smerom von na ich hornom konci, z čoho vyplýva, že na ich dolnom konci sa laná navzájom ťahajú k sebe silou F_M.

Podobne vo vertikálnom smere sú obe laná naťahované tiažovou silou F_g pôsobiacou na ich vtipy, čiže každé zvlášť je naťahované smerom dole za dolný koniec silou ${}^{F_g}/_2$ a táto je kompenzovaná silou ${}^{F_g}/_2$, ktorou za horný koniec ťahá strop smerom nahor. Keďže pomer síl pôsobiacich na konce vo vertikálnom a horizontálnom smere je $F_M : {}^{F_g}/_2 = 2F_M = F_g$, uhol, ktorý laná zvierajú s normálou na strop, je $\alpha = \arctan \frac{2F_M}{F_g}$. Potom dĺžka lana v horizontálom smere je

$$L \cdot \cos \alpha = L \cdot \cos\left(\arctan \frac{2F_M}{F_g}\right) \tag{23.1}$$

a výška, o ktorú úroveň humoru stúpla, je

$$\begin{aligned} L - L \cdot \cos\left(\arctan \frac{2F_M}{F_g}\right) &= L\left(1 - \cos\left(\arctan \frac{2F_M}{F_g}\right)\right) \\ &= L\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2F_M}{F_g}\right)^2}}\right) \\ &= L\left(1 - \frac{mg}{\sqrt{(mg)^2 + 4F_M^2}}\right) \\ &= 3\,\mathrm{m}\left(1 - \frac{100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{\sqrt{(100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2 + 4 \cdot (300\,\mathrm{N})^2}}\right) \doteq 0{,}44\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{23.2}$$

Maťko s Majom teda zdvihli úroveň svojho humoru o približne 0,44 m, čo vzhľadom na jeho pôvodnú úroveň nie je vôbec veľa.

24 Vozík sa síce stále môže hýbať iba po kružnici, Vilo má však možnosť kolieska vymeniť a tým zmeniť polohu jej stredu. Vilova trasa teda bude postupnosťou kružnicových oblúkov. Keď kolieska vymení, pôvodný stred sa premietne okolo súčasnej polohy vozíka na druhú stranu a odteraz bude vozík zatáčať do opačnej strany. Vhodným prehadzovaním koliesok sa tak dokáže premiestniť aj o väčšiu vzdialenosť, ako je priemer kružnice $2R$. Kedy, ako a koľkokrát to však má urobiť?

Ako prvé si spočítajme, o koľko sa vozík posunie, ak ho Vilo potlačí po určitej dráhe ℓ bez výmeny koliesok. Ide vlastne o dĺžku tetivy kružnice so známym polomerom a dĺžkou. S pomocou jednoduchej trigonometrie ju vieme vyjadriť prostredníctvom stredového uhla α ako

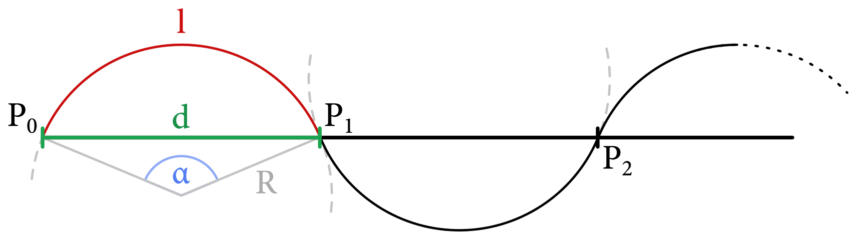
$$d = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \tag{24.1}$$

zatiaľ čo dĺžka skutočne prejdenej dráhy je

$$\ell = \alpha R = 2R \arcsin \frac{d}{2R}. \tag{24.2}$$

V druhom rade si uvedomíme, že kolieska sa oplatí meniť iba vtedy, keď sa vozík nachádza na spojnici začiatku a konca trasy, a vždy po rovnakej prejdenej dráhe. To dokážeme sporom: označme tri po sebe idúce miesta výmeny koliesok P_1, P_2 a P_3 a nech platí, že P_2 nie je stredom úsečky P_1P_3. V takom prípade môžeme bod P_2 presunúť do stredu úsečky P_1P_3. Keďže prejdená dráha rastie rýchlejšie, ako skutočné posunutie d, s pomocou trojuholníkovej nerovnosti a rovnice 24.1 ľahko ukážeme, že táto nová dráha je kratšia ako pôvodná.

Jediná postupnosť výmen, ktorá sa už takto zlepšiť nedá, je taká, kde rozdiel polôh každých dvoch po sebe idúcich miest výmeny koliesok (do čoho rátame aj začiatok a koniec trasy) je rovnaký – a to nastáva vtedy, keď sú miesta výmeny koliesok rovnomerne rozmiestnené na úsečke spájajúcej začiatok a koniec trasy. Koľko ich má byť? Intuitívne by sme mali tušiť, že čím častejšie bude Vilo kolieska meniť, tým bude jeho dráha podobnejšia priamke, a teda kratšia; pričasté výmeny koliesok však zaberú veľa času a optimum bude teda niekde uprostred.



Obrázok 24.1: *Časť dráhy vozíka*

Označme si počet úsekov, ktoré Vilo prejde bez výmeny koliesok, n. Počet výmen koliesok bude potom $n-1$. Ak označíme dĺžku celej trasy D, dĺžka jedného súvislého úseku bude $d = \frac{D}{n}$ a podľa rovnice 24.2 bude mať celá Vilova dráha dĺžku

$$L = n\ell = n\alpha R = 2nR \arcsin \frac{D}{2nR}. \tag{24.3}$$

Ak prirátame čas potrebný na výmenu koliesok a natočenie vozíka, celkový čas, ktorý bude na prejdenie záhrady potrebovať, bude

$$\tau(n) = \frac{2nR \arcsin \frac{D}{2nR}}{v} + (n-1)\,t, \tag{24.4}$$

kde jediným voľným parametrom je n. Teraz nám ostáva vyskúšať pár hodnôt n, až kým nenájdeme tú minimálnu. Stačí nám začať pri $n = 5$, pretože na menej oblúkov sa to určite nebude dať prejsť. Postupne dostávame

$$\begin{aligned} \tau(5) &\doteq 354{,}16\ \mathrm{s}, \\ \tau(6) &\doteq 286{,}43\ \mathrm{s}, \\ \tau(7) &\doteq 282{,}77\ \mathrm{s}, \\ \tau(8) &\doteq 286{,}04\ \mathrm{s}, \\ &\dots, \end{aligned} \tag{24.5}$$

pričom pre ďalšie hodnoty n už Vilo zjavne stráca príliš veľa času výmenami koliesok. Správnou odpoveďou je teda približne 283 s.

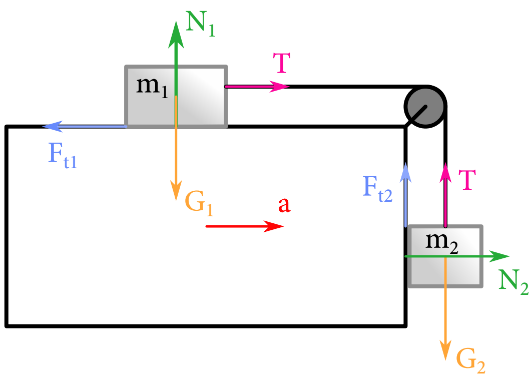
$\boxed{25}$ Po vyriešení predchádzajúcej úlohy si servítku visiacu cez hranu kvádra znovu vieme predstaviť ako dve závažia spojené lanom. Jedno závažie hmotnosti $m_1 = (1 - k)\,m$ sa nachádza na stole a druhé hmotnosti $m_2 = km$ z neho visí, kde k je časť servítky visiaca cez kváder.

Tak ako v predchádzajúcej úlohe, pozrieme sa na všetky sily, ktoré pôsobia na jednotlivé telesá. Nezabúdajme, že sily sú vektory, takže si ich potrebujeme rozložiť na horizontálnu a vertikálnu zložku. Postavme sa do inerciálnej sústavy, teda takej, ktorá je spojená so zemou. Na visiace teleso v horizontálnom smere od steny pôsobí normálová sila $\overrightarrow{N_2}$. Keďže nám stôl zrýchľuje, platí

$$N_2 = kma. \tag{25.1}$$

Vo vertikálnom smere pôsobí smerom nadol tiažová sila $\overrightarrow{G_2}$, smerom nahor pôsobia ťahová sila $\overrightarrow{T}$ a trecia sila $\overrightarrow{F_{t2}}$. Po zostavení rovníc dostávame

$$T + F_{t2} = G_2 \quad \Rightarrow \quad T + fkma = kmg. \tag{25.2}$$



Obrázok 25.1: *Sily pôsobiace na idealizovanú servítku*

Na položené teleso pôsobí vo vertikálnom smere tiažová sila $\overrightarrow{G_1}$ smerom nadol a normálová sila $\overrightarrow{N_1}$ smerom nahor, pričom

$$G_1 = N_1 = (1 - k)\,mg, \tag{25.3}$$

V horizontálnom smere pôsobí ťahová sila T smerom doprava a trecia sila $\overrightarrow{F_{t1}}$ smerom doľava. Podľa druhého Newtonovho zákona

$$(1-k)\,ma = F_{t1} - T = (1-k)\,mgf - T. \tag{25.4}$$

Teraz si vyjadríme T z rovníc 25.2 a 25.4 a dáme ich do rovnosti.

$$kmg - fkma = (1-k)\,mgf + (1-k)\,ma$$
$$kg - fka = (1-k)\,gf + (1-k)\,a$$
$$a = \frac{k - f\,(1-k)}{(1-k) + fk}g$$

Po dosadení a zaokrúhlení našich hodnôt dostaneme, že zrýchlenie potrebné na udržanie servítky je $a = 3{,}50\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

26 Nech L je počet lyžiarov na vleku v ľubovoľnom momente a S je ich počet na svahu. Potom ak každý lyžiar na vleku za minútu stretne 12 lyžiarov na svahu a každý lyžiar na svahu stretne 24 lyžiarov na vleku, lyžiari na svahu stretli spolu $24S$ nie nutne unikátnych lyžiarov na vleku, zatiaľ čo lyžiari na vleku stretli $12L$ nie nutne unikátnych lyžiarov na svahu. Stretnutia sú však obojstranné, takže musí platiť $24S = 12L$. Potom musí platiť

$$S : L = 12 : 24. \tag{26.1}$$

Nech s je dĺžka svahu (a aj vleku). Potom pre rozostupy na svahu r_s a rozostupy na vleku r_v platí $s = r_s \cdot S = r_v \cdot L$, čiže

$$r_s : r_v = 24 : 12. \tag{26.2}$$

Každým bodom svahu a aj vleku však musia chodiť lyžiari s rovnakými časovými rozostupmi (inak by sa nám niekde hromadili), takže ak rýchlosť lyžiara na svahu je v_s, platí $\frac{r_s}{v_s} = \frac{r_v}{v}$. Potom

$$v_s : v = 24 : 12. \tag{26.3}$$

Zoberme si teraz situáciu vo vzťažnej sústave vzhľadom na lyžiara na svahu. Lyžiari na vleku sa k nemu približujú rýchlosťou $v + v_s$, čiže za najbližšiu minútu uvidí všetkých, čo na začiatku od neho boli do vzdialenosti $(v + v_s) \cdot 60\ \mathrm{s}$. Keďže však vieme, že ich uvidí 24, rozostupy medzi nimi musia byť

$$r_v = \frac{(v + v_s) \cdot 60\ \mathrm{s}}{24} = \frac{\left(v + v\frac{24}{12}\right) \cdot 60\ \mathrm{s}}{24} = \frac{v\left(1 + \frac{24}{12}\right) \cdot 60\ \mathrm{s}}{24} = v \cdot \frac{24+12}{24 \cdot 12} \cdot 60\ \mathrm{s} = 2\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \frac{24+12}{24 \cdot 12} \cdot 60\ \mathrm{s} = 15\ \mathrm{m}. \tag{26.4}$$

27 Predpokladajme, že usporiadateľ udelil prázdnej rolke uhlovú rýchlosť ω. Označme si jej hmotnosť m a polomer r. Potom je jej rotačná kinetická energia

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \tag{27.1}$$

Na konci skončíme s toaletným papierom nabaleným na rolke s vonkajším polomerom R. Ak je hmotnosť samotného papiera M, po navinutí sa jeho potenciálna energia zvýši o $Mg\left(R-\frac{t}{2}\right)$, pričom potenciálna energia samotnej rolky sa zmení o $mg\left(R-r-t\right)$. Celková zmena potenciálnej energie teda je

$$\Delta E_{\mathrm{pot}} = Mg\left(R-\frac{t}{2}\right) + mg\left(R-r-t\right), \tag{27.2}$$

čo sa prejaví práve tým, že rolka zastane.

Potrebujeme teda nájsť polomer toaletného papiera po navinutí. Zrejme platí, že pri navinutí sa objem papiera prakticky nemení. Pri pohľade zboku je obsah nenavinutého papiera $S_{-} = Lt$, kde L je dĺžka papiera a t je jeho hrúbka. Po navinutí je jeho obsah $S_{\bigcirc} = \pi\left(R^2-r^2\right)$. Tieto obsahy sa musia rovnať, preto

$$R = \sqrt{\frac{Lt}{\pi}+r^2}. \tag{27.3}$$

Z rovnosti rotačnej energie rolky a nárastu potenciálnej energie papiera dostávame

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{r}\left(\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{\frac{Lt}{\pi r^2}+1}-\frac{t}{2r}\left(\frac{M}{m}+2\right)-1\right)}. \tag{27.4}$$

Na záver ešte dopočítame hľadanú frekvenciu a výsledok vyjadríme pomocou zadaného priemeru rolky d:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{d}\left(\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{\frac{4Lt}{\pi d^2}+1}-\frac{t}{d}\left(\frac{M}{m}+2\right)-1\right)}. \tag{27.5}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania dostávame $f \approx 19{,}3\ \mathrm{Hz}$.

28 Uvažujme dve pružiny s tuhosťami k_1 a k_2 zapojené v sérii a napínané silou F. Výsledné predĺženie dvojice pružín je súčtom predĺžení jednotlivých pružín. Tuhosť tohto sériového zapojenia je preto

$$\kappa = \frac{F}{x_1+x_2} = \frac{F}{\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}. \tag{28.1}$$

Dostávame dôležitý záver: pri sériovom spájaní pružín sa sčítavajú prevrátené hodnoty ich tuhostí.

Teraz už môžeme bez väčších problémov vypočítať výslednú tuhosť Kubovho systému pružín ako súčet geometrického radu. Zrejme platí

$$\frac{1}{K} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n k} = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{k}\frac{1}{1-1/2} = \frac{2}{k}, \tag{28.2}$$

čiže tuhosť Kubovho sériového zapojenia je $K=\frac{k}{2}$. Hľadaná perióda kmitania zaveseného Kuba je potom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}. \tag{28.3}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania dostávame $T = 0{,}89$ s.

29 Úloha sa dá riešiť viacerými spôsobmi. Napríklad si vyjadríme silu, ktorú Maco potrebuje na prekonanie odstredivej sily v nejakej vzdialenosti r od stredu lode a spočítame jednoduchý integrál.

Existuje ale aj jednoduchšie riešenie. Maco sa rozbehne proti smeru rotácie takou rýchlosťou, aby sa mu prestalo zdať, že ho odstredivá sila tlačí von z lode. To nastane vtedy, keď jeho rýchlosť v inerciálnej sústave bude nulová, čiže keď sa voči obvodovému plášťu lode pohybuje práve rýchlosťou ωR. Jeho kinetická energia v pôvodnej sústave je potom triviálne $\frac{1}{2}m\omega^2R^2$. Potom sa už nachádza v beztiažovom stave a do stredu lode môže doplachtiť bez akejkoľvej ďalšej námahy. Celková práca je rovná rozdielu konečnej kinetickej energie a nulovej počiatočnej.

Ostáva nám nájsť uhlovú rýchlosť lode ω. Vieme, že vo vzdialenosti R je zdanlivá odstredivá sila $g = \omega^2R$, a teda pre Macovu kinetickú energiu dostávame jednoduchý výraz $\frac{1}{2}mgR$. Po dosadení hodnôt zo zadania je to 250 J.

30 Označme rýchlosť lopty ihneď po odkopnutí v_0. Keďže nijako nerotuje, na jej kontakte s betónom dochádza k prešmykovaniu, takže na ňu pôsobí trecia sila $F_t = \mu mg$, kde μ je koeficient šmykového trenia, m je hmotnosť lopty a g je tiažové zrýchlenie. Keďže je to jediná sila, ktorá na loptu pôsobí vo vodorovnom smere, tá sa bude pohybovať so spomalením

$$a = \mu g, \tag{30.1}$$

a to až do momentu pokiaľ prešmykovanie neustane. Zároveň ale začne rotovať. Roztáčanie lopty je dané pohybovou rovnicou $J\varepsilon = M$, kde $J = \frac{2}{3}mr^2$ je moment zotrvačnosti lopty (sféry), r je jej polomer a $M = F_t r$ je moment trecej sily. Dajme to všetko dokopy a dostaneme uhlové zrýchlenie

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{\mu g}{r}. \tag{30.2}$$

Prešmykovanie ustane v momente, keď sa translačná rýchlosť pohybu lopty vyrovná s obvodovou rýchlosťou bodu na povrchu lopty

$$v_f = \omega_f r. \tag{30.3}$$

Následne sa už bude pohybovať rovnomerným priamočiarym pohybom s rýchlosťou v_f.

Uhlová rýchlosť lopty v čase t počas roztáčania je

$$\omega(t) = \frac{3}{2}\frac{\mu g}{r}t \tag{30.4}$$

a rýchlosť jej posuvného pohybu počas spomaľovania je

$$v(t) = v_0 - \mu g t. \tag{30.5}$$

Z podmienky 30.3 dostávame, že k ustáleniu pohybu dôjde v čase

$$t_f = \frac{2}{5}\frac{v_0}{\mu g}, \tag{30.6}$$

lopta bude mať vtedy rýchlosť

$$v_f = \frac{3}{5}v_0 \tag{30.7}$$

a bude vo vzdialenosti

$$x_f = v_0 t_f - \frac{1}{2}at_f^2 = \frac{8}{25}\frac{v_0^2}{\mu g}. \tag{30.8}$$

Nech D je počiatočná vzdialenosť hráčov od brány a nech bežia rýchlosťou V. Brániaci hráč potom dobehne k bráne za čas $T = \frac{D}{V}$. Aby lopta došla do brány skôr ako brániaci hráč, musí prejsť zvyšnú vzdialenosť $D - x_f$ za čas τ kratší ako $T - t_f$. Matematicky vyjadrené

$$\begin{aligned} \tau = \frac{D - x_f}{v_f} &\le T - t_f; \\ \frac{5}{3}\frac{D}{v_0} - \frac{8}{15}\frac{v_0}{\mu g} &\le \frac{D}{V} - \frac{2}{5}\frac{v_0}{\mu g}; \\ v_0^2 + \frac{15}{2}\frac{\mu g D}{V}v_0 - \frac{25}{2}\mu g D &\ge 0. \end{aligned} \tag{30.9}$$

V hraničnom prípade platí rovnosť a vtedy

$$v_0 = -\frac{15}{4}\frac{\mu g D}{V} + \sqrt{\left(\frac{15}{4}\frac{\mu g D}{V}\right)^2 + \frac{25}{2}\mu g D}. \tag{30.10}$$

Pre číselné hodnoty zo zadania $v_0 \approx 12{,}25\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

31 Zákony zachovania sú veľmi dobré veci. V prípade rotujúcich telies, ktoré menia svoj tvar, sa ako veľmi užitočný javí zákon zachovania momentu hybnosti. Počiatočné sútelesie má nejaký moment hybnosti L, ktorý zostáva stále rovnaký. Moment hybnosti počítame podľa vzťahu $L = I\omega = 2\pi I f$. Závažia považujeme za hmotné body, preto je ich moment zotrvačnosti $I = mr^2$, moment zotrvačnosti homogénneho guľového satelitu je $I = \frac{2}{5}Mr^2$.

Na začiatku rotujú naše telesá s frekvenciou f_1 a vzdialenosť závaží od osi otáčania je rovnaká ako polomer satelitu, teda r. Po odvinutí lán na dĺžku l rotujú telesá s frekvenciou f_2, ale závažia sú od osi rotácie vzdialené $r + l$. Mysliac na to, že závažia sú dve, píšeme rovnicu

$$2\pi\frac{2}{5}Mr^2 f_1 + 2\pi 2mr^2 f_1 = 2\pi\frac{2}{5}Mr^2 f_2 + 2\pi 2m\left(r + l\right)^2 f_2, \tag{31.1}$$

z ktorej vyjadríme hmotnosť jedného závažia ako

$$m = \frac{\frac{1}{5}Mr^2\left(f_1 - f_2\right)}{\left(r + l\right)^2 f_2 - r^2 f_1} \approx 0{,}728\ \mathrm{kg}. \tag{31.2}$$

Prečo sme nevyužili zákon zachovania energie? Pretože pozerať sa na príklad tak, že na začiatku má satelit so závažiami rotačnú energiu známu zo zadania, ktorá sa rovná rotačnej energii satelitu so závažiami na plne odvinutých lanách, nie je správne. Počas odvíjania lán závažia rotujú okolo osi rotácie satelitu, ale majú aj radiálnu zložku rýchlosti, ktorou sa vzďaľujú od satelitu. Keď sa celá dĺžka lán odvinie, závažia sa už od satelitu ďalej vzďaľovať nemôžu, a teda nejaká časť ich energie sa v lanách premení na teplo. V takom prípade zákon zachovania energie použiť nevieme.

32 Označme hmotnosť jedného hmotného bodu m, pokojovú dĺžku pružiny d, a jej tuhosť k. Za tiažových čias bolo vrchné závažie držané pružinou stlačenou na x_0, t. j.

$$mg = k\left(d - x_0\right).$$

Bezprostredne po skokovom zmiznutí tiaže g je celá mechanická energia sústavy závažie-pružina-závažie uskladnená v pružine

$$E = \frac{1}{2}k\left(d - x_0\right)^2 = \frac{m^2 g^2}{2k}.$$

Spamätanie sa robota z beztiažovosti má podobu odtláčania vrchného bodu nahor až do momentu, keď pružina dosiahne svoju pokojovú dĺžku. Vtedy prestane byť spodný bod tlačený pružinou do stola a hneď na to začne byť ťahaný nahor. Rýchlosť horného bodu v v tomto prelomovom momente určíme zo zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = E$$

ako

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{mg^2}{k}}.$$

Keďže spodný bod ešte stojí, vieme určiť hybnosť robota po odlepení sa

$$p = mv$$

a jeho kinetickú energiu

$$T = \frac{p^2}{4m} = \frac{m^2 g^2}{4k}.$$

Okrem posuvného pohybu nahor začnú závažia aj kmitať, pričom pri ich maximálnej vzdialenosti D bude v energii pružiny uskladnený celý zvyšok celkovej energie $E - T$

$$\frac{1}{2}k\left(D - d\right)^2 = E - T = \frac{m^2 g^2}{4k},$$

z čoho možno poľahky vyjadriť žiadaný výsledok

$$D = d + \frac{mg}{\sqrt{2}k} \doteq 6{,}4\ \mathrm{cm}.$$

33 Úloha sa dá vyriešiť priamočiarym, ale značne tŕnistým spôsobom: napíšeme si kinematické rovnice pre šikmý vrh, vyjadríme výšku nad povrchom, z nej zase vzdialenosť od povrchu… napočítali by sme sa celkom dosť a snáď by nám niečo vyšlo.

Skúsme však na to ísť prefíkanejšie a všeobecnejšie. Ako prvé si uvedomme, že výška nad povrchom a vzdialenosť sú previazané lineárne: ak je vajce vo výške h nad povrchom, od najbližšieho bodu svahu je vzdialené

$h \cos \alpha$. Bod trajektórie, ktorý je najvzdialenejší od svahu, je preto zároveň bodom, kde bude vajce najvyššie nad terénom (čo však nutne nemusí byť to isté ako absolútne najvyššie).

Zadanie nehovorí nič o uhle hodu ani dosiahnutej výške. Vezmime si preto ľubovoľnú parabolu, teda krivku v tvare $v(x) = ax^2 + bx + c$, ktorá bude reprezentovať dráhu vajíčka, a priamku $s(x) = dx + e$, ktorá bude reprezentovať náš svah. Zároveň požadujeme, aby mali práve dva priesečníky, v ktorých stoja Maťko a Kubko. Výška vajca nad terénom v závilosti od x je potom jednoducho

$$v(x) - s(x) = ax^2 + (b-d)\,x + (c-e)\,, \tag{33.1}$$

pričom vieme, že v pozíciách Maťka a Kubka je jej hodnota nulová, teda ide o korene funkcie.

To je však opäť iba parabola – a o tej vieme, že jej vrchol je práve v strede medzi jej koreňmi. Toto celé platí pre ľubovoľnú priamku a parabolu, takže to určite spĺňa aj trajektória nášho vajca. No a keďže horizontálna rýchlosť vajíčka je pri ľubovoľnom šikmom vrhu konštantná, maximálnu výšku nad terénom dosiahne určite v čase $T_1/2 = 1{,}5$ s.

34 Stavová rovnica ideálneho plynu vedie na súvis medzi hustotou a tlakom v tvare

$$\rho = \frac{M_m n}{V} = \frac{M_m}{RT}p. \tag{34.1}$$

Priebeh tlaku od výšky v izotermickej atmosfére s konštantným gravitačným zrýchlením g je

$$p(z) = p(0)e^{-\frac{M_m gz}{RT_0}}\,, \tag{34.2}$$

kde T_0 je termodynamická teplota atmosféry.

Ak zohrejeme vzduch v balóne na teplotu T_{in}, jeho hustotu zistíme z rovnosti tlakov vzduchu v balóne a mimo ako

$$\rho_{\text{in}}(z) = \frac{M_m}{RT_{\text{in}}}p(z) = \frac{M_m}{RT_{\text{in}}}p(0)e^{-\frac{M_m gz}{RT_0}} = \frac{T_0}{T_{\text{in}}}\rho_{\text{out}}(0)e^{-\frac{M_m gz}{RT_0}} = \frac{T_0}{T_{\text{in}}}\rho_{\text{out}}(z), \tag{34.3}$$

kde $\rho_{\text{out}}(z)$ je hustota atmosféry vo výške z.

Pre balón vznášajúci sa na hranici svojich schopností platí rovnováha vztlakovej a tiažovej sily,

$$V\rho_{\text{out}}(z)g = (V\rho_{\text{in}}(z) + m)\,g, \tag{34.4}$$

kde m je hmotnosť nenafúknutého balóna, a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ je objem po nafúknutí. Ostáva určiť rovnovážnu teplotu nosného vzduchu, t. j. takú, pri ktorej bude výkon horáku kompenzovaný stratami cez povrch. Vtedy

$$P = \alpha S\,(T_{\text{in}} - T_0) = 4\pi\alpha r^2\,(T_{\text{in}} - T_0)\,, \tag{34.5}$$

kde α je koeficient prestupu tepla. Odtiaľ už len upravujeme

$$\begin{aligned} V\rho_{\text{out}}(z)g &= (V\rho_{\text{in}}(z) + m)\, g \\ \rho_{\text{out}}(z) - \rho_{\text{in}}(z) &= \frac{m}{V} \\ \left(1 - \frac{T_0}{T_{\text{in}}}\right)\rho_{\text{out}}(z) &= \frac{m}{V} \\ \rho_{\text{out}}(z) &= \frac{m}{V}(1 + \alpha S T_0/P) \\ -\frac{M_m g z}{R T_0} &= \ln\frac{m(1 + \alpha S T_0/P)}{V\rho_{\text{out}}(0)} \end{aligned} \tag{34.6}$$

Nakoniec už len vyjadríme

$$z = \frac{RT_0}{M_m g}\ln\left(\frac{V\rho_{\text{out}}(0)/m}{1 + \alpha S T_0/P}\right) = \frac{p_0}{\rho_{\text{out}}(0)g}\ln\left(\frac{V\rho_{\text{out}}(0)/m}{1 + \alpha S T_0/P}\right) \doteq 8{,}6\ \text{km}. \tag{34.7}$$

35 Keďže Kubo a UFO sú porovnateľne ťažké, UFO sa neotáča okolo svojej osi, ale oba rotujú okolo spoločného ťažiska. Nech je M hmotnosť UFA, m hmotnosť Kuba, R polomer UFA a r vzdialenosť ich spoločného ťažiska od stredu UFA. Pre polohu ťažiska potom platí

$$Mr = m(R - r), \tag{35.1}$$

odkiaľ

$$r = \frac{m}{M + m}R. \tag{35.2}$$

Ak Kubo pociťuje na okraji preťaženie g, ktoré je spôsobené dostredivým zrýchlením, pre uhlovú rýchlosť rotovania sústavy Ω platí

$$g = \Omega^2(R - r). \tag{35.3}$$

Uhlová rýchlosť je potom s prihliadnutím na rovnicu 35.2

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R - r}} = \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{R}}. \tag{35.4}$$

Na sústavu UFO-Kubo nepôsobia žiadne vonkajšie sily, preto celková hybnosť a moment hybnosti sústavy sa nemenia. Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva, že spoločné ťažisko sústavy sa nehýbe, preto je rozumné vykonávať celý výpočet vzhľadom naň.

Potrebujeme si teda nájsť moment zotrvačnosti UFA práve vzhľadom na spoločné ťažisko. Podľa Steinerovej vety

$$J = J_0 + Mr^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 R^2 = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{m}{M + m}\right)^2\right]MR^2. \tag{35.5}$$

Teraz nám už nič nebráni nájsť moment hybnosti sústavy. Ten je súčtom momentu hybnosti UFA

$$L_{\text{UFO}} = J\Omega^2 = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{m}{M+m}\right)^2\right] MR^2\Omega \tag{35.6}$$

a momentu hybnosti Kuba

$$L_{\text{Kubo}} = m\left(R-r\right)^2\Omega = m\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 R^2\Omega. \tag{35.7}$$

Celkový moment hybnosti sústavy využijúc 35.4 je

$$L_0 = \frac{1}{2}\frac{M+3m}{\sqrt{M\left(M+m\right)}} MR^2\sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{35.8}$$

Pri presune do stredu UFA Kubo vykoná nejakú prácu a uhlová rýchlosť rotácie sa pritom zmení na ω. V tejto situácii možno moment hybnosti sústavy vyjadriť ako

$$L = J_0\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega, \tag{35.9}$$

pretože Kubo je na osi rotácie, a tak je jeho moment hybnosti nulový.

Využijúc zákon zachovania momentu hybnosti dostávame

$$\omega = \frac{M+3m}{\sqrt{M\left(M+m\right)}}\sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{35.10}$$

Teraz už možno jednoducho dopočítať Kubom vykonanú prácu ako rozdiel celkovej mechanickej energie sústavy na konci a na začiatku. Dostaneme

$$W = \frac{1}{2}J_0\omega^2 - \left[\frac{1}{2}J\Omega^2 + \frac{1}{2}m\left(R-r\right)^2\Omega^2\right] = \frac{M+3m}{2\left(M+m\right)}mgR \tag{35.11}$$

a pre číselné hodnoty zo zadania $W = 5250$ J.

36 Mimozemšťania síce zjavne majú pokročilú technológiu, fyzikálneho myslenia však zjavne veľa nepobrali. Ak totiž nahradia Mesiac šošovkou, nestane sa vôbec nič zaujímavé.

Predstavme si najprv situáciu úplne bez Mesiaca. Postavme sa do subsolárneho bodu, teda tam, kde by sme mali Slnko presne nad hlavou, a namierme detektor ľubovoľným smerom. Máme tri možnosti:

- v dolnej polovici nášho zorného poľa máme Zem,
- v maličkej časti oblohy vidíme povrch Slnka
- a vo zvyšných smeroch nevidíme nič, iba prázdny vesmír.

Vieme, že v takejto situácii je výkon rovný solárnej konštante, čo síce znamená horúci tropický deň, ale žiadna apokalypsa sa nedeje.

Čo sa stane, ak Mesiac nahradíme šošovkou? Vôbec nič! Predchádzajúce tri body stále platia. Keďže uhlový rozmer Mesiaca je rovnaký, ako uhlový rozmer Slnka, celá situácia je pre pozorovateľa v subsolárnom bode úplne rovnaká. Jediný spôsob, ako Zem šošovkou spáliť, by bolo priniesť ju bližšie, aby bol jej uhlový priemer väčší ako uhlový priemer Slnka. Odpoveďou je teda takisto 1361 W m^{-2}.

Drobný (a nepodstatný) rozdiel…

…je v tom, že v situácii bez šošovky sme videli takmer celú jednu polovicu Slnka. Dokonalá šošovka k nám však sústredí rovnobežné lúče. Ak by sme teda na povrchu Slnka mali nakreslený nejaký obrázok, napríklad slnečné škvrny, neuvidíme ho cez šošovku celý, ale iba zväčšený výrez o veľkosti samotnej šošovky, ktorá je rovná priemeru Mesiaca. Ak je však povrch Slnka homogénny, prijímaný výkon to však nijak neovplyvní.

Ak by však mimozemšťania šošovku trochu vychýlili, mohli by dosiahnuť, že z niektorého miesta na Zemi bude vidieť Slnko aj priamo, aj cez šošovku, a teda prijímaný výkon by bol (takmer) dvojnásobný.

37 Ako prvé sa zamyslíme, čo je to vlastne hydrostatický[2] tlak. Ide o tlak, ktorým pôsobia vyššie vrstvy plynu alebo kvapaliny v tiažovom poli. Ak tento tlak vynásobíme celkovou plochou povrchu planéty, dostaneme celkovú tiaž atmosféry. Navyše, ak je hrúbka atmosféry malá oproti rozmeru planéty, môžeme tiažové zrýchlenie g považovať za konštantné a napísať jednoducho

$$4\pi R_♀^2 p_0 \approx mg, \tag{37.1}$$

kde p_0 je tlak na povrchu a m hmotnosť atmosféry. Nesmieme však zabudnúť, že na pevnom povrchu Venuše je hodnota tiažového zrýchlenia iná ako na Zemi, a to

$$g = \frac{G\left(M_♀ - m\right)}{R_♀^2} \approx \frac{GM_♀}{R_♀^2}. \tag{37.2}$$

I keď hodnota g závisí od m, možno overiť, že nami vykonané zanedbanie výsledok prakticky nezmení. Teraz nám už len ostáva vyjadriť

$$m \approx \frac{4\pi R_♀^4 p_0}{GM_♀}. \tag{37.3}$$

Ak chceme poznať vzájomný pomer, výraz 37.3 ešte raz vydelíme hmotnosťou celej planéty a dostaneme odpoveď

$$\frac{m}{M_♀} \approx \frac{4\pi R_♀^4 p_0}{GM_♀^2} \doteq 1{,}004 \cdot 10^{-4}. \tag{37.4}$$

38 Keď je piest striekačky v polohe dole, v jej výbežku je vzduch s objemom $V_0 = sh$ pri tlaku $p_0 = p_{\mathrm{atm}}$. Po natiahnutí vakcíny do striekačky sa pod piestom vytvorí tenká medzierka vzduchu. Označme jej hrúbku x. Objem vzduchu v striekačke je v tomto momente $V = Sx$ a pre jeho tlak p platí

$$p + \left(H + h - x\right)\rho g = p_{\mathrm{atm}}. \tag{38.1}$$

[2] Alebo teda v našom prípade skôr karbonodioxidostatický.

Naťahovanie striekačky je adiabatický proces, teda

$$p_0 V_0^\varkappa = pV^\varkappa. \tag{38.2}$$

Po dosadení príslušných výrazov za jednotlivé tlaky a objemy dostávame

$$p_\mathrm{atm} (sh)^\varkappa = [p_\mathrm{atm} - (H + h - x)\rho g] (Sx)^\varkappa . \tag{38.3}$$

Žiaľ, toto je rovnica, ktorú nevieme riešiť analyticky. Máme dve možnosti: buď ju budeme riešiť numericky, alebo si uvedomíme, že hrúbka vrstvičky vzduchu x je zanedbateľne malá voči $H + h$. V takom prípade sa rovnica zjednoduší na

$$p_\mathrm{atm} (sh)^\varkappa \approx [p_\mathrm{atm} - (H + h)\rho g] (Sx)^\varkappa \tag{38.4}$$

a tú už riešiť vieme. Jednoduchými úpravami dostaneme

$$x \approx \left[\frac{p_\mathrm{atm}}{p_\mathrm{atm} - (H + h)\rho g}\right]^{1/\varkappa} \frac{s}{S} h. \tag{38.5}$$

Nesmieme však zabudnúť overiť, či x je naozaj zanedbateľne malé oproti $H + h$. Rýchlym nahádzaním do kalkulačky overíme, že to tak naozaj je.

Teraz už môžeme konečne dopočítať, ako sa líši skutočný objem vakcíny od nominálneho objemu striekačky. To určíme ako rozdiel medzi skutočným objemom vzduchu v striekačke po natiahnutí vakcíny a objemu výbežku striekačky, v ktorom bol vzduch pôvodne. Jednoduchým výpočtom dostávame

$$\begin{aligned} \delta V = Sx - sh &= \left\{\left[\frac{p_\mathrm{atm}}{p_\mathrm{atm} - (H + h)\rho g}\right]^{1/\varkappa} - 1\right\} sh \\ &= \left\{\left[1 + \frac{(H + h)\rho g}{p_\mathrm{atm} - (H + h)\rho g}\right]^{1/\varkappa} - 1\right\} sh \approx \frac{1}{\varkappa} \frac{(H + h)\rho g}{p_\mathrm{atm} - (H + h)\rho g} sh. \end{aligned} \tag{38.6}$$

Pre hodnoty zo zadania platí $\delta V \approx 7{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 = 7{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{ml}$.

39 Nech Milanovi na prednášku príde x študentov. Každý z nich má šancu $\frac{1}{2}$, že bude hore aj po prvých 20 minútach prednášky.

Tí, čo sú aj po prvých 20 min pri vedomí, majú opäť šancu $\frac{1}{2}$ zostať hore ďalších 20 min, čiže dokopy majú všetci šancu $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ zostať hore prvých 40 min.

Podobnou úvahou dôjdeme k tomu, že každý z x Milanových študentov má šancu $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, že bude aj na konci prednášky pri vedomí a šancu $\frac{7}{8}$, že už upadol do sladkej mdloby. Pravdepodobnosť, že všetkých x študentov zaspalo, je potom $\left(\frac{7}{8}\right)^x$.

Aby po hodine bol stále aspoň jeden študent pri vedomí so šancou aspoň 0,99, znamená, že pravdepodobnosť, že všetci zaspali, musí byť menšia ako 0,01, čiže

$$\left(\frac{7}{8}\right)^x < 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \ln\left(\frac{7}{8}\right) < \ln(0{,}01) \quad \Rightarrow \quad x > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)} \doteq 34{,}488. \tag{39.1}$$

Keďže býva dobrým zvykom, že počet študentov je celé číslo, po zaokrúhlení nahor sa dozvedáme, že Milan potrebuje mať na prednáške aspoň 35 študentov.

40 Cesta k možnému riešeniu vedie cez virtuálne práce. Označme plochu pólu S a hmotnosť závažia m. Kovy, železo nevynímajúc, sa vyznačujú potlačením elektromagnetických polí vo svojom objeme. Ak inkriminovaný kus železa oddialime od pólu o Δz pribudne objem $S\,\Delta z$ pozbavený železa, ktorý zaplní magnetické pole.

Na opačnom konci naopak z rovnakého objemu vytlačíme magnetické pole. Magnetické pole tyčového magnetu je však poľom dipólu, ktorého veľkosť klesá s treťou mocninou vzdialenosti. Ak je teda tyč dostatočne dlhá, magnetické pole pri jej vzdialenejšom konci je zanedbateľne malé, a teda zmenu energie na tomto mieste možno zanedbať. Jednoduchým výpočtom sa môžeme presvedčiť o tom, že to tak naozaj je.

Pre malé Δz je veľkosť indukcie magnetického poľa konča magnetu približne konštantná, označíme ju B. Nárast energie elektromagnetického poľa o $S\,\Delta z \frac{B^2}{2\mu_0}$, musí kompenzovať vykonaná práca, a teda

$$F\,\Delta z = S\,\Delta z \frac{B^2}{2\mu_0}. \tag{40.1}$$

Po dosadení $F = mg$ a vyjadrení dostávame

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 mg}{S}} \doteq 0{,}35\ \mathrm{T}. \tag{40.2}$$

Výsledky

1 4 m

2 2

3 225 g

4 872 J

5 8 ml

6 1600 W

7 16 g

8 56,6 N

9 0,5

10 0,8125

11 1,4

12 950 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$

13 0,36

14 0,2

15 2,5 m

16 66,7 kg

17 4,4 cm

18 3,27 mΩ

$\boxed{\textbf{19}}$ 81,3°

$\boxed{\textbf{20}}$ 50

$\boxed{\textbf{21}}$ 2,4 A

$\boxed{\textbf{22}}$ 75 cm

$\boxed{\textbf{23}}$ 0,428 m

$\boxed{\textbf{24}}$ 283 s

$\boxed{\textbf{25}}$ 3,50 $\mathrm{m\,s^{-2}}$

$\boxed{\textbf{26}}$ 15 m

$\boxed{\textbf{27}}$ 19,3 Hz

$\boxed{\textbf{28}}$ 0,89 s

$\boxed{\textbf{29}}$ 250 J

$\boxed{\textbf{30}}$ 12,25 $\mathrm{m\,s^{-1}}$

$\boxed{\textbf{31}}$ 0,728 kg

$\boxed{\textbf{32}}$ 6,4 cm

$\boxed{\textbf{33}}$ 1,5 s

$\boxed{\textbf{34}}$ 8,6 km

$\boxed{\textbf{35}}$ 5250 J

$\boxed{\textbf{36}}$ 1361 $\mathrm{W\,m^{-2}}$

$\boxed{\textbf{37}}$ $1{,}0042 \cdot 10^{-4}$

$\boxed{\textbf{38}}$ $7{,}7 \cdot 10^{-5}$ ml

39 35

40 0,35 T