Zadání

1 Dva malí ukřičení fyzici se na pískovišti chvástají, čí velký bratr dokáže běhat rychleji. Po urputné výměně názorů, podpořené údery lopatkou a nervy drásajícím skřekotem, se rychlosti ustanovily následovně: Michalův velký bratr uběhne půl femtoparseku za nanostoletí a Jirkův 25 pikoastronomických jednotek za mikrotýden. Čí bratr je rychlejší a o kolik nanošestinedělí předběhne pomalejšího na dráze dlouhé 3 světelné mikrosekundy?

Uznané budou výsledky lišící se od správné hodnoty o méně jako 2 %.

2 Enke po zavaření kompotů zbylo 20 gramů osmdesátiprocentního roztoku a 80 gramů dvacetiprocentního roztoku cukrové vody. Kolik hmotnostních procent bude mít výsledný roztok, jestliže oba roztoky slije dohromady?

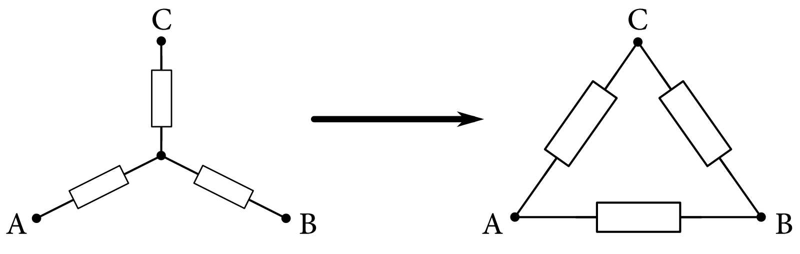
3 Petr, Pavel a Arthur se rozhodli změřit si síly v sprintu na 100 m. Všichni běží konstantní rychlostí. V okamžiku, když Arthur protne cílovou pásku, Pavlovi zůstává ještě 20 m do cíle a když Pavel proběhne cílem, Petrovi chybí do cíle taky ještě 20 m. Jak daleko od cíle byl Petr, když Arthur protnul cílovou pásku?

4 Do prázdného poháru ve tvaru válce s poloměrem R vložíme kostku ledu o straně a a s hustotou ρ_i. Led začne tát na vodu s hustotou $\rho_w > \rho_i$. Do jaké největší výšky vystoupá hladina během tání kostky?

5 Juro byl na rybách. Na udici se mu znenadání ocitl sumec o hmotnosti m. Když Juro zatáhl silou F, sumec se začal pohybovat svisle vzhůru se zrychlením a. Následně se Juro, povzbuzen tímto úspěchem, pochlapil a zatáhl silou $2F$. S jakým zrychlením se potom sumec pohyboval? Předpokládejte, že sumec na život již rezignoval a nekladl žádný odpor. Hustota sumce je mírně odlišná od hustoty vody. V obou případech je sumec stále pod vodou.

Odpor vody neuvažujte. Výsledek vyjádřete ***pouze*** *pomocí veličin uvedených v zadání.*

6 Na obrázku máme tři neznámé rezistory zapojené do tvaru hvězdy. Když zapojíme ohmmetr ke každé dvojici vrcholů (A–B, A–C, B–C), naměříme postupně odpory 24 Ω, 48 Ω, 56 Ω. Jaké tři výsledné odpory bychom naměřili, kdybychom rezistory zapojili do tvaru trojúhelníka?



7 Žabu 23. září okradli, a tak musel spát v New Yorku v Central Parku na lavičce. Byla tma, vybil se mu notebook a mobil a stýskalo se mu po denním světle. Krize nastala o půlnoci místního času. Začal přemýšlet, jak daleko je nejbližší místo na Zemi, odkud by mohl vidět sluneční svit. Takže, jak daleko? New York se nachází na 40° severní zeměpisné šířky.

Počítejte obloukovou vzdálenost po povrchu Země. Slunce můžete považovat za bodový zdroj v prakticky nekonečné vzdálenosti. Výsledek zaokrouhlete na desítky km.

8 Jaro se rozhodl pro filmovou kariéru. Po natáčení policejní honičky městem však byl zklamaný. Těšil se, že se proženе městem závratnou rychlostí. Místo toho se však celá scéna natáčela při rychlosti 50 km/h. Na dosažení zdánlivé rychlosti 160 km/h na filmovém plátně se film promítal vyšší snímkovací frekvencí, než jakou byl natočený. Na záběru se však náhodou ocitl i květináč, který vypadl z okna. Jaké zdánlivé tíhové zrychlení na něj ve filmu působí?

Výsledek uveďte v násobcích g.

9 Maťo z dlouhé chvíle spouštěl po nakloněné rovině kámen. Jaký úhel má svírat rovina se zemí, aby při pohledu shora pozoroval co největší zrychlení? Předpokládejte, že kámen se pohybuje bez tření.

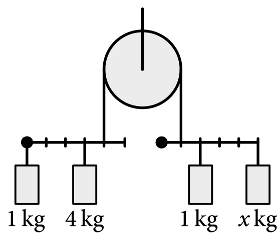
10 Matúš je starý uličník. Minule našel ideální větev tvaru „Y“, z kterého si sestrojil jednoduchý prak. Chtěl ho otestovat, a tak začal hledat vhodný cíl. Vytipoval si vrabce, který letel kolem něj konstantnou rychlostí ve vodorovném směru. Matúš na nej vystřelil kámen rychlostí $v = 40$ m/s. Během letu nahoru kámen vrabce těsně minul, avšak zasáhl ho cestou dolů. Jak rychle letěl vrabec, když kámen dosáhl během svého letu maximální výšku $H = 20$ m? Odpor vzduchu neuvažujte.

11 Adam uviděl na stole prázdnou krabici od sójového mléka se čtvercovou podstavou hrany a, výškou h a hmotností m. Začal ji posouvat konstantní rychlostí po stole tak, že v určité výšce do něj tlačil prstem. Po krátké chvíli přišel na to, že když tlačí krabici dostatečně vysoko, převrátí se. Jak nejvýše může tlačit, aby se krabice ještě nepřevrátila? Koeficient smykového tření mezi krabicí a stolem je f.

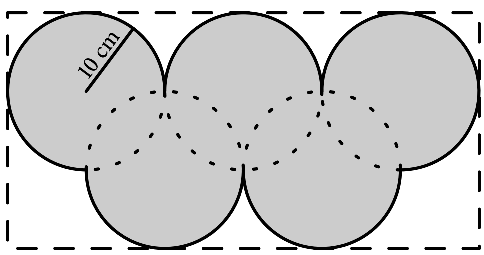
12 Lukaf se vydal na cesty po Norsku. Právě v pravé poledne 21. prosince se ocitl na polárním kruhu. Slunce lenivě svítilo kdesi na jižním obzoru. Lukaf si všiml, že vrchol kopce, který se od něj nacházel ve vzdálenosti 150 km po povrchu Země směrem na sever, byl jen těsně osvětlený. Jak vysoký je kopec?

Odevzdejte výsledek zaokrouhlený na celé metry.

13 Najděte v následující soustavě kladek a pák hmotnost x tak, aby byla soustava v rovnováze. Kroužky představující body otáčení pák jsou upevněné na stěně. Naznačené dílky mají stejnou velikost.



14 Fero se už nemůže dočkat nastávajících olympijských her v Pchjongčchangu. V rámci příprav si z plechového obdélníka s rozměry 60 cm × 30 cm vystřihl olympijské kruhy jako na obrázku. Jaká je vzdálenost těžiště kruhů od středu původního obdélníka?



15 Plyn A se může přeměnit na plyn B podle reakce A ↔ B. Rychlost přeměny plynu A na plyn B je dána rovnicí

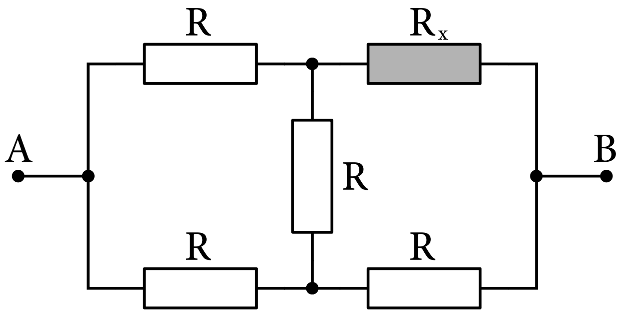
$$v = \frac{\Delta n(A)}{\Delta t} = -k_A n(A),$$

kde $n(A)$ je látkové množství plynu A v nádobě a k_A je rychlostní konstanta této reakce. Rychlost přeměny plynu B na A je dána analogickou rovnicí s rychlostní konstantou k_B. Do nádoby jsme vložili n_0 molů plynu A a nechali jsme ustálit rovnováhu mezi plyny A a B. Jaké látkové množství plynu B bude v nádobě po ustálení rovnováhy?

16 Po rovné cestě jede červené auto rychlostí v. Po druhé cestě, kolmé na tu první, jede modré auto rychlostí w. V okamžiku, kdy modré auto projíždí křižovatkou těchto dvou cest, je červené auto teprve ve vzdálenosti d před ní. Jaká bude minimální vzdálenost aut během jejich celého pohybu?

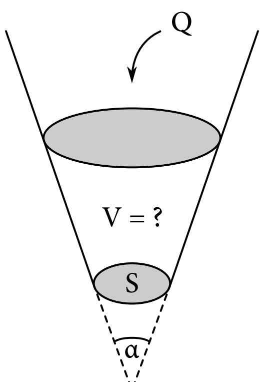
17 Namakaný hasič Fero slaňuje z vysoké budovy. Na laně jisté délky se umí nohami odrazit do maximální vodorovné vzdálenosti 4 metry od budovy. Když odvine lano do dvojnásobné délky, umí se odrazit do vzdálenosti 6 metrů. Jak daleko se bude umět odrazit na laně desetinásobné délky?

18 Do schématu na obrázku vkládáme na místo rezistoru R_x rezistory s libovolnou hodnotou a měříme celkový odpor mezi body A a B. Jaká bude minimální a maximální hodnota celkového odporu, jestliže ostatní rezistory v schématu mají odpor R?

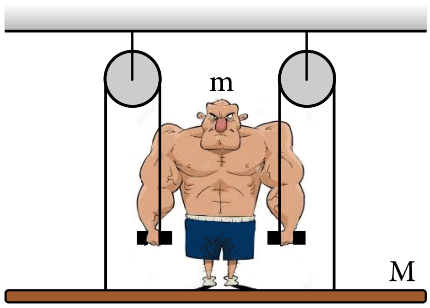


19 Trychtýř ve tvaru komolého kužele s vrcholovým úhlem $\alpha = 2 \arctan \frac{1}{2}$ má naspodu kruhový otvor s plochou $S = \pi$ mm^2. Lijeme do něj vodu s objemovým průtokem $Q = 2\pi$ ml/s. Jaký bude ustálený objem vody V v trychtýři? Zaokrouhlete objem na ml.

Efekty způsobené povrchovým napětím a rychlost pohybu vody na hladině můžete klidně zanedbat.

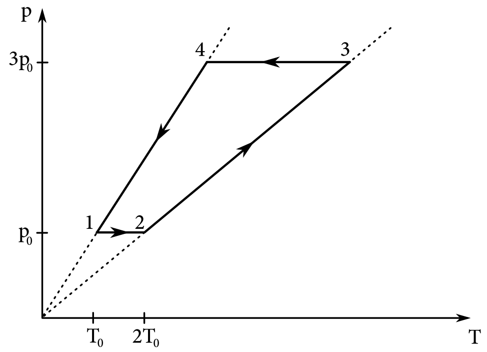


$\boxed{20}$ Silák Patricius Ozrutný má hmotnost m. Dnes chce v cirkuse předvést, jak se pouze s pomocí kladek zvedne spolu s plošinou o hmotnosti $M < m$, na které stojí. Jakou silou musí tahat za každé lano, aby se mu to podařilo?

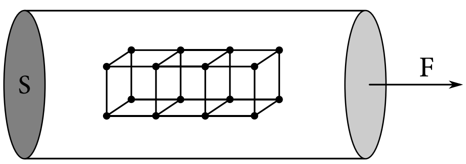


$\boxed{21}$ Máme kovovou cihlu s rozměry $a \times b \times c$. Když ji uzavřeme mezi dvě dokonale vodivé desky tak, že se protilehlé stěny dotýkají desek, postupně naměříme odpory 12 Ω, 27 Ω a 75 Ω. Jaký odpor bude mít největší krychle, kterou můžeme vyřezat z této cihly, když ji uzavřeme mezi desky?

$\boxed{22}$ Ideální plyn s počátečním tlakem p_0, objemem V_0 a teplotou T_0 vykonal kruhový děj zobrazený v pT–diagramu. Překreslete tento děj do VT–diagramu. Množství pracovního plynu se v průběhu děje neměnilo. Nezapomeňte na osách diagramu vyznačit všechny podstatné hodnoty.



$\boxed{23}$ Kovový prvek má hustotu ρ, Youngův modul pružnosti E, molární hmotnost M a krystalizuje v kubické mřížce. Z tohoto kovu jsme vyrobili válcovou tyč s průřezem S tak, že osa tyče je kolmá na jednu ze stěn kostek mřížky. Tyč jsme položili na vodorovný stůl, jeden její konec jsme upevnili a na druhý konec jsme zapůsobili silou F. O kolik se změnily meziatomové vzdálenosti v materiálu ve směru osy tyče?

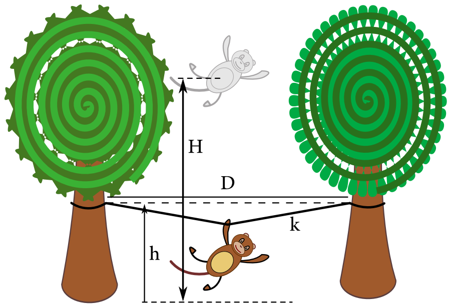


$\boxed{24}$ Enka cestuje nočním vlakem. Skrz okno na levé straně vidí Měsíc, na pravé straně zase pouliční lampu. Okna však určitou část světla odrážejí tak, že na levé straně vidí i zrcadlový odraz lampy a na pravé zase odraz Měsíce. Žádné další odrazy neuvažujte.

Na levé straně se jí Měsíc zdá šestkrát jasnější než odraz lampy, na pravé je zas lampa o polovinu jasnější než odraz Měsíce. Jaký byl poměr jasností lampy a Měsíce, kdyby v oknech nebylo žádné sklo? Sklo propustí 50 % světla a nějakou část světla absorbuje.

25 Brazilští domorodci si vyrobili šňůru na sušení bederních pásů. Vzali dvě velmi lehké a pružné liány nulové klidové délky a tuhosti k a svázali je. Šňůru natáhli ve výšce h mezi dvěma stromy, které jsou od sebe vzdálené D.

Na šňůru skočila z výšky H nad zemí drzá opice s hmotností M a zachytila se středu lana. V jaké výšce nad zemí zastane opice, když se šňůra maximálně natáhne?



26 Na stěně visí nehmotné kruhové hodiny o poloměru r, které jsou upevněné hřebíkem nahoře a uprostřed. Na ozvláštnění zavěsíme na hodiny dvanáct bodových závaží tak, že na k-tou hodinu zavěsíme závaží o hmotnosti km. Pod takovým nesmírným náporem vrchní hřebík nevydrží a hodiny se začnou otáčet. Jaké bude jejich počáteční úhlové zrychlení?

27 Kubo byl na letecké exhibici. Akrobatický pilot v rámci svého vystoupení při přeletu těsně nad diváky nastavil maximální hlasitost na reproduktorech, umístěných na vnější straně letadla, a shodou okolností pustil Kubovu oblíbenou píseň. Tón, o kterém Kuba věděl, že má frekvenci f, slyšel při přibližování letadla o půl oktávy vyšší, t.j. s $\sqrt{2}$-krát vyšší frekvencí. S jakou frekvencí slyšel tento tón, když se letadlo začalo vzdalovat?

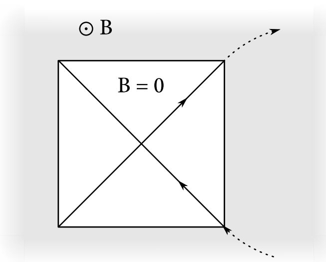
28 Jožko si lehl na dno bazénu. Jeho oči jsou teď v hloubce 2 m pod hladinou a 2 m od okraje bazénu. Hned na okraji bazénu stojí 2 m vysoký Adam, který má nohy na úrovni hladiny. Jak vysoký se zdá být Jožkovi, jestliže je index lomu vody $n = 1{,}33$?

Tato úloha nemá analytické řešení. Doporučujeme použít kalkulačku. Všechny mezivýsledky včetně výsledku zaokrouhlujte s přesností na alespoň dvě desetinná místa.

29 Běžná stowattová žárovka vyzáří ve viditelném světle jen asi 4 % svého výkonu. Jano takovou žárovku dokáže v noci spatřit na maximální vzdálenost 100 km. Kolik parseků by musel odletět od Slunce, aby ho neviděl, pokud Slunce vyzařuje 36 % energie ve formě viditelného světla?

Výsledek zaokrouhlete na celé parseky.

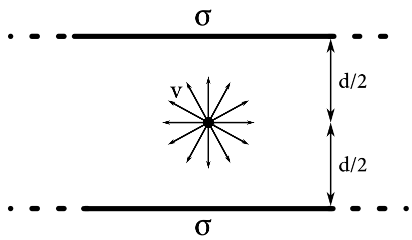
30 V homogenním magnetickém poli B je díra s čtvercovým průřezem (ve směre kolmo na pole), ve které je pole nulové. Po její úhlopříčce přeletí částice s nábojem Q za čas t a po krátké exkurzi v magnetickém poli přeletí i po druhé úhlopříčce. Jaká je její hmotnost?



31 Vladko má na hlavě svoji oblíbenou blešku o hmotnosti m. Chce se jít povozit na řetízkovém kolotoči s řetězy délky L uchycenými ve vzdálenosti r od osy otáčení. Jakou největší úhlovou rychlostí se může kolotoč otáčet, aby bleška neodletěla bez ohledu na její konkrétní poloze na hlavě, pokud se umí držet silou F?

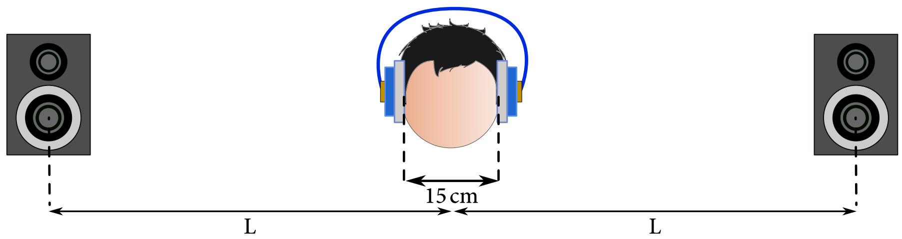
32 Drzá opice sežrala takové množství banánů, že je teď nebezpečné se k ní přiblížit. Její aktivita dosahuje 10^8 Bq! Průměrný banán dlouhý 20 cm totiž obsahuje 60 µg radioaktivního draslíku ^{40}K s poločasem rozpadu 1,25 miliardy let. Kolik metrů banánů za sekundu musí teď sníst, aby tuto nebezpečnou aktivitu udržela?

33 Máme zdroj protonů s nábojem $+e$ mezi dvěma nekonečnými, stejně kladně nabitými rovinami s plošnou hustotou náboje σ vzdálenými d od sebe. Zdroj se nachází ve středu mezi rovinami a produkuje protony s rychlostí v rovnoměrně do všech směrů. Nakreslete do obrázku, kam všude se protony dostanou. Mezi rovinami je vakuum.



34 Kvík seděl na posledním táboráku, kde se hrálo na kytaru, vedle Jara. Od té doby je nahluchlý na pravé ucho. Když si nasadí uzavřená sluchátka, potřebuje si zvýšit hlasitost pravého sluchátka o 3 dB, aby slyšel zvuk vyváženě. Pokud si sluchátka sundá a přepojí výstup na reproduktory umístěné po svých stranách, potřebuje korekci 13 dB. Jaká je vzdálenost mezi reproduktory, pokud vzdálenost mezi Kvíkovýma ušima je 15 cm?

Výsledek zaokrouhlete na centimetry. Nezapomeňte, že levé ucho slyší i pravý reproduktor a naopak. Efekty hlavy na šíření zvuku zanedbejte.

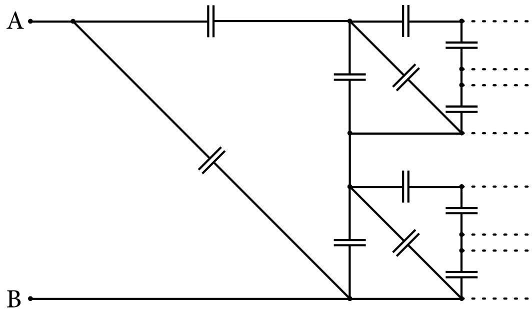


35 Dušan tvaru krychle se vydal do vesmíru. Právě teď se vznáší kdesi u Venuše a je mu hrozně teplo, protože na něj neustále nemilosrdně svítí Slunce.

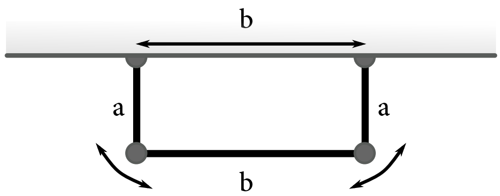
Dušan je dokonale tepelně vodivý, dokáže se sám natočit libovolným směrem, a protože na Venuši nemají opalovací krém, je už dávno opálený úplně dočerna. Jaký je poměr největší a nejmenší teploty, které může jeho povrch dosáhnout?

36 Kajka si po dobu posledního výpadku proudu řekla, že už nikdy víc nebude závislá na komerčních dodávkách a pořídila si malý fúzní reaktor. Konečným produktem fúze jsou jádra hélia. Jako vedlejší produkt vzniká beta záření, což jsou vlastně elektrony unikající z jádra. Uvažujme jádro hélia s poloměrem R. Elektron uniknuvší z tohoto jádra byl následně zachycený volným protonem, kterého vzdálenost od středu jádra hélia je $r = 11R$. Jakou nejmenší kinetickou energii musí mít elektron v momentě, kdy opouští jádro, aby se vůbec k danému protonu dostal?

37 Kvík našel v podkroví svého domu neskutečné množství kondenzátorů s kapacitou C. Bylo jich tam nekonečno, a proto si z nich postupně začal stavět nekonečnou síť. V prvním kroku zapojil jen 4 kondenzátory, v druhém dalších 8, v třetím 16 – prostě vždy dvakrát víc, než v předcházejícím kroku. K jaké hodnotě se bude blížit kapacita takovéhoto zapojení?



38 Kovový rámeček se skládá ze třech hmotných hůlek, dvě svislé mají délku a, vodorovná má délku b. Spojení mezi hůlkami a úchyty na stěně umožňují hůlkám volný pohyb. Délková hustota hůlek je λ. Jaká je perioda kmitů rámečku, jestliže kmitá ve své rovině?



39 Planeta s hmotností M má jediný měsíc s hmotností $M/10$, který se pohybuje po kruhové dráze. Najednou přijde Gandalf a magicky změní hmotnost planety tak, že měsíc odletí. Jaká největší mohla být nová hmotnost planety?

40 Na lodi je stěžeň výšky h a na jeho vrchu je připevněné volně visící lano s délkou $L < h$. Opice Johny se rozběhne po palubě a zachytí se lana, následkem čehož se vyhoupne v rovině kolmé na palubu, ve které leží stěžeň. Jaký úhel svírá stěžeň a lano v okamžiku, kdy je pata stěžně namáhaná největším momentem síly?

Opice má v okamžiku zachycení horizontální rychlost v, která není dostatečná na to, aby se přehoupla nad úroveň vrcholu stěžně.

Vzorová řešení

1 Úloha zjavne nie je fyzikálne náročná, stačí si premeniť zadané jednotky na nejaké konvečnejšie.

Z konštantovníka vieme, že 1 pc $\doteq 3{,}086 \times 10^{16}$ m. Predpona *femto-* znamená, že sa násobí 10^{-15}. Teda pol femtoparseku bude približne 15,43 m.

Jeden rok má 365 dní, pričom každý deň má 24 hodín po 3600 sekundách, čo je 31 536 000 s. Storočie je 100 rokov, predpona *nano-* násobí 10^{-9}, takže jedno nanostoročie je 3,1536 s.

Astronomickú jednotku máme z tabuľky konštánt: 1 AU $\doteq 1{,}5 \times 10^{11}$ m. Pikoastronomická jednotka potom bude 0,15 m. Týždeň má sedem dní, čo je 604 800 s, teda mikrotýždeň bude 0,6048 s.

Pomocou kalkulačky teraz už vieme určiť rýchlosť Miškovho brata $v_\mathrm{M} \doteq 4{,}8929\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a rýchlosť Jurkovho brata $v_\mathrm{J} \doteq 6{,}2004\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Jurkov brat je teda rýchlejší.

Teraz spočítame dĺžku ich bežeckej dráhy: svetelná mikrosekunda je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo za 1 µs, teda $s \doteq 3 \cdot 300\ \mathrm{m} = 900\ \mathrm{m}$.

Z toho vieme vypočítať časy $t_\mathrm{M} \doteq 183{,}943$ s a $t_\mathrm{J} \doteq 145{,}152$ s a tiež ich rozdiel 38,791 s. Nakoniec potrebujeme vyjadriť tento čas v šestonedeliach. Ako prezrádza konštantovník, šestonedelie, čiže šesť týždňov, trvá 10! s = 3 628 800 s, a nanošestonedelie je teda približne 3,63 ms. Vydelením zistíme, že Jurkov brat predbehne Miškovho o 10 690 nanošestonedelí.

S použitím presných hodnôt konštánt a po zaokrúhlení na celé číslo by sme získali výsledok 10 614 nanošestonedelí.

2 Výsledná hmotnosť roztoku je 100 g. Hmotnosť rozpusteného cukru je $0{,}8 \cdot 20\ \mathrm{g} + 0{,}2 \cdot 80\ \mathrm{g} = 32\ \mathrm{g}$, teda výsledný roztok je 32-percentný.

3 Označme rýchlosti Arthura, Pavla a Petra postupne v_1, v_2 a v_3. Kým Arthur zabehol celú dráhu, teda 100 m, Pavel stihol zabehnúť 80 m. Pomer ich rýchlostí je preto $\frac{v_1}{v_2} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$. Podobne kým Pavel zabehol 100 m, prebehol Peter 80 m, teda aj pomer rýchlostí je $\frac{v_2}{v_3} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$. Pomer rýchlostí Arthura a Petra je

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{v_1}{v_2}\frac{v_2}{v_3} = \frac{25}{16}.$$

Nech Arthur zabehol 100 m za čas t. Potom Peter za tento čas zabehol

$$v_3 t = \frac{v_3}{v_1} 100\ \mathrm{m} = \frac{16}{25} 100\ \mathrm{m} = 64\ \mathrm{m}.$$

Arthur teda predbehol Petra o 100 m − 64 m = 36 m.

4 Kocka sa topí a až po istom čase začne plávať vo vode. Počiatočný objem kocky označíme $V_c = a^3$, objem zvyšku kocky označíme V_i, objem vody V_w a objem ponorenej časti kocky V_p. Z Archimedovho zákona vieme, že bude vytláčať vodu s objemom V_p, ktorý zdvihne hladinu. Musíme teda vypočítať objem $V = V_w + V_p$ a nájsť jeho maximum. Pri maximálnom objeme bude aj výška hladiny maximálna.

Vztlaková sila bude $F_\mathrm{vz} = V_p \rho_w g$. Kocka pláva, takže platí $F_g = F_\mathrm{vz}$. Z toho dostaneme $V_p = V_i \frac{\rho_i}{\rho_w}$. Teraz si vyjadríme objem V_w ako násobok V_i. Počiatočná hmotnosť bude $m = a^3 \rho_i$. Hmotnosť sa zachováva, teda v každom okamihu platí $m = m_i + m_w$.

Objem vody teda vypočítame $V_w = \frac{m-m_i}{\rho_w}$, a teda $V_w = \frac{a^3\rho_i - V_i\rho_i}{\rho_w}$. Nakoniec dostaneme objem

$$V = V_w + V_p = \frac{a^3\rho_i - V_i\rho_i}{\rho_w} + V_i\frac{\rho_i}{\rho_w} = a^3\frac{\rho_i}{\rho_w}.$$

Z toho vidíme, že výška hladiny vôbec nezávisí od toho, koľko ľadu je roztopeného, pokiaľ kocka pláva na vode. Teoreticky, ak by bola nádoba dostatočne široká, mohla by nastať situácia, kedy ľad nezačne nikdy plávať. V takom prípade sa ľad iba jednoducho natopí na vodu, ktorej objem bude $V = a^3\frac{\rho_i}{\rho_w}$, čo je to isté ako v prvom prípade. Takže pre maximálnu výšku dostávame

$$h = \frac{\rho_i a^3}{\rho_w \pi R^2}.$$

5 Podľa druhého Newtonovho zákona platí, že zrýchlenie je úmerné výslednej pôsobiacej sile. Aké sily pôsobia na sumca? V prvom rade je to sila, ktorou ťahá Juro udicu, a tá sa udicou prenáša na sumca. No a potom sú tu tiažová a vztlaková sila. Všetky tieto sily pôsobia iba vo vertikálnom smere, takže ich možno jednoducho sčítať. Výsledná sila pôsobí nahor, označme ju F'.

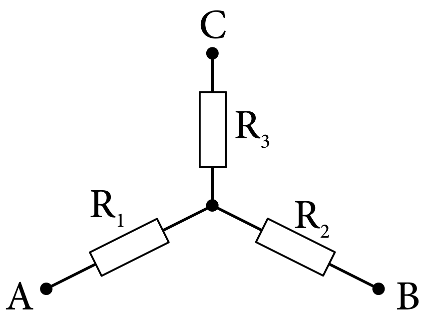
V takom prípade možno písať $ma = F'$. Potom Juro zatiahne silou $2F$, čiže ešte o F väčšou. To znamená, že celková pôsobiaca sila F' sa zvýši ešte o F, takže možno jednoducho písať $ma' = F + F'$. Vylúčením sily F' dostávame $a' = a + \frac{F}{m}$.

6 Označme si namerané odpory ako $R_{AB} = 24\,\Omega$, $R_{AC} = 48\,\Omega$ a $R_{BC} = 56\,\Omega$ a odpory jednotlivých rezistorov ako R_1, R_2 a R_3. Rezistor, ktorý sa nachádza pri meraní v nepripojenej vetve, nemá vplyv na výsledný odpor (nebude ním tiecť prúd). Pre namerané odpory vo hviezde teda platia rovnice

$$R_1 + R_2 = R_{AB},$$

$$R_1 + R_3 = R_{AC},$$

$$R_2 + R_3 = R_{BC}.$$



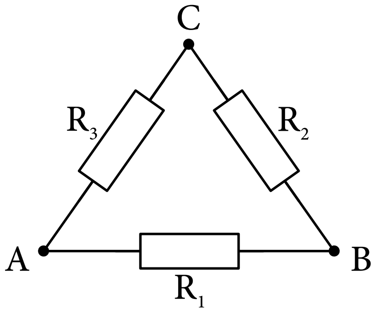
Obrázek 1: *Rezistory zapojené do tvaru hviezdy*

Jednoduchou úpravou dostaneme $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 16\,\Omega$ a $R_3 = 40\,\Omega$. Keď zapojíme tieto odpory do trojuholníka, medzi vrcholmi dostaneme iba sériovo a paralelne pozapájané rezistory. Výsledné odpory teda jednoducho vyjadríme ako

$$R'_{AB} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} = 7\ \Omega,$$

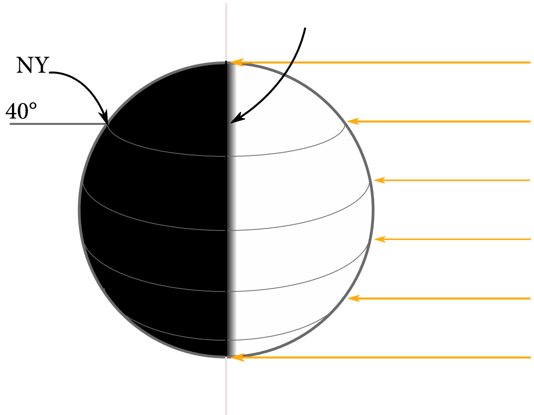
$$R'_{BC} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} = 12\ \Omega,$$

$$R'_{AC} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} = 15\ \Omega.$$



Obrázek 2: *Rezistory zapojené do tvaru trojuholníka*

7 V New Yorku je polnoc počas rovnodennosti, to znamená: Slnko je presne nad rovníkom a na presne opačnom poludníku ako New York. Rozhranie medzi osvetlenou a neosvetlenou časťou Zeme má tvar kružnice a nazýva sa terminátor.



Obrázek 3: *Slnečné lúče dopadajúce na Zem v skúmanom okamihu*

Je pomerne očividné, že najbližšie miesto od New Yorku k terminátoru je severný pól. Predstavme si, že sa prejdeme po terminátore. Vo všetkých bodoch okrem severného a južného pólu sa od New Yorku vzďaľujeme alebo približujeme, pretože smer nášho pohybu nie je kolmý na spojnicu k New Yorku. Tieto body preto nemôžu byť miesta, v ktorých sme najbližšie alebo najďalej od New Yorku. Severný pól je zjavne teda to najbližšie miesto, južný je určite ďalej. Rozdiel zemepisných šírok New Yorku a severného pólu je 50°. Polomer Zeme je $R = 6378$ km, a teda pre oblúkovú vzdialenosť dostávame

$$d = \frac{5\pi}{18}R \doteq 5566\ \text{km} \doteq 5570\ \text{km}.$$

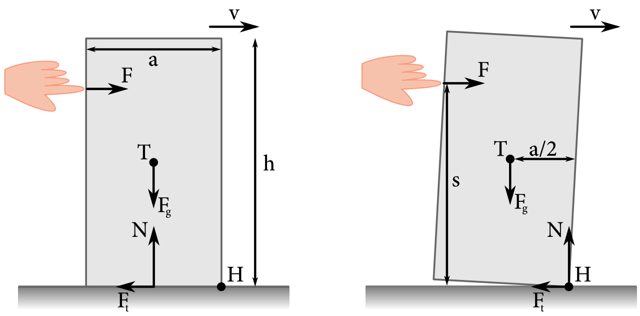
8 V prvom rade zistime, aký je pomer medzi snímkovou frekvenciou kamery pri natáčaní a snímkovou frekvenciou filmu pri premietaní. To vieme jednoducho určiť z rýchlostí auta v skutočnosti a vo filme. Stačí, keď si uvedomíme, že auto sa medzi dvomi snímkami posunulo o malú vzdialenosť d. Ak medzi dvomi snímkami ubehol čas τ, zdanlivá rýchlosť je $v = \frac{d}{\tau} = df$, kde $f = \frac{1}{\tau}$ je snímková frekvencia. Vidíme, že zdanlivá rýchlosť je priamo úmerná snímkovej frekvencii. Pomer snímkových frekvencií je potom rovný podielu príslušných rýchlostí $k = \frac{50\ \mathrm{kmh^{-1}}}{160\ \mathrm{kmh^{-1}}} = \frac{5}{16}$.

Ako je to ale so zrýchleniami? Uvažujme pád s konštantným zrýchlením z výšky h. Medzi výškou a dobou pádu je vzťah $h = \frac{1}{2}gt^2$. Po zmene snímkovej frekvencie sa trvanie každého deja skráti k-krát, takže celý pád z rovnakej výšky bude trvať len kt, čiže možno písať $h = \frac{1}{2}g'\left(kt\right)^2$, kde g' je zdanlivé gravitačné zrýchlenie. Predelením týchto dvoch rovníc dostávame $g' = \frac{g}{k^2} = \left(\frac{5}{16}\right)^{-2} = 3{,}2^2 = 10{,}24g$.

9 Kameň na naklonenej rovine bez trenia má zrýchlenie $g \sin\alpha$, vodorovná zložka tohoto zrýchlenia je $g\sin\alpha\cos\alpha = g\frac{\sin(2\alpha)}{2}$. Sínus nadobúda maximum, keď je jeho argument 90°, teda najväčšie vodorovné zrýchlenie vidíme pre 45°.

10 Nakoľko kameň vrabca zasiahne dvakrát, vieme, že kameň aj vrabec majú rovnakú vodorovnú rýchlosť. Z maximálnej výšky kameňa poznáme jeho zvislú zložku rýchlosti $v_y = \sqrt{2gH}$. Vodorovnú zložku vieme dopočítať z Pytagorovej vety ako $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2}$, čo je i hľadaná rýchlosť vrabca $20\sqrt{3}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \doteq 35\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

11 Pozrime sa, aké sily pôsobia na škatuľu, keď do nej tlačíme prstom. V prvom rade ide o tiažovú silu F_g, ktorá pôsobí v ťažisku, ďalej ide o normálovú silu N, ktorá pôsobí v mieste dotyku podložky so škatuľou, treciu silu F_t, ktorá pôsobí proti smeru pohybu a silu F, ktorou na škatuľu pôsobíme my.



Obrázek 4: *Prst tlačiaci na škatuľu*

Nato, aby sa škatuľa hýbala konštantnou rýchlosťou, musí platiť rovnováha síl vo vodorovnom smere, preto $F = F_t$. Taktiež vieme, že škatuľa neprechádza cez stôl, preto musí platiť rovnováha síl aj vo zvislom smere, $N = F_g$. Ďalej vieme, že $F_t = fF_g$. Keď sa začne škatuľa prevracať okolo svojej dolnej hrany (H), pôsobisko normálovej sily a pôsobisko trecej sily sa presunú na hranu. Momenty síl je výhodné počítať vzhľadom na túto hranu, pretože potom je moment normálovej sily a moment trecej sily nulový. Zostali nám teda už iba moment tiažovej sily a moment sily F.

Nato, aby sa škatuľa neprevrátila musí platiť, že moment sily, ktorý okolo tejto hrany vyvíjame my silou F, je menší ako moment sily spôsobený tiažovou silou F_g. Príslušné rameno tiažovej sily je $a/2$ (keďže ťažisko sa nachádza vo vodorovnej vzdialenosti $a/2$ od hrany škatule), rameno prislúchajúce sile F je s, čo je kolmá vzdialenosť pôsobiska sily od stola.

Aby sa škatuľa neprevrátila, musí platiť

$$F_g \frac{a}{2} \leq Fs,$$

$$mg\frac{a}{2} \leq fmgs,$$

$$\frac{a}{2f} \leq s,$$

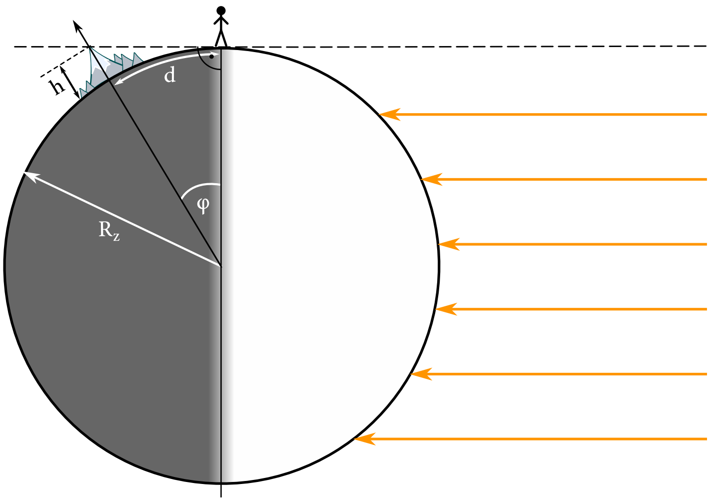
čo dáva pre maximálnu možnú výšku, v ktorej môžeme tlačiť škatuľu, hodnotu $\frac{a}{2f}$.

12 Označme φ rozdiel zemepisných šírok kopca a Lukafa. Potom vieme, že musí platiť rovnosť

$$\varphi R_{\oplus} = d,$$

kde $R_{\oplus}$ je polomer Zeme. Ak označíme výšku kopca ako h, z jednoduchej trigonometrie (pozri obrázok) vyplýva

$$\cos\varphi = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}.$$



Obrázek 5: *Slnečné lúče dopadajúce na Zem v skúmanom okamihu*

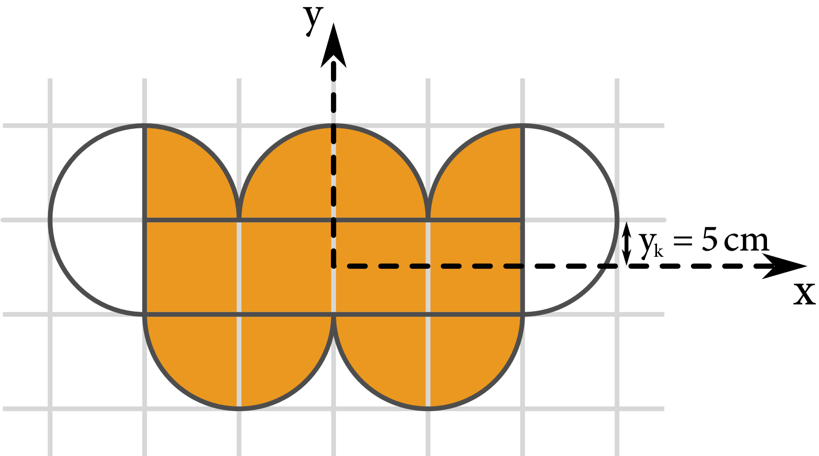
Kombináciou týchto dvoch jednoduchých vzťahov už vieme ľahko vyjadriť výšku kopca

$$h = R_{\oplus}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R_{\oplus}}\right)} - 1\right) \doteq 1764\ \mathrm{m}.$$

13 Označme silu, ktorou lano pôsobí na obe páky, F a gravitačné zrýchlenie g. Rovnováha momentov síl na ľavej páke je udaná rovnicou $1\ \mathrm{kg}\cdot g\cdot 0 + 4\ \mathrm{kg}\cdot g\cdot 3 = F\cdot 4$, teda sila $F = 3\ \mathrm{kg}\cdot g$. Obdobným spôsobom z rovnováhy momentov síl na pravej páke ostáva určiť hmotnosť x.

$$F\cdot 1 = 1\ \mathrm{kg}\cdot g\cdot 2 + x\cdot g\cdot 5 \Rightarrow x = 0{,}2\ \mathrm{kg}.$$

14 Novovzniknuté olympijské kruhy si rozdelíme na geometrické útvary, ktoré vieme jednoducho popísať. Ako vidieť na obrázku, náš útvar sa dá zložiť z obdĺžnika 40 cm × 10 cm, piatich polkruhov a dvoch štvrťkruhov s polomerom $r = 10$ cm.



Obrázek 6: *Útvar rozdelený na jednoduchšie geometrické útvary*

Zaveďme si kartézsku súradnicovú sústavu s počiatkom v ťažisku pôvodného obdĺžnika. Uľahčí nám to počítanie, najmä preto, že vzdialenosť ťažísk, na ktorú sa pýta otázka, bude práve veľkosť polohového vektora nového ťažiska.

Keďže sú olympijské kruhy symetrické podľa vertikálnej osi, x-ová zložka polohového vektora ťažiska sa nezmení, bude jednoducho nulová. Zložku v y-ovom smere už však treba vypočítať. Tú však vieme vypočítať z polôh ťažísk jednotlivých útvarov ako vážený priemer, pretože ťažisko je bod, ktorý reprezentuje efektívne pôsobisko gravitačnej sily telesa. Matematicky zapísané

$$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}.$$

Naše kruhy si však vieme rozdeliť na útvar zložený z obdĺžnika, troch polkruhov a dvoch štvrťkruhov (farebne vyznačených na obrázku), ktorých výsledná y-ová poloha ťažiska je nulová, a dva polkruhy, ktoré majú ťažisko v $y_k = 5$ cm. Ak si označíme plošnú hustotu plechu σ, ktorá nám aj tak vypadne, dostaneme pre polohu ťažiska

$$y_T = \frac{2\sigma \frac{\pi r^2}{2} \frac{r}{2}}{\sigma 4r^2 + \sigma 3\pi r^2} = \frac{5\pi}{3\pi + 4}\ \text{cm} \doteq 1{,}17\ \text{cm}.$$

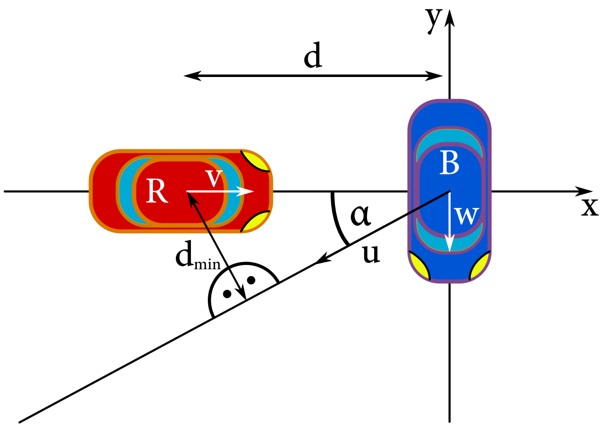
15 Rovnováha nastane, keď bude rýchlosť premien plynov rovnaká. Ak rovnovážne látkové množstvá plynov A a B označíme n_A^{eq} a n_B^{eq}, potom pre ne musí platiť

$$k_A n_A^{eq} = k_B n_B^{eq}.$$

Celkové látkové množstvo plynov sa musí zachovávať kvôli stechiometrii reakcie, teda $n_A + n_B = n_0$. Výsledné látkové množstvo plynu B je

$$n_B = \frac{k_A}{k_A + k_B} n_0.$$

16 Máme dve autá pohybujúce sa po vzájomne kolmých cestách. Cestu červeného auta označme x a modrého y. Treba zistiť vzájomnú vzdialenosť, čo nás hneď navádza k zmene vzťažnej sústavy. Pozrieme sa na celý príklad v sústave červeného auta. To znamená, že modré auto sa pohybuje šikmo rýchlosťou $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.



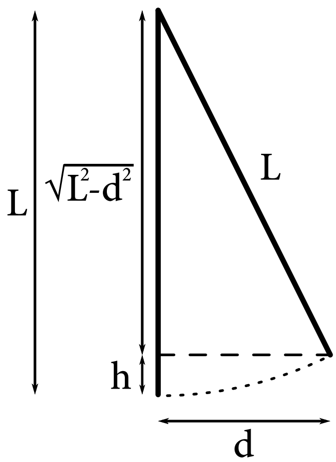
Obrázek 7: *Pohybujúce sa autá*

Uvažujme moment, keď modré auto prešlo križovatkou, ako počiatočný. Zistíme uhol vektora rýchlosti $\vec{u}$ s osou x. Vieme, že vektor $\vec{u}$ rozložím nasledovne: $v = u \cos \alpha$ a $w = u \sin \alpha$. Z toho po úpravách dostaneme $\tan \alpha = \frac{w}{v}$.

V sústave červeného auta bude zvierať trajektória modrého auta s osou x uhol α. Najkratšia vzdialenosť medzi autami bude kolmica od červeného auta na trajektóriu modrého auta. Vieme, že červené auto je d od križovatky a poznáme uhol trajektórie. Kolmá vzdialenosť bude

$$d_{min} = d \sin\left(\arctan\left(\frac{w}{v}\right)\right) = d\frac{w}{\sqrt{v^2 + w^2}}.$$

17 Označme dĺžku lana L a v rýchlosť, ktorou sa vie požiarnik odraziť. Zo zákona zachovania energie je jasné, že keď sa vždy odráža najväčšou možnou rýchlosťou, vždy sa vyzdvihne o tú istú výšku h:



Obrázek 8: *Požiarnik na lane*

Porovnajme teda výšky, do ktorých sa odrazil, pre prvý a druhý prípad:

$$L-\sqrt{L^2-4^2\ \mathrm{m}^2}=2L-\sqrt{4L^2-6^2\ \mathrm{m}^2}.$$

Z tejto rovnice potrebujeme dostať dĺžku L. Osamostatnime posledný člen a celú rovnicu umocníme.

$$L-\sqrt{L^2-16\ \mathrm{m}^2}=2L-\sqrt{4L^2-36\ \mathrm{m}^2}$$

$$\sqrt{4L^2-36\ \mathrm{m}^2}=L+\sqrt{L^2-16\ \mathrm{m}^2}\qquad \Big/\ ()^2$$

$$L^2-10\ \mathrm{m}^2=L\sqrt{L^2-16\ \mathrm{m}^2}\qquad \Big/\ ()^2$$

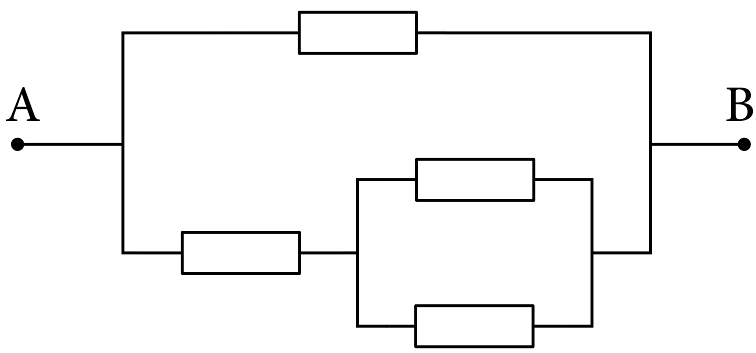
$$L^2=25\ \mathrm{m}^2\Rightarrow L=5\ \mathrm{m}$$

Výška, do ktorej sa vie požiarnik odraziť, je $h=5\ \mathrm{m}-\sqrt{5^2\ \mathrm{m}^2-4^2\ \mathrm{m}^2}=2\ \mathrm{m}$. V poslednom prípade sa teda požiarnik odrazí do vzdialenosti d_3:

$$2\ \mathrm{m}=50\ \mathrm{m}-\sqrt{2500\ \mathrm{m}^2-d_3^2}\Rightarrow d_3=14\ \mathrm{m}.$$

18 Na miesto rezistora R_x vieme vložiť rezistor s ľubovoľným odporom. To znamená, že ho vieme spojito meniť od 0 po $\infty\ \Omega$. Keďže nás zaujíma interval výsledného odporu, ktorý sa mení tiež spojito, stačí vypočítať iba výsledné odpory v hraničných prípadoch.

Keď zvolíme $R_x=0\ \Omega$, náš odpor sa správa ako ideálny vodič. Keďže ideálny vodič nemá žiaden odpor, možno jeho dĺžku ľubovoľne meniť, takže uzly, ktoré spája, možno beztrestne stiahnuť do jediného uzla. Tým pádom možno schému prekresliť nasledovne:

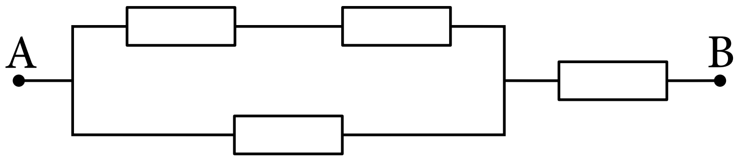


Obrázek 9: *Schéma s $R_x=0\ \Omega$*

Tu dostávame čisto sériovo a paralelne zapojené rezistory. Dva paralelne zapojené rezistory v spodnej vetve majú odpor $\frac{R}{2}$, takže výsledný odpor je v tomto prípade

$$R_0=\frac{R\cdot\frac{3}{2}R}{R+\frac{3}{2}R}=\frac{3}{5}R.$$

Keď zvolíme $R_x = \infty\ \Omega$, odpor sa správa rovnako, ako keby tam bol dokonalý izolant, čiže vákuum. A teda túto odporovú vetvu môžeme v schéme beztrestne odstrániť. Dostaneme teda schému:



Obrázek 10: *Schéma s* $R_x = \infty\ \Omega$

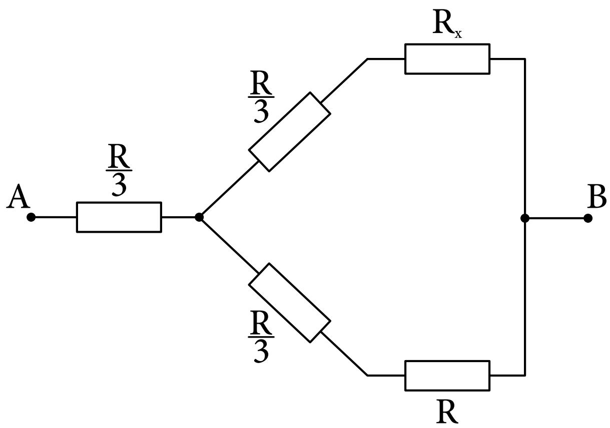
Odpor paralelne zapojených rezistorov je $\frac{2}{3}R$, čiže odpor celej schémy je

$$R_\infty = \frac{5}{3}R.$$

Odpor schémy sa môže nachádzať v intervale $\left[\frac{3}{5}R; \frac{5}{3}R\right]$.

Niektorí čitatelia tohto vzorového riešenia by mohli namietať, že nevieme, akú hodnotu má celkový odpor pre všeobecné R_x. Veď ak je funkcia spojitá, neznamená to, že je monotónna, a extrémy by mohla nadobúdať aj mimo hraničných prípadov. Preto teraz v skratke ukážeme, ako vypočítať celkový odpor zapojenia R_Σ pre všeobecné R_x.

Zamerajme sa najprv iba na tri rezistory s odporom R, ktoré tvoria ľavú časť zapojenia. Tie sú zapojené do tvaru trojuholníka. Keby sme merali odpor medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi, vždy by sme namerali presne $\frac{2}{3}R$. Odpor týchto rezistorov je nemenný a teda medzi tri uzly, medzi ktorými sa nachádzajú, by sme mohli umiestniť čokoľvek, čo nám dá rovnaký výsledok. A aj tak urobíme. Pôvodné zapojenie nahradíme zapojením troch rezistorov s odporom $\frac{R}{3}$ v tvare hviezdy. Takáto transformácia sa nazýva trojuholník–hviezda. To, že je to ekvivalentné zapojenie, si už overte sami.



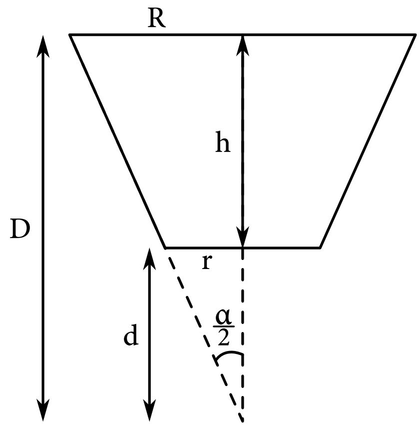
Obrázek 11: *Transformovaná schéma*

Teraz už výsledná schéma pozostáva naozaj iba zo sériovo a paralelne zapojených rezistorov, takže pre celkový odpor po troche matematických úprav dostávame výraz

$$R_\Sigma(R_x) = \frac{R}{3} + \frac{\frac{4}{3}R\left(\frac{R}{3} + R_x\right)}{\frac{5}{3}R + R_x}.$$

Toto je na intervale $[0; \infty]$ monotónna funkcia a náš pôvodný výsledok je teda správny.

19 Ustálenú výšku dosiahneme, keď je výtok z nádoby rovnaký ako prítok Q. Výtok vieme z Torricelliho vzťahu: $Q = \sqrt{2hg}S$, kde h je výška vody v nádobe. Výpočtom vyjde $h = 20$ cm. Teraz už stačí dopočítať geometriu na určenie objemu:



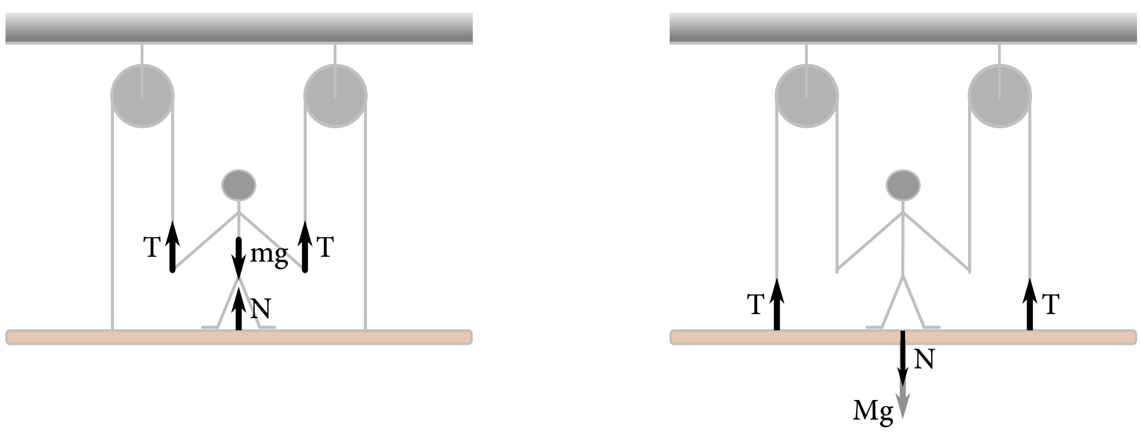
Obrázek 12: *Prierez lievikom*

Malý polomer je $r = 1$ mm, výška malého kužeľa $d = 2$ mm. Výška veľkého kužeľa D je o h väčšia: $D = d + h = 202$ mm, veľký polomer je $R = 101$ mm. Objem vody je teda $2158\ \mathrm{cm}^3$.

20 Ak silák na laná pôsobí dostatočne veľkou silou, hýbe sa spolu s plošinou smerom nahor. Nás však zaujíma práve tá sila, ktorá je potrebná na udržanie celého systému v rovnováhe. Stačilo by, aby bola čo i len o kúsok väčšia, a už by sa silák zdvíhal. Takže ide o statickú úlohu, v ktorej treba najprv zanalyzovať všetky pôsobiace sily.

Označme si T silu, ktorou pôsobí silák na každé z lán. Keďže laná aj kladky pokladáme za dokonalé, táto napäťová sila bude pôsobiť pozdĺž celého lana, to znamená, aj na jeho opačnom konci. Pozrime sa ešte, aké sily pôsobia na siláka a plošinu.

Keďže silák pôsobí na každé z lán silou T, podľa tretieho Newtonovho zákona pôsobia laná na siláka silou $2T$ smerom nahor. Okrem toho pôsobí tiažová sila mg a normálová sila N od plošiny. Na plošinu pôsobia ťahové sily $2T$ od lán (taktiež smerom nahor), tiažová sila Mg a normálová sila od siláka N smerom nadol.



Obrázek 13: *Vľavo sily pôsobiace na siláka, vpravo sily pôsobiace na plošinu*

Keďže je systém v rovnováhe, súčet týchto síl je nulový. Matematicky zapísané

$$2T - mg + N = 0,$$

$$2T - Mg - N = 0.$$

Vylúčením normálovej sily N z rovníc dostaneme

$$T = \frac{(m + M)\, g}{4},$$

čo je presne sila, ktorú sme hľadali.

$\boxed{21}$ Odpor kvádra s rezistivitou ρ, dĺžkou x a prierezom S je $R = \rho\frac{x}{S}$. Vidíme, že odpor kvádra meraný ako v zadaní je najmenší vtedy, keď je na vodivé platne priložená najväčšia stena a najkratšia hrana tvorí vzdialenosť medzi platňami. Najkratšiu hranu označme a. To je zároveň hrana najväčšej kocky, ktorú z kvádra vieme vyrezať. Jej odpor potom bude

$$R_\mathrm{k} = \rho\frac{a}{a^2} = \frac{\rho}{a}.$$

Všimnime si, čo dva väčšie odpory, $R_b = \rho\frac{b}{ac}$ a $R_c = \rho\frac{c}{ab}$, dávajú po vynásobení a následnom odmocnení:

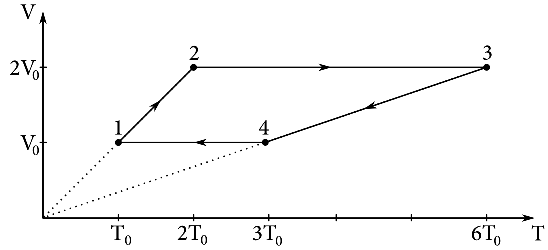
$$\sqrt{R_b R_c} = \sqrt{\rho\frac{b}{ac}\rho\frac{c}{ab}} = \rho\frac{1}{a} = \rho\frac{a}{a^2}.$$

Toto je práve hľadaný odpor najväčšej kocky, ktorú vieme vyrezať. Dosadením hodnôt získame výsledok $\sqrt{R_b R_c} = \sqrt{27\ \Omega \cdot 75\ \Omega} = 45\ \Omega$.

$\boxed{22}$ Prv než začneme prekresľovať pT–diagram na VT–diagram, je nutné zistiť, aké termodynamické deje v plyne prebiehajú a aké objemy a teploty má plyn v jednotlivých fázach deja. Na to všetko nám bude stačiť rovnica ideálneho plynu $pV = NkT$, pričom N je nemenný počet častíc.

Pri prechode 1 → 2 v plyne prebieha zjavne izobarický dej, pričom sa zdvojnásobí teplota, takže sa zmení objem z $V_0 = \frac{NkT_0}{p_0}$ na $2V_0$. Pri prechode 2 → 3 tlak stúpa priamo úmerne s teplotou, takže dej, ktorý v plyne prebieha, musí byť izochorický, keďže pomer $\frac{p}{T} = \frac{Nk}{V}$ je konštantný. Tlak sa strojnásobil, plyn bude mať v bode 3 teplotu $6T_0$ a objem $2V_0$. Prechod 3 → 4 je izobarický a 4 → 1 opäť izochorický. To znamená, že v bode 4 je objem V_0 a teplota $3T_0$.

Pri prekresľovaní na VT–diagram nebudeme mať žiadne problémy s nakreslením izochorického deja. Graf izobarického deja vo VT–diagrame bude vyzerať veľmi podobne ako graf izochorického v pT–diagrame: pomer $\frac{V}{T} = \frac{Nk}{p}$ je konštantný, teda opäť je to lineárna funkcia prechádzajúca počiatkom. Prekreslený cyklus do VT–diagramu vyzerá nasledovne:



Obrázek 14: *Cyklus prekreslený do VT–diagramu*

23 Z Hookeovho zákona poznáme relatívne predĺženie tyče $\varepsilon = \frac{F}{SE}$. Relatívne predĺženie tyče je aj relatívnym predĺžením medziatómových vzdialeností a. Hodnotu a na začiatku určíme z hustoty tyče. Opakujúcim sa vzorom, tvoriacim celý kryštál, je napríklad jeden atóm so šiestimi väzbami v kocke s hranou a. Atóm má hmotnosť $\frac{M}{N_A}$, kde N_A je Avogadrova konštanta, teda hustota materiálu je

$$\rho = \frac{M}{N_A a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho}}$$

a hľadané predĺženie je

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho}} \frac{F}{SE}.$$

24 Na ľavej strane vidíme Mesiac s jasnosťou $\frac{I_{\mathrm{M}}}{2}$, kde I_{M} je vonkajšia jasnosť Mesiaca, a lampu s jasnosťou $r\frac{I_{\mathrm{L}}}{2}$, kde r je neznámy zlomok odrazeného svetla. Zadanie nám poskytuje medzi zdanlivými jasnosťami na ľavej strane vzťah

$$\frac{I_{\mathrm{M}}}{2} = 6r\frac{I_{\mathrm{L}}}{2}.$$

Na pravej strane postupujeme podobne a dostávame vzťah

$$\frac{I_{\mathrm{L}}}{2} = \frac{3}{2}r\frac{I_{\mathrm{M}}}{2}.$$

Keďže nás zaujíma pomer $\frac{I_{\mathrm{L}}}{I_{\mathrm{M}}}$, môžeme si všimnúť, že nám stačí predeliť jednu rovnicu druhou, aby nám ostal len žiadaný pomer, ktorý pre názornosť označíme p. Dá sa pobadať, že informácia o prepustení 50 % svetla je vo výpočte úplne nepodstatná. Dôvodom je to, že všetky jasnosti, ktoré porovnávame, sú jasnosti svetla už do vlaku vniknuvšieho, čo nám zabezpečuje neporušenosť ich pomerov. Takisto sa zbavíme neznámeho parametra r. Po predelení rovnice pre pravú stranu tou pre ľavú dostávame

$$p = \frac{3}{12}\frac{1}{p}$$

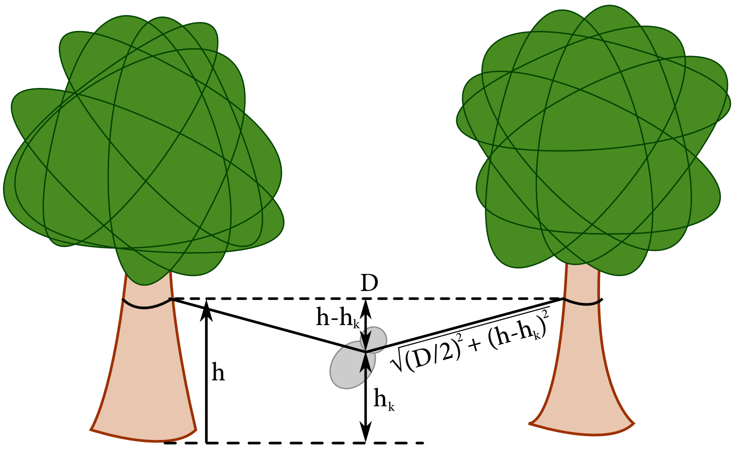
a po pramálo záživnom vyriešení sa dostávame k výsledku

$$p = \frac{1}{2}.$$

25 Úlohu vyriešime zákonom zachovania energie. Stačí si spomenúť, že potenciálna energia pružinky je $\frac{1}{2}k(\Delta L)^2$, kde ΔL je jej predĺženie oproti jej pokojovej dĺžke. Na začiatku mali pružné laná nulovú pokojovú dĺžku, potom, ako ich domorodci natiahli pomedzi stromy, mala každá pružina dĺžku $D/2$. Preto potenciálna energia jednej pružiny, prv ako na ňu skočila opica, bola $\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2$ a potenciálna energia oboch pružín teda $k\left(\frac{D}{2}\right)^2$.

Na začiatku má drzá opica nulovú kinetickú energiu a potenciálnu energiu MgH.

Označme h_k výšku nad zemou, v ktorej nakoniec skončí opica s natiahnutým lanom. Pri maximálnom možnom natiahnutí pružín má opica nulovú rýchlosť a potenciálnu energiu Mgh_k. Energia $Mg(H - h_k)$ sa uložila do potenciálnej energie pružín.



Obrázek 15: *Opica v najnižšom bode*

Po troške geometrie prídeme na to, že pružiny majú teraz dĺžku $\sqrt{(h-h_k)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}$. Uvedomelí všetkých múdrych pozorovaní sa môžeme smelo pustiť do napísania zákona zachovania energie:

$$Mg\,(H-h_k)+2\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2=2\frac{1}{2}k\left(\sqrt{(h-h_k)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}\right)^2,$$

$$Mg\,(H-h_k)+2\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2=2\frac{1}{2}k\left((h-h_k)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2\right),$$

$$Mg\,(H-h_k)=k(h-h_k)^2.$$

Dostali sme sa ku kvadratickej rovnici, ktorej riešenia sú

$$h_k=h-\frac{Mg}{2k}\pm\frac{1}{2k}\sqrt{M^2g^2+4kMg(H-h)}.$$

Ako zistíme, ktoré z nich je fyzikálne to správne? Stačí, ak sa pozrieme na nejaký špeciálny prípad, napríklad $H=h$. Pôvodná rovnica a jej riešenie sa potom zredukuje na

$$Mg\,(h-h_k)=k(h-h_k)^2\Rightarrow h_k=h-\frac{Mg}{k}.$$

Toto riešenie dostaneme z riešenia kvadratickej rovnice, ak si vyberieme to riešenie spomedzi dvoch, pri ktorom je znamienko mínus.

Preto správny výsledok je

$$h-\frac{Mg}{2k}-\sqrt{\left(\frac{Mg}{2k}\right)^2+\frac{Mg}{k}(H-h)}$$

alebo aj

$$h-\frac{Mg}{2k}\left(1+\sqrt{1+\frac{4k}{Mg}(H-h)}\right).$$

26 Nieto v tomto príklade žiadneho zbytočného pôvabu, treba nám akurát spočítať momenty zotrvačnosti a síl. Vďaka bodovosti všetkých závaží dostávame moment zotrvačnosti sústavy pomerne svižne ako:

$$I = mr^2 + 2mr^2 + \ldots + 12mr^2 = 78mr^2.$$

Ostáva popočítať momenty síl (onakvejší fyzici si samotný výpočet môžu ešte zjednodušiť, avšak neveľmi):

$$N = \left(12 \cdot 0 + 11 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2}\right) mgr,$$

$$N = 6\left(2 + \sqrt{3}\right) mgr.$$

Výsledok je teda

$$\varepsilon = \frac{N}{I} = \frac{2 + \sqrt{3}}{13} \frac{g}{r}.$$

27 Naša fyzikálna intuícia nám hovorí, že dôvodom zmeny frekvencie zvuku je Dopplerov efekt. Pripomeňme si teda vzťah, ktorý túto zmenu popisuje:

$$f' = \frac{c \pm v_r}{c \mp v_s} f,$$

kde c je rýchlosť vlnenia, v_r rýchlosť pozorovateľa a v_s rýchlosť zdroja. Znamienka vyberáme podľa toho, či sa zdroj, resp. pozorovateľ, približuje alebo vzďaľuje. V našom prípade vieme, že pri približovaní lietadla je počutý tón o pol oktávy vyšší, teda

$$\sqrt{2} f = \frac{c}{c - v} f,$$

kde v je rýchlosť lietadla. Odtiaľ dostávame

$$v = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} c.$$

V momente, keď sa lietadlo začne vzdaľovať, platí

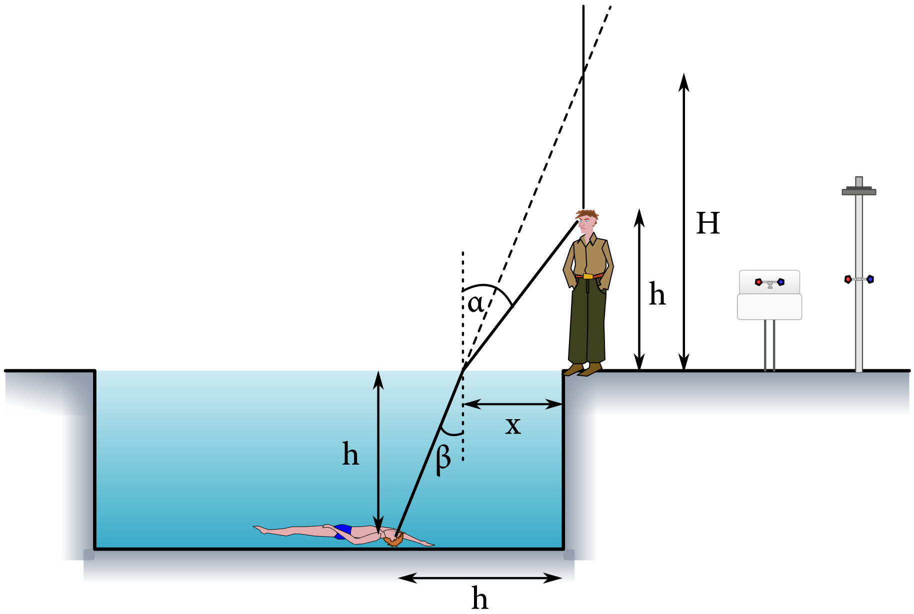
$$f' = \frac{c}{c + v} f$$

a po dosadení rýchlosti lietadla

$$f' = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} f.$$

28 Označme jedinú vzdialenosť zo zadania ako h a nakreslime si obrázok. Pozrime sa na lúč, ktorý prichádza od hlavy Adama a smeruje do Jožkových očí. Ten sa zlomí vo vzdialenosti x od okraja bazéna. Ak nájdeme túto vzdialenosť, zdanlivú výšku Adama H už nájdeme ľahko z jednoduchej podobnosti trojuholníkov

$$H = h \frac{x}{h - x}.$$



Obrázek 16: *Analýza situácie*

Ako však nájsť vzdialenosť x? Môžeme buď využiť Snellov zákon alebo Fermatov princíp extremálneho času.

Snellov zákon

Ak si zvolíme cestu Snellovho zákona, dostaneme sa k rovnici

$$\sin\alpha = n\sin\beta,$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = n\frac{(h-x)}{\sqrt{(h-x)^2+h^2}},$$

$$\frac{x^2}{x^2+h^2} = n^2\frac{(h-x)^2}{(h-x)^2+h^2},$$

$$\vdots$$

$$0 = \left(n^2-1\right)\left(2x^2h^2-2x^3h+x^4\right)+n^2\left(h^4-2xh^3\right).$$

Túto rovnicu nevieme riešiť, pretože je až štvrtého stupňa, avšak môžeme sa pokúsiť riešiť ju numericky. Azda najjednoduchšia metóda, akú môžeme použiť, je *binárne vyhľadávanie*. Nemusíte sa báť, nie je to nič strašné. Najprv si však z rovnice urobíme funkciu $f(x) = \left(n^2-1\right)\left(2x^2h^2-2x^3h+x^4\right)+n^2\left(h^4-2xh^3\right)$. Teraz sa budeme pozerať, ako sa mení znamienko tejto funkcie na nejakom intervale.

Ak sa totiž zmení znamienko na našom intervale, určite tam bude ležať koreň.[1] Celá myšlienka je založená na rozumnom zmenšení tohto intervalu, napríklad tak, aby sa hodnoty x vypočítané zo začiatočného a konečného bodu intervalu príliš nelíšili.

- Na začiatku si tipneme, v akom intervale $[l; r]$ bude ležať riešenie. V našom prípade to je ľahké, riešenie určite leží medzi 0 a $h = 2$ m (prvotný tip).

[1] Toto tvrdenie v skutočnosti platí iba pre spojité funkcie – také, ktorých graf sa dá „nakresliť jedným ťahom".

- Následne sa pozrieme na hodnotu funkcie $f(x)$ v bode $\alpha = \frac{l+r}{2}$. Podľa toho, aké je znamienko funkcie v tomto bode, si v ďalšom kroku zoberieme znovu taký interval, na ktorom sa mení znamienko funkcie. Čiže zmeníme buď l alebo r na terajší stred.
- Postup opakujeme, pokiaľ interval nie je dostatočne malý, v našom prípade pokiaľ sa vypočítané hodnoty x nelíšia viac ako na prvom desatinnom mieste.

Po niekoľkých iteráciách sa dostaneme k hodnote $x = 1{,}18$ m, čomu zodpovedá hodnota H v intervale od 2,8 m po 3,0 m (v závislosti od toho, ako presne zaokrúhlime v priebežných výpočtoch).

Fermatov princíp

Ako nájsť riešenie inak? Môžeme skúsiť využiť Fermatov princíp, teda fakt, že svetlo sa šíri po dráhe, ktorú prejde za extremálny čas. V tom prípade chceme optimalizovať čas, za ktorý prejde svetlo nasledujúcu spomínanú dráhu, čiže funkciu

$$t(x) = \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{n}{c}\sqrt{(h-x)^2 + h^2}.$$

Tu nám pomôže skúsiť si načrtnúť graf, resp. vypočítať si hodnotu funkcie $\frac{1}{c}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{n}{c}\sqrt{(h-x)^2 + h^2}$ v intervale $x \in [0\text{ m}; 2\text{ m}]$ každých 0,2 m, nájsť interval, kde je čas najmenší a potom postup zopakovať na tomto intervale. Po troche práce sa opäť dostaneme k hodnote $x = 1{,}18$ m, čomu zodpovedá hodnota H v intervale od 2,8 m po 3,0 m (v závislosti od toho, ako presne zaokrúhlime v priebežných výpočtoch).

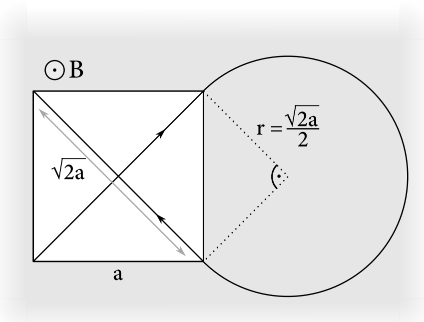
29 Najmenší tok svetla, ktorý Jano ešte rozozná, vieme určiť z údajov o žiarovke:

$$F_{\min} = \frac{0{,}04 \cdot 100\ \mathrm{W}}{4\pi\,(100\,000\ \mathrm{m})^2} = \frac{1}{\pi} \times 10^{-10}\ \mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Solárna konštanta $F_\odot$ udáva tok slnečnej energie vo vzdialenosti $R_\oplus = 1\ \mathrm{AU} \doteq 1{,}5 \times 10^{11}\ \mathrm{m} \doteq 4{,}86 \times 10^{-6}$ pc. Výkon viditeľného slnečného žiarenia je potom $0{,}36 \cdot F_\odot 4\pi R_\oplus^2$, čiže tok viditeľného svetla zo Slnka vo vzdialenosti D je $F = 0{,}36 \cdot F_\odot \frac{R_\oplus^2}{D^2}$. My hľadáme presne takú vzdialenosť, kedy tento tok bude rovný práve $F_{\min}$. Jednoduchým výpočtom zistíme, že je to približne 19 pc.

30 Vieme, že nabité častice v homogénnom magnetickom poli opisujú kruhové dráhy. Z rovnosti dostredivej a magnetickej sily dostávame polomer ich dráhy $r = \frac{mv}{QB}$, kde m je hmotnosť a v rýchlosť pohybu častice.

Uhlopriečky štvorca so stranami dĺžky a museli byť dotyčnicami ku kruhovej trajektórii častice, teda jej polomer je $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ ako na obrázku.



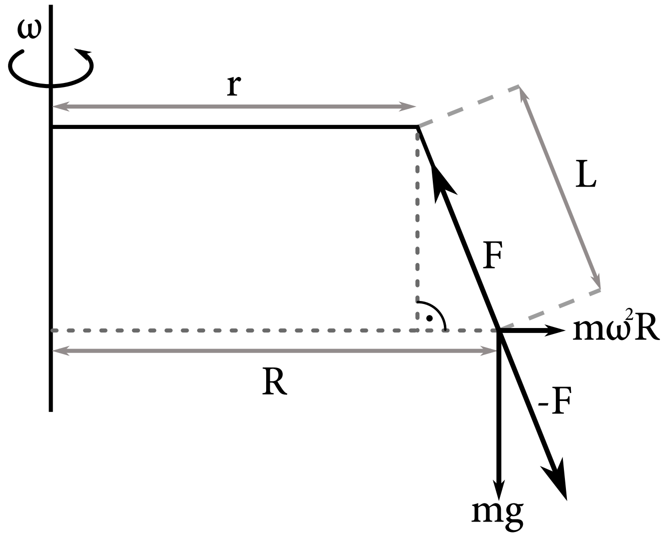
Obrázek 17: *Trajektória častice*

Čas t dáva do súvisu rýchlosť a dĺžku uhlopriečky $\sqrt{2}a$: $v = \frac{\sqrt{2}a}{t}$. Po dosadení dostávame

$$m = \frac{QBr}{v} = \frac{QB\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{\sqrt{2}a}{t}} = \frac{QBt}{2}.$$

$\boxed{31}$ V hraničnom prípade musí blcha použiť svoju plnú silu F na vykompenzovanie pôsobenia síl v rotujúcej sústave, t. j. odstredivej a gravitačnej sily. Vladko sa musí nachádzať v podobnej silovej rovnováhe, i keď na rozdiel od blchy má na nesenie svojho bremena reťaz. To nám zaručuje rovnosť pomerov (je to podobnosť pomyselných trojuholníkov, viď obrázok)

$$\frac{R-r}{L} = \frac{m\omega^2 R}{F}.$$



Obrázek 18: *Situácia so zakreslenými pôsobiacimi silami*

Zároveň vďaka kolmosti odstredivej a gravitačnej sily platí

$$m\omega^2 R = \sqrt{F^2 - m^2 g^2}.$$

To nám umožňuje odstrániť z prvej rovnice všetky R, čím dostávame

$$\frac{\frac{\sqrt{F^2-m^2g^2}}{m\omega^2} - r}{L} = \frac{\sqrt{F^2 - m^2 g^2}}{F}.$$

Ostáva nám málo slastný, ale konceptom nenáročný úkon vyjadrenia hraničnej uhlovej rýchlosti, čo vyústi do výsledku, ktorého jeden z možných tvarov je

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2} - g^2}}{r + L\sqrt{1 - \frac{m^2 g^2}{F^2}}}}.$$

$\boxed{32}$ Uvedomme si, že ak si má opica udržiavať konštantnú mieru aktivity, musí rozpadnuté atómy draslíka priebežne dopĺňať. Vieme, že jej aktivita je $A = 10^8$ Bq, čo znamená, že každú sekundu príde práve o 10^8

atómov rádioaktívneho draslíka ^{40}K. Tie musí doplniť skonzumovaním banánu. Jeden banán obsahuje $N = \frac{mN_A}{M_m}$ atómov rádioaktívneho draslíka, kde $M_m \approx 40\ \mathrm{gmol^{-1}}$ je molová hmotnosť ^{40}K.

Aby bola opica v stave dynamickej rovnováhy, počet rozpadnutých atómov musí byť rovný počtu prijatých atómov, z čoho vyplýva $A \stackrel{!}{=} fN$, kde f je frekvencia jedenia banánov. Dĺžková rýchlosť jedenia banánov je potom $v = Lf = \frac{LAM_m}{mN_A}$, kde $L = 20$ cm je dĺžka banánu.

Dosadením číselných hodnôt získame výsledok $v \doteq 2{,}2 \times 10^{-11}$ m/s = 22 pm/s.

33 Vieme, že nabitá platňa produkuje homogénne elektrické pole okolo nej s veľkosťou $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ v smere od platne. Pre dve rovnakým nábojom nabité platne sa ale tieto polia presne vyrušia. Výsledná sila pôsobiaca na protóny bude teda nulová. Protóny sa preto po čase dostanú do všetkých bodov priestoru medzi platňami.

34 Na začiatok si pripomeňme, ako je definovaná intenzita zvuku a hladina intenzity zvuku. Pre intenzitu zvuku platí $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, kde P je výkon zdroja a r je vzdialenosť od zdroja. Hladina intenzity zvuku je $L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$, kde I_0 je referenčná hodnota. Čo to pre Kvíka znamená?

Keď Kvík počúva hudbu zo slúchadiel, pravé ucho počuje iba pravé slúchadlo a ľavé ucho iba ľavé slúchadlo. A teda ak zvýši výkon pravého slúchadla, respektíve intenzitu dopadajúcu na pravé ucho, neovplyvní to ľavé ucho. Z toho, že si Kvík musel zosilniť pravé slúchadlo o +3 dB teda vyplýva, že výkon, respektíve intenzita pravého slúchadla, je $10^{\frac{3}{10}}$–krát väčšia ako ľavého. A teda intenzita dopadajúca do pravého ucha je potláčaná faktorom $k = 10^{-\frac{3}{10}} \doteq 0{,}5$.

Pri reproduktoroch je to trochu komplikovanejšie, keďže každé ucho počuje zvuk z oboch reproduktorov. Kvík potrebuje na pravý reproduktor korekciu +13 dB, to znamená, že pomer intenzít, respektíve výkonov, pravého a ľavého reproduktora je $q = 10^{\frac{13}{10}}$. Ak si teraz označíme vzdialenosť reproduktorov ako $2L$ a šírku hlavy ako $2x = 15$ cm, intenzity zvuku vnímané ľavým a pravým uchom sú postupne

$$I_\mathrm{L} = \frac{P}{4\pi (L-x)^2} + \frac{qP}{4\pi (L+x)^2},$$

$$I_\mathrm{R} = k\left(\frac{P}{4\pi (L+x)^2} + \frac{qP}{4\pi (L-x)^2}\right).$$

Výkony reproduktorov a slúchadiel sú však nastavené tak, aby tieto hodnoty boli rovnaké. Odčítaním týchto rovníc dostaneme ľahko riešiteľnú kvadratickú rovnicu pre L:

$$\frac{P - kqP}{4\pi (L-x)^2} = \frac{kP - qP}{4\pi (L+x)^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}} = \frac{L+x}{L-x}.$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť L:

$$L = \frac{1 + \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}}}{1 - \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}}}\, x,$$

$$L = \frac{(1+k)(1-q) + 2\sqrt{(1-kq)(k-q)}}{(k-1)(1+q)}\, x.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame pre vzdialenosť reproduktorov $2L \doteq 79$ cm.

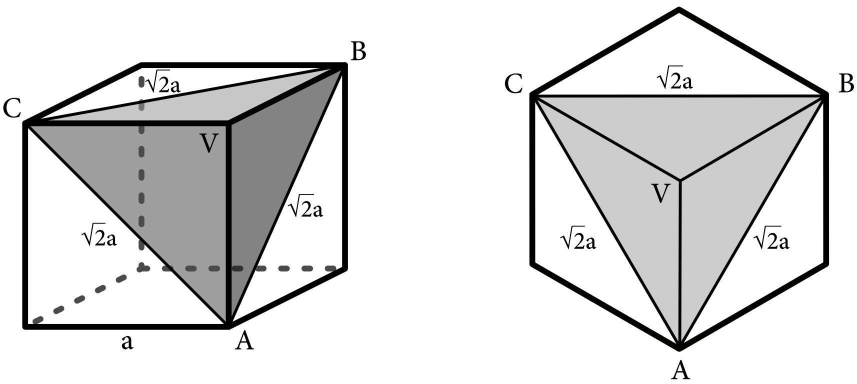
$\boxed{35}$ Označme si pracovne Dušanovu hranu a. Ako sa nám zadanie snaží napovedať, treba sa naňho pozerať ako na dokonale čierne teleso. Takéto teleso pohlcuje všetko žiarenie, ktoré naň dopadá, a pre jeho vyžarovanie platí Stefan-Boltzmannov zákon. Ten hovorí, že celkový výkon žiarenia vyžarovaného na všetkých vlnových dĺžkach je úmerný ploche, cez ktorú vyžarovanie prebieha, a štvrtej mocnine teploty telesa.

V stave tepelnej rovnováhy musí platiť, že výkon žiarenia dopadajúceho zo Slnka musí byť rovný výkonu, ktorý Dušan vyžiari. Nech je natočený akokoľvek, vyžaruje vždy rovnaký výkon – vyžarovanie totiž prebieha cez celú plochu plášťa kocky. Celkový vyžiarený výkon tepelného žiarenia je preto $\sigma 6a^2T^4$, kde σ je Stefan-Boltzmannova konštanta a T je povrchová teplota kocky.

To, či dosiahne malú alebo veľkú teplotu, je dané tým, koľko žiarenia zo Slnka naňho dopadne. Množstvo žiarenia je úmerné ploche priemetu kocky pri pohľade zo Slnka, ktorú označíme S. Teplotu, na ktorej sa Dušan ustáli v stave termodynamickej rovnováhy, potom nájdeme jednoducho položením absorbovaného a vyžiareného výkonu do rovnosti. Nech F je tok[2] žiarenia zo Slnka. Potom

$$FS = \sigma 6a^2T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{FS}{\sigma 6a^2}}.$$

Najmenšiu možnú plochu zjavne dosiahneme, ak sa Dušan natočí tak, že jedna jeho stena je kolmá na spojnicu jeho stredu a Slnka. Potom je jeho priemetom štvorec s hranou a, čomu prislúcha plocha a^2.



Obrázek 19: *Kocka natočená k Slnku najväčšou možnou plochou*

Najväčšiu možnú plochu priemetu dosiahneme, ak kocku natočíme smerom k Slnku jednou z telesových uhlopriečok. Inak povedané, rovina daná bodmi A, B a C je kolmá na spojnicu stredu kocky a Slnka. Vtedy kocku zo Slnka vidíme ako pravidelný šesťuholník, ktorému je vpísaný rovnostranný trojuholník A, B a C s hranou $\sqrt{2}a$.

Obsah pravidelného šesťuholníka je rovný dvojnásobku obsahu vpísaného rovnostranného trojuholníka (pozri obrázok). Pomocou trochy geometrie a Pytagorovej vety zistíme, že výška nášho rovnostranného trojuholníka je rovná $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a$. Obsah trojuholníka je potom rovný $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a\right)\sqrt{2}a$ a obsah šesťuholníka je $\sqrt{3}a^2$.

[2] výkon žiarenia na jednotku plochy

Najmenšia a najväčšia teplota, ktorú môže Dušan dosiahnuť, je teda

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{Fa^2}{\sigma 6a^2}},$$

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{F\sqrt{3}a^2}{\sigma 6a^2}}.$$

Odtiaľ

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \sqrt[8]{3}.$$

Poznámka k ploche priemetu kocky

Punktičkársky čitateľ akiste zatúžil po dôkaze, že plocha priemetu kocky naozaj nadobúda minimálnu hodnotu pri natočení stenou a maximálnu hodnotu pri natočení k zdroju telesovou uhlopriečkou.

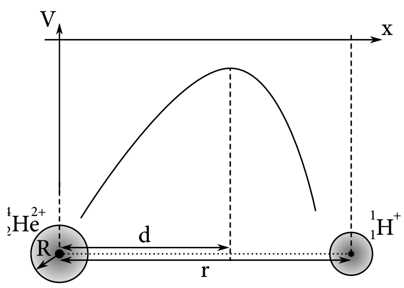
Priemet jednej steny kocky – čiže štvorca – jednotkovej veľkosti môžeme vyjadriť ako skalárny súčin jednotkového normálového vektora a jednotkového vektora v smere projekčného lúča. Z ľubovoľného smeru môžeme naraz vidieť najviac tri steny kocky, ktorých normálové vektory sú na seba kolmé (označme ich $\hat{x}$, $\hat{y}$ a $\hat{z}$). Celková plocha priemetu pri pohľade zo všeobecného smeru (x, y, z) bude súčtom priemetov jednotlivých stien a jej veľkosť bude

$$(|x|, |y|, |z|) \cdot (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) = |x| + |y| + |z|.$$

Zo symetrie kocky by sme mali vidieť, že stačí uvažovať ľubovoľný oktant, napríklad prvý (kde rovno platí $x, y, z > 0$). Pôvodnú úlohu teda dokážeme previesť na hľadanie minima, resp. maxima funkcie $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ za podmienky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, keďže veľkosť nášho vektora (x, y, z) musí byť rovná jednej. Táto funkcia dosahuje

- minimum, keď je jedna zo súradníc rovná 1 a zvyšné dve súradnice sú rovné nule, čo zodpovedá pohľadu kolmo na niektorú stenu
- maximum pre $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$, čo zodpovedá pohľadu pozdĺž telesovej uhlopriečky.

36 Elektrón v blízkosti jadra hélia sa nachádza v potenciálovej jame. V okolí protónu sa taktiež nachádza potenciálová jama. Zaujíma nás, akú najmenšiu energiu musí mať elektrón, aby unikol z potenciálovej jamy hélia, t. j. aby prekonal potenciálovú bariéru medzi jamami.



Obrázek 20: *Priebeh potenciálu*

Ako prvé si zrátajme polohu maxima potenciálovej bariéry d. V momente, keď ho elektrón dosiahne, je naň výsledná pôsobiaca sila nulová, teda elektrostatická sila od hélia je rovná elektrostatickej sile od protónu. Matematicky vyjadrené

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{d^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(r-d)^2}.$$

Odtiaľ dostávame polohu maxima

$$d=\left(2-\sqrt{2}\right)r.$$

Nájdime teraz priebeh potenciálu na spojnici jadra hélia a protónu. Nech x označuje vzdialenosť od stredu jadra hélia. Potom výsledný potenciál je superpozíciou potenciálov od jadra a protónu

$$V(x)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e}{x}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r-x}=-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2r-x}{x(r-x)}.$$

Konečne môžeme určiť energiu, ktorú musí mať elektrón, aby unikol z dosahu jadra, ako rozdiel potenciálnej energie elektrónu na vrchole potenciálovej bariéry a potenciálnej energie na povrchu jadra,

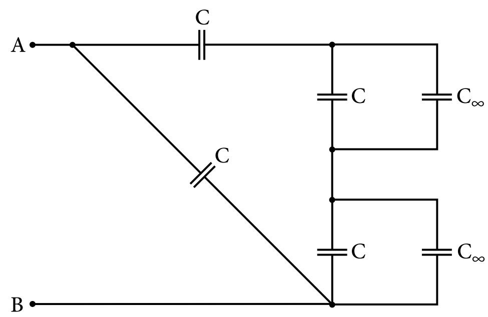
$$E=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2r-R}{R(r-R)}-\frac{\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)r}\right).$$

S využitím $r=11R$ dostávame

$$E=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{201-20\sqrt{2}}{110R}\right).$$

$\boxed{37}$ Nekonečne veľa kondenzátorov by na prvý pohľad mohlo vyzerať na nekonečne veľa práce, no stačí si uvedomiť pár vecí a riešenie tohto príkladu sa výrazne zjednoduší. Jednak Kvík v každom kroku pripájal do obvodu rovnakú súčiastku zloženú zo štyroch kondenzátorov, dvak Kvíkovu nekonečnú schému vieme zložiť z dvoch ďalších nekonečných schém, ktoré pripojíme k základnej súčiastke. Čaro nekonečien. Ak sa vám to nezdá, skúste chvíľku kontemplovať a možno vás osvieti.

Ak si označíme výslednú kapacitu schémy C_∞, vieme si ju prekresliť nasledovne:



Obrázek 21: *Prekreslená schéma*

To už máme iba sériové a paralelné zapojenia kondenzátorov. Kapacity paralelných kondenzátorov sa sčítavajú a pri sériovo zapojených kondenzátoroch sa sčítavajú ich prevrátené hodnoty. Dostaneme teda rovnicu

$$C_\infty=\frac{C^2+CC_\infty}{3C+C_\infty}+C.$$

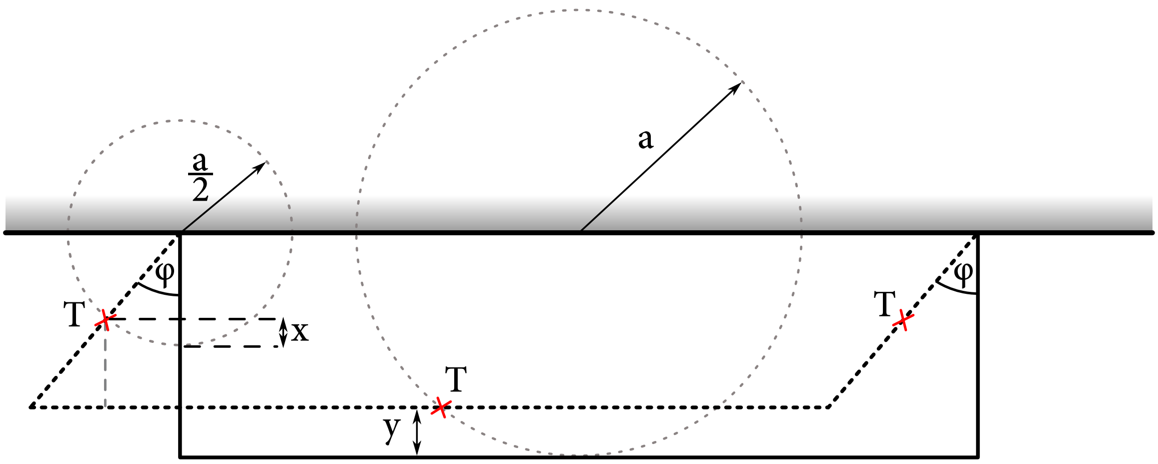
Po úprave a vyriešení kvadratickej rovnice pre C_∞ dostaneme

$$C_\infty = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 16C^2}}{2}.$$

Keďže výsledná kapacita nemôže byť záporná, správny výsledok je

$$C_\infty = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} C.$$

38 Nato, aby sme vypočítali periódu malých kmitov rámčeka, je potrebné popísať pohyb jednotlivých častí rámčeka, respektíve pohyb ich ťažísk. Krátke tyčky dĺžky a zavesené na stene budú vykonávať otáčavý pohyb okolo ich závesov, a teda aj ich ťažiská sa budú pohybovať po kružniciach s polomerom $\frac{a}{2}$. Ťažisko tyče dĺžky b sa bude pohybovať po kružnici s polomerom a ako na obrázku.



Obrázek 22: *Vychýlená sústava. Uhol φ je kvôli prehľadnosti prehnaný.*

Počítať všetky sily a momenty síl je v takomto prípade veľmi náročné, preto periódu kmitov vypočítame pomocou energií. Začneme kinetickou energiou. Moment zotrvačnosti tyče dĺžky l okolo konca je vo všeobecnosti $\frac{1}{3}ml^2$, čiže kinetická energia krátkej tyčky je

$$E^a_{kin} = \frac{1}{2} I_a \omega^2 = \frac{1}{6} \lambda a^3 \omega^2,$$

kde ω je uhlová rýchlosť tyčiek. Počítať otáčavý pohyb dlhej tyče, by bolo neskutočne komplikované, no stačí si uvedomiť, že všetky kúsky dlhej tyče sa musia pohybovať rovnakou rýchlosťou a to takou, aká je obvodová rýchlosť koncov krátkych tyčiek. Čiže kinetická energia dlhej tyče je

$$E^b_{kin} = \frac{1}{2} m_b v^2 = \frac{1}{2} \lambda b a^2 \omega^2,$$

a teda celková kinetická energia rámčeka je

$$E_{kin} = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right) \lambda a^2 \omega^2.$$

Zostáva ešte potenciálna energia, respektíve zmena potenciálnej energie pri vychýlení o uhol φ. Ťažisko krátkych tyčiek sa zdvihne o $x = \frac{a}{2}(1-\cos\varphi)$ a dlhej tyče o $y = a\,(1-\cos\varphi)$. To znamená, že celková potenciálna energia rámčeka je pri vychýlení o uhol φ

$$E_{pot} = 2\lambda a\, gx + \lambda bgy = \lambda a(a+b)g(1-\cos\varphi).$$

Tento výsledok však nie je finálny. Pri malých kmitoch oscilátora sme zvyknutí, že potenciálna energia závisí kvadraticky od výchylky, vďaka čomu dostávame jednoducho riešiteľné rovnice. Preto aj v tomto prípade urobíme Taylorov rozvoj $1-\cos\varphi$ do druhého rádu okolo minima a dostaneme

$$E_{pot} \approx \lambda a(a+b)g\frac{\varphi^2}{2}.$$

Teraz by sme mohli z týchto energií odvodiť pohybové rovnice, no stačí si všimnúť, že fyzikálne kyvadlo vykonáva harmonické kmity, preto možno využiť analógiu s harmonickým oscilátorom. Pre harmonický oscilátor platí $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$, $E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$ a perióda oscilátora je $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Analogicky teda nájdeme vzťah pre periódu hojdačky pomocou prísušných výrazov stojacich vo vyjadreniach energií pred ω^2, resp. φ^2. Dostávame

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\lambda a^2}{\frac{1}{2}\lambda a\,(a+b)\,g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}a+b\right)a}{(a+b)\,g}}.$$

39 Uvažujme planétu hmotnosti M a jej mesiac hmotnosti $m = \frac{M}{10}$ vo vzájomnej vzdialenosti R. Hmotnosti týchto dvoch objektov sú porovnateľné, preto musíme uvažovať, že obiehajú okolo spoločného ťažiska.

Ako prvé si nájdime vzdialenosti objektov od ťažiska. Označme vzdialenosť mesiaca od ťažiska r. Potom

$$r = \frac{M}{M+m}R, \quad R-r = \frac{m}{M+m}R.$$

Teraz nájdime rýchlosti planéty a mesiaca. Z rovnosti dostredivej a gravitačnej sily pre mesiac dostávame

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_0^2}{r} \qquad \longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{G}{R\,(M+m)}}M$$

a pre planétu

$$G\frac{Mm}{R^2} = M\frac{V_0^2}{R-r} \qquad \longrightarrow \qquad V_0 = \sqrt{\frac{G}{R\,(M+m)}}m.$$

Teraz príde Gandalf a zmení hmotnosť planéty, pričom jej rýchlosť zostáva nezmenená. Máme teda planétu hmotnosti M' pohybujúcu sa rýchlosťou V_0 a mesiac hmotnosti m pohybujúci sa opačným smerom rýchlosťou v_0. Energia tejto sústavy je

$$E = \frac{1}{2}M'V_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M'm}{R} = \frac{1}{2}M'\frac{Gm^2}{R\,(M+m)} + \frac{1}{2}m\frac{GM^2}{R\,(M+m)} - G\frac{M'm}{R}.$$

Pozrime sa na sústavu ako na jeden celok. Keďže na ňu nepôsobia vonkajšie sily, musí sa zachovávať hybnosť sústavy, čo implikuje, že rýchlosť pohybu ťažiska sa nemení. Nájdime teda rýchlosť pohybu ťažiska

$$v_T = \frac{mv_0 - M'V_0}{M'+m} = \sqrt{\frac{G}{R\,(M+m)}}\frac{m\,(M-M')}{M'+m}.$$

Teraz sa zamyslime, čo je podmienkou uniknutia mesiaca z dosahu gravitačného pôsobenia planéty. Štandardne sa požaduje, ak uvažujeme nehybnú planétu, aby kinetická energia mesiaca v nekonečne bola nulová. Ak však máme hýbucu sa planétu a mesiac zastane, kvôli pohybu planéty sa bude meniť potenciálna energia sústavy, takže zastavenie mesiaca nebude zodpovedať minimu energie a mesiac začne opäť zrýchľovať. Podmienkou uniknutia mesiaca musí teda byť, aby v nekonečnej vzdialenosti boli rýchlosti mesiaca a planéty rovnaké. Potenciálna energia pri nekonečnej vzájomnej vzdialenosti bude nulová, takže sústava bude mať iba kinetickú energiu. Vieme však, že rýchlosť ťažiska sa nemá meniť, preto je energia sústavy

$$E = \frac{1}{2}\left(M' + m\right) v_T^2 = \frac{Gm^2\left(M - M'\right)^2}{2R\left(M + m\right)\left(M' + m\right)}.$$

Zo zákona zachovania energie platí

$$\frac{1}{2}M'\frac{Gm^2}{R\left(M+m\right)} + \frac{1}{2}m\frac{GM^2}{R\left(M+m\right)} - G\frac{M'm}{R} = \frac{Gm^2\left(M - M'\right)^2}{2R\left(M + m\right)\left(M' + m\right)}.$$

Odtiaľ sa postupnými úpravami dostaneme k výsledku

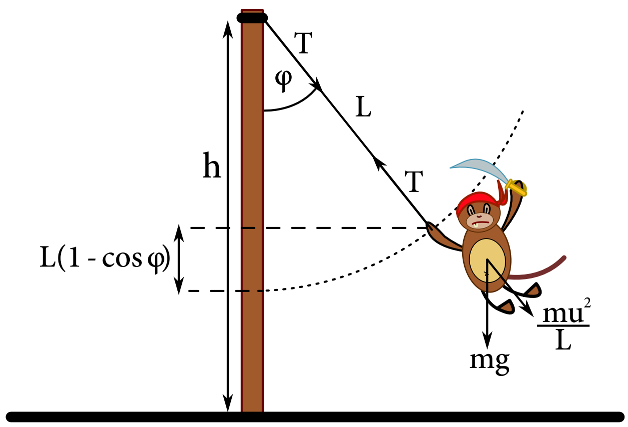
$$M' = \frac{M - m}{2}.$$

Pre $m = \frac{M}{10}$ potom dostávame

$$M' = \frac{9}{20}M.$$

40 Na začiatok sa zamyslime, aká sila pôsobí na sťažeň a snaží sa ho otočiť okolo jeho päty. V mieste upevnenia lana k sťažňu pôsobí napäťová sila lana T. Tá musí v každom okamihu udržať Johnyho na opačnom konci lana na kružnici s polomerom L, preto musí kompenzovať zložku tiažovej sily $mg\cos\varphi$ a celú odstredivú silu (vo vzťažnej sústave spojenej s Johnym) mu^2/L, kde u je aktuálna Johnyho rýchlosť. Preto

$$T = mg\cos\varphi + \frac{mu^2}{L}.$$



Obrázek 23: *Situácia so zakreslenými silami*

Aktuálnu rýchlosť Johnyho určíme zo zákona zachovania energie. Nulovú hladinu potenciálnej energie pre jednoduchosť položíme na miesto, kde lano voľne visí zo sťažňa. Ak vychýlime Johnyho držiaceho sa lana o uhol φ, potenciálna energia sa zvýši o $mgL\left(1-\cos\varphi\right)$. Na začiatku mal potom Johny nulovú potenciálnu energiu a nenulovú kinetickú energiu $mv^2/2$. Zo zákona zachovania energie platí

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + mgL\left(1-\cos\varphi\right),$$

$$mu^2 = mv^2 - 2mgL\left(1-\cos\varphi\right),$$

Moment sily pôsobiaci na pätu sťažňa ako funkcia uhla φ je potom

$$M(\varphi) = Th\sin\varphi = h\left(mg\cos\varphi + \frac{mv^2 - 2mgL\left(1-\cos\varphi\right)}{L}\right)\sin\varphi,$$

$$M(\varphi) = \frac{h}{L}\left(mgL\cos\varphi + mv^2 - 2mgL\left(1-\cos\varphi\right)\right)\sin\varphi,$$

$$M(\varphi) = \frac{h}{L}\left(mv^2 - 2mgL + 3mgL\cos\varphi\right)\sin\varphi.$$

Na to, aby sme našli maximum predchádzajúcej funkcie, sa nevyhneme derivovaniu. Derivovaním predchádzajúcej funkcie získame výraz

$$\frac{\mathrm{d}M(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{h}{L}\left(\left(mv^2 - 2mgL\right)\cos\varphi + 3mgL\left(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right),$$

využitím trigonometrickej identity $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ prepíšeme celú deriváciu tak, že sa v nej nachádzajú iba mocniny $\cos\varphi$,

$$\frac{\mathrm{d}M(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{h}{L}\left(\left(mv^2 - 2mgL\right)\cos\varphi + 3mgL\left(-1 + 2\cos^2\varphi\right)\right),$$

V maxime musí byť prvá derivácia nulová, čím sa dostávame k riešeniu nasledujúcej kvadratickej rovnice pre $\cos\varphi$,

$$\frac{h}{L}\left(\left(mv^2 - 2mgL\right)\cos\varphi - 3mgL + 6mgL\cos^2\varphi\right) = 0,$$

$$\left(v^2 - 2gL\right)\cos\varphi - 3gL + 6gL\cos^2\varphi = 0.$$

Jej riešením získame dve riešenia

$$\cos\varphi = -\frac{v^2 - 2gL}{12gL}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2 - 2gL}\right)^2}\right).$$

Zo zadania vieme, že opica nemá v okamihu zachytenia sa dostatočnú rýchlosť na to, aby sa prehupla cez vrchol sťažňa, teda platí $v^2 < 2gL$. Uvedomujúc si tento fakt možno riešenia zapísať ako

$$\cos\varphi = \frac{2gL - v^2}{12gL}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2 - 2gL}\right)^2}\right).$$

Ako vidíme, dostali sme dve riešenia. Na to, aby išlo skutočne o maximum, musí byť druhá derivácia pôvodnej funkcie záporná v mieste, kde je prvá derivácia danej funkcie nulová. Po ďalšom zderivovaní a dosadení riešení zistíme, že maximum nastáva pre riešenie so znamienkom plus. Preto je päta sťažňa namáhaná najväčším momentom napäťovej sily pri uhle

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2gL - v^2}{12gL}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2 - 2gL}\right)^2}\right)\right).$$

Výsledok možno zapísať taktiež v tvare

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2gL - v^2}{12gL} + \sqrt{\left(\frac{2gL - v^2}{12gL}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{2gL - v^2}{12gL}}\right).$$

Výsledky

1 Jurkov brat je rýchlejší a predbehne Miškovho o 10 690 nanošestonedelí.

Uznávajte výsledky v intervale [10 401; 10 827] *nanošestonedelí.*

2 32 %

3 36 m

4 $\frac{\rho_i a^3}{\rho_w \pi R^2}$

5 $a + \frac{F}{m}$

6 7 Ω, 12 Ω a 15 Ω. *Uznajte, iba ak sú všetky tri správne.*

7 5570 km

8 $10{,}24\,g = \frac{256}{25}\,g$

9 45°

10 $20\sqrt{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \doteq 35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

11 $\frac{a}{2f}$

12 1764 m

13 0,2 kg

14 $\frac{5\pi}{3\pi+4}$ cm $\doteq$ 1,17 cm

15 $\frac{k_A}{k_A+k_B}n_0$

16 $d\sin\left(\arctan\left(\frac{w}{v}\right)\right) = d\frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}}$

17 14 m

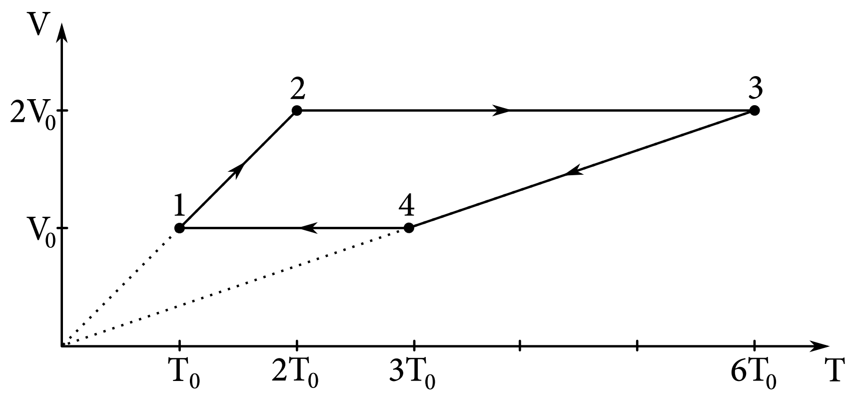
18 Odpor schémy sa môže nachádzať v intervale $\left[\frac{3}{5}R; \frac{5}{3}R\right]$.

19 2158 cm^3. *Uznávajte aj výsledok* 2284 cm^3, *ktorý dostaneme pri použití* g = 9,81 m s^{-2}.

20 $\frac{(m+M)g}{4}$

21 45 Ω

22 *Dbajte na to, aby odovzdané grafy mali vyznačené všetky dôležité hodnoty na osiach, šípky popisujúce priebeh deja mali správny smer a izobary ležali na priamkach prechádzajúcich cez počiatok.*



23 $\sqrt[3]{\frac{M}{N_A\rho}\frac{F}{SE}}$

24 $\frac{1}{2}$

25 $h - \frac{Mg}{2k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k}{Mg}(H-h)}\right) = h - \frac{Mg}{2k} - \sqrt{\left(\frac{Mg}{2k}\right)^2 + \frac{Mg}{k}(H-h)}$

26 $\frac{2+\sqrt{3}}{13}\frac{g}{r} \doteq 0{,}287\frac{g}{r}$

27 $\frac{4+\sqrt{2}}{7}f = \frac{2}{4-\sqrt{2}}f \doteq 0{,}77\,f$

28 *Akceptujte výsledky v rozsahu* 2,8 – 3,0 m.

29 19 pc

30 $\frac{QBt}{2}$

31 $\sqrt{\frac{F}{m}\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2}-g^2}}{rF+L\sqrt{F^2-m^2g^2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2}-g^2}}{r+L\sqrt{1-\frac{m^2g^2}{F^2}}}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{r}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2}-g^2}}+\frac{mL}{F}}}$

32 22 pm/s = 2,2 × 10^{-11} m/s

33 Celý priestor medzi platňami.

34 79 cm

35 $\sqrt[8]{3}$

36 $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{201-20\sqrt{2}}{110R}\right)\doteq 0{,}125\frac{e^2}{\varepsilon_0 R}\doteq\frac{3{,}62\times10^{-28}\ \mathrm{J}}{R}\doteq\frac{2{,}26\ \mathrm{neV}}{R}$

37 $\left(\sqrt{\frac{17}{4}}-\frac{1}{2}\right)C\doteq 1{,}56\ C$

38 $2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}a+b\right)a}{(a+b)g}}=2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)a}{\frac{1}{2}(a+b)g}}$

39 $\frac{9}{20}M$

40 $\arccos\left(\frac{2gL-v^2}{12gL}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2-2gL}\right)^2}\right)\right)=\arccos\left(\frac{2gL-v^2}{12gL}+\sqrt{\left(\frac{v^2-2gL}{12gL}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)$