Milí čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 23. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s ktorými ste sa v roku 2020 mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste niektorému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Táto zbierka by nikdy nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Väčšina z nás sú študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a časť z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom každého polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke `https://fks.sk/`.

V tomto roku poznačila Fyzikálny Náboj pandémia koronavírusu. Z toho dôvodu sa vo všetkých krajinách konal online. Týmto chceme poďakovať FYKOSu, ktorý nám umožnil použiť ich herný systém Fyziklání Online. Špeciálna vďaka patrí Štěpánovi Stenchlákovi a Michalovi Červeňákovi, ktorí zabezpečili Fyzikálny Náboj po technickej stránke.

S prihliadnutím na tieto neľahké podmienky si o to viac ceníme, že sa nám podarilo zorganizovať Náboj vo všetkých krajinách kde doteraz. Za to patrí vďaka lokálnym organizátorom: Daniel Dupkala a Šimon Pajger (Česká republika), Ágnes Kis-Tóth (Maďarsko), Kamil Żmudziński (Poľsko) a Patrik Lamoš (Rusko).

V mene celého organizačného tímu veríme, že ste si v roku 2020 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že sa všetci uvidíme na Náboji o rok už naživo! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov.

Jaroslav Valovčan

hlavný organizátor

Zbierku zostavili:

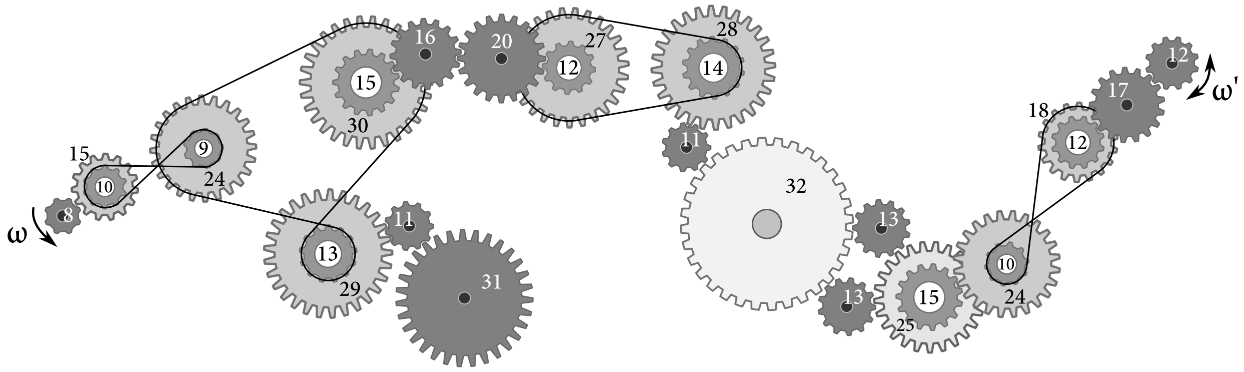
Martin ‚Kvík' Baláž
Ronald ‚Rony' Doboš
Lucia ‚Želé' Gelenekyová
Jakub Hluško
Michal ‚Dvojka' Horanský
Dušan Kavický
Marek ‚M&M' Murin
Justína ‚Plyš' Nováková
Jaroslav Valovčan

Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke `https://physics.naboj.org/`.

Zadania

1 Janíčko má v hlave o koliesko viac. A nie len o jedno. Keď naposledy prišiel na skúšku, začalo mu to v hlave šrotiť, až by ste sa čudovali. Ak sa mu prvé ozubené koliesko otáča uhlovou rýchlosťou ω v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek), akou uhlovou rýchlosťou ω' a akým smerom sa bude otáčať posledné ozubené koliesko?

Odovzdajte pomer uhlovej rýchlosti posledného kolieska k uhlovej rýchlosti prvého kolieska vyjadrený ako desatinné číslo s presnosťou aspoň na dve platné cifry. Dbajte na správnosť znamienka.



2 Krtko si kúpil krásne elektrické hodiny. Ich ručičky sa pohybujú úplne rovnomerne, pričom hodinová ručička je dlhá 5 cm a minútová 12 cm. Krtko si však po príchode domov od samého nadšenia zabudol umyť ruky a keď hodiny vešal na stenu, na samom konci hodinovej ručičky po ňom ostala baktéria Kretéria. Kretérii je na ručičke veľmi dobre a nechce odtiaľ spadnúť.

Aká dostredivá sila na ňu bude pôsobiť, až Krtko hodiny zapne? Kretéria váži 1 pg.

Výsledok odovzdajte v newtonoch s presnosťou aspoň na tri platné cifry.

3 Čajka dostala na nábojovej chate za úlohu navariť. Keďže vyberanie a prepočítavanie príkladov je veľmi namáhavá činnosť, niet divu, že si organizátori zaslúžili výdatný obed s piatimi chodmi. Po dovarení ostalo na platni päť hrncov s vodou s objemami 1, 3, 5, 6 a 7 l a s teplotami postupne 70, 85, 60, 40 a 65 °C.

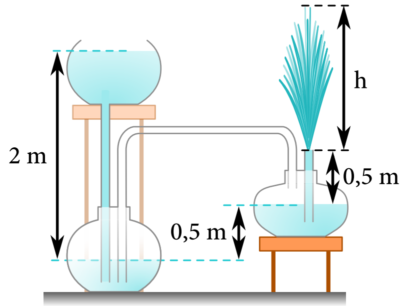
Čajka vie, že vylievať horúcu vodu do výlevky nie je úplne správne. Preto chce zvyšnú vodu najprv zliať do zazátkovaného drezu a až potom vypustiť do odtoku. Pritom sa ale nechceopariť, preto rozmýšľa, v akom poradí by mala hrnce zliať, aby bola výsledná teplota čo najnižšia. Akú najnižšiu vie Čajka vhodnou stratégiou dosiahnuť?

Tepelné straty do okolia neuvažujte. Výsledok uvádzajte v °C zaokrúhlený na celé číslo.

4 Hovorca z Alexandrie sa chcel počas letných horúčav schladiť. Zobral tri nádoby, vzduchotesne do nich popriliepal slamky, nalial do nich studenú vodu a voilà – mal hotovú fontánu.

Teraz ho zaujíma, ako vysoko fontánka dostrekne. Do akej výšky nad koniec slamky bude voda striekať v momente, keď je rozdiel výšok prvých dvoch hladín vody 2 m, druhých dvoch 0,5 m a posledná slamka pretŕča 0,5 m nad vodnú hladinu?

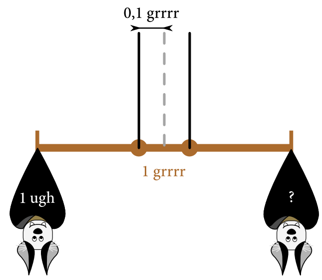
Za starých dobrých čias bývala voda ideálna kvapalina, vzduch ideálny plyn a trenie bývalo nulové. Výsledok udávajte v metroch s presnosťou na dve platné cifry.



5 Rony sa nasťahoval do novej jaskyne. Keďže tam bola tak trochu tma, namontoval si do nej pravekú kostenú lampu. Tá má tvar tyče dĺžky 1 grrrr a je zavesená na dvoch lankách pripevnených vo vzdialenosti 0,1 grrrr od stredu.

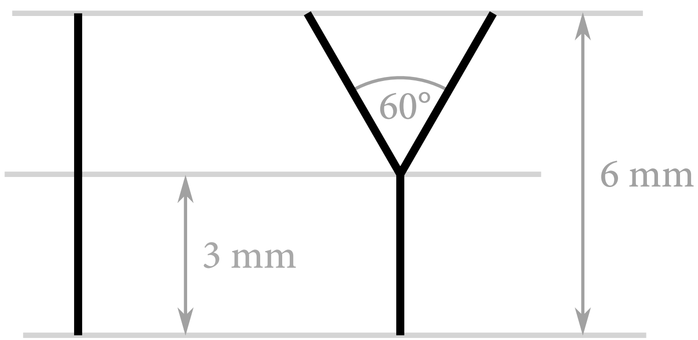
V jaskyni s ním bývajú aj jeho dva domáce netopiere. Cez deň spia a lampu využívajú ako bidielko. Na jeden koniec tyče si sadol netopier s hmotnosťou 1 ugh. Potom si na opačný koniec prisadol druhý netopier. V akom rozsahu hodnôt môže byť jeho hmotnosť, aby lampa zostala visieť vo vodorovnej polohe?

Odovzdajte veľkosť tohto rozsahu, t. j. rozdiel najväčšej a najmenšej možnej hmotnosti, v dobových jednotkách ugh s presnosťou aspoň na dve platné cifry.



6 O Krtkovy je známe, že z gramatykov je veľkí kamarát ňeňy. Naposľedi napýsal na začjatku veti „Y“ namjesto „I“. O kolko sa posunulo ťažysko tochto sinbolu vo svyslom smere kôly tejto hrúpke?

Dolná paľyčka „Y“ je dlhá 3 mm, horné paľyčke zvjerajú uhol 60° a oba pýsmenká sa visoké 6 mm. Atrament je naňesení rovno merňe. Vísľedok vijadryťe v myľymetroch z presnosťov aspom na jedno ďesaťyné mjesto.



7 Bubu sa občas zvykne plaviť po Dunaji z Bratislavy až do Viedne. Cesta proti prúdu trvá modernej lodi 90 minút, naspäť po prúde len 75 minút. Terka zvyčajne tiež cestuje z Bratislavy, ale len do Devína. Staručkej lodi to proti prúdu trvá takisto 90 minút, naspäť po prúde to zvládne už za 30 minút.

Vzdialenosť medzi Devínom a Bratislavou je 9 km. Ako ďaleko pozdĺž rieky je od Bratislavy Viedeň?

Rýchlosť prúdu Dunaja je v čase aj priestore konštantná. Výsledok udávajte v kilometroch ako celé číslo.

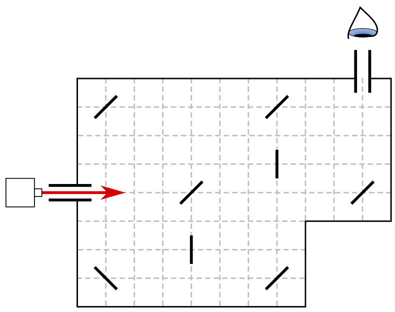
8 Raz za čas Plyš ukuchtí nejakú lakocinku. Tá obvykle máva tvar kvádra s rozmermi $a \times b \times c$. Po vychladnutí ju odloží do chladničky a odíde robiť niečo iné. Kvík lakocinku v chladničke skôr či neskôr objaví a začne ohlodávať. Časom si ale všimol, že ak Plyš zistí, že je z lakocinky odhryzené, okrem obvodu pása sa to negatívne podpíše aj na jeho domácej pohode.

Našťastie Plyš lakocinky kontroluje iba letmým pohľadom do chladničky. Pritom vidí len hornú, prednú a pravú stranu kvádra. Akú najväčšiu časť kvádra môže Kvík jedným rovinným rezom oddeliť a následne spucovať, aby to pri náhodnej kontrole ešte nebolo vidieť?

Výsledok odovzdajte v percentách s presnosťou na aspoň tri platné číslice.

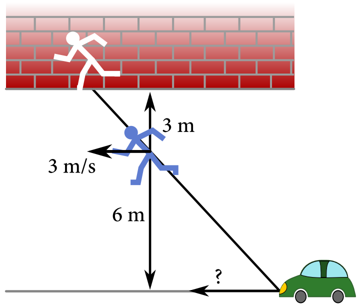
9 Kaja má doma naozaj modernú kuchyňu. Okrem rozličných vymožeností v nej má aj osem otočných zrkadielok a kuchynského robota Hala, ktorý dokáže svojimi sarkastickými poznámkami priviesť väčšinu kuchárov na pokraj zúfalstva. Ak to Hal so svojimi vtipnými poznámkami preženie, Kaja mu občas nasmeruje do oka laser zo svojho hypermoderného krájača na chlieb. O koľko najmenej stupňov musí v súčte Kaja pootáčať zrkadlá, aby lúč zasvietil Halovi rovno do oka?

Zrkadlá sú odrazivé z oboch strán, ich hrúbka je malá a hrany majú potreté čiernou farbou. Nikdy nesvieťte laserom do očí ľuďom ani robotom. Obzvlášť nie sarkastickým a pomstychtivým. Výsledok udávajte v stupňoch s presnosťou na jedno desatinné miesto.



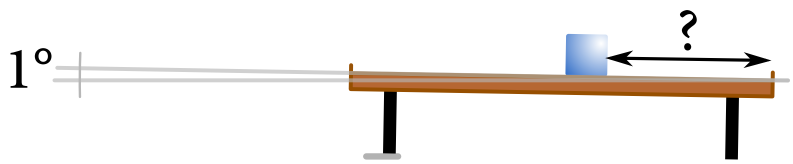
10 Kubo sa rozhodol, že skúsi na olympiáde zabojovať v triatlone. Preto začal každý večer behávať okolo Matfyzu. Raz večer takto bežal rýchlosťou 3 m/s vo vzdialenosti 3 m pozdĺž tehlového múru. Po ceste vzdialenej od neho 6 m ho predbiehalo auto, pričom naňho zasvietilo reflektorom. Kubo si všimol, že svoj vlastný tieň na múriku dobiehal rýchlosťou 1 m/s. Akou rýchlosťou sa pohybovalo auto?

Výsledok uvádzajte v kilometroch za hodinu zaokrúhlený na celé číslo.



11 Dvojka sa cez prázdniny hrozne nudí. Jediné predmety, ktoré mu spríjemňujú teplé letné dni, sú prázdny stôl naklonený pod uhlom 1° a ľadové kocky s hranou dlhou 30 mm. Svojím bystrým okom spozoroval, že na konci stola je maličká obruba. Ako najďalej od tohto konca stola môže Dvojka položiť ľadovú kocku, aby nepreletela cez hranu stola, ak trenie medzi kockou a stolom je zanedbateľné?

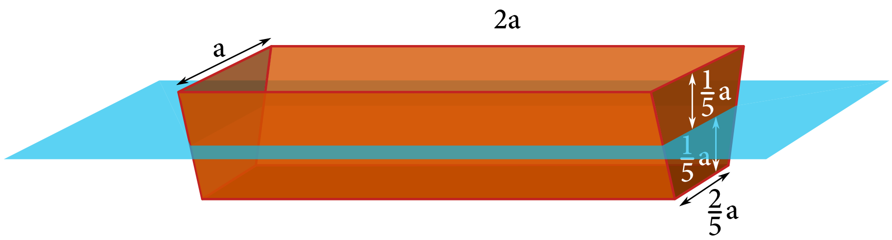
Výsledok vyjadrite v milimetroch s presnosťou na aspoň dve desatinné miesta.



12 Terka na svojich potulkách po južnej Afrike potrebuje prekročiť širokú rieku. Kvôli svojmu relatívne mäkkému zloženiu sa však obáva krokodílov a iných žravých obyvateľov riečnych plytčín. Našťastie neďaleko premáva jednoduchá plechová kompa.

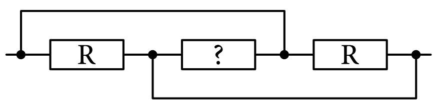
Kompa je vlastne bývalý válov, ktorý má tvar dutého štvorbokého hranola s lichobežníkovou podstavou. Horná stena je otvorená a má rozmery $2a \times a$, dno má rozmery $2a \times \frac{2}{5}a$. Ponor kompy je $\frac{1}{5}a$ a nad hladinu trčí takisto $\frac{1}{5}a$. Aká je plošná hustota plechu, z ktorého je kompa pozváraná?

Úlohu riešte pre $a = 1$ m a výsledok odovzdajte v jednotkách kg/m² s presnosťou na aspoň jedno desatinné miesto.



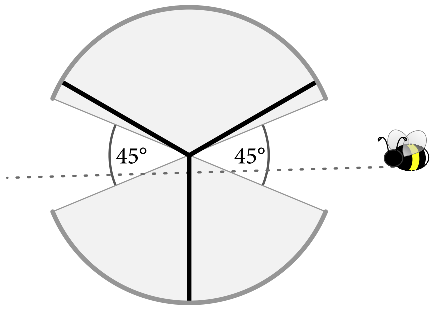
13 Kutil Kubo našiel v dielni dva rezistory s odporom R a niekoľko ideálnych vodičov. Pozapájal ich ako na obrázku a zistil, že by sa mu ešte jeden rezistor zišiel. No keďže ešte nevie, aký rezistor sa mu v hlbinách skrine podarí nájsť, vie spočítať iba interval, v ktorom sa výsledný odpor zapojenia určite bude nachádzať. Nájdite ho aj vy!

Odovzdajte dĺžku tohto intervalu, t. j. rozdiel jeho hornej a dolnej hranice. Uvažujte $R = 1$ kΩ a výsledok odovzdajte v ohmoch zaokrúhlený na celé ohmy.



14 Do nemenovaného švédskeho obchodu s nábytkom letí cez otáčavé dvere čmeliak Bzdušo. Dvere majú tri ramená dĺžky 3 m, otočia sa raz za 15 sekúnd a uhlová veľkosť oboch otvorov je 45°. Ako najrýchlejšie môže čmeliak letieť po priamke, aby prešiel cez dvere?

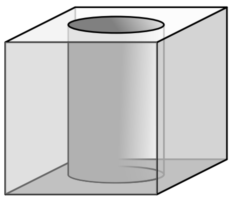
Výsledok udávajte v metroch za sekundu s presnosťou na aspoň tri platné číslice.



15 Jaro si v žartovnom obchode kúpil cukrové kocky. Kocka má stranu dĺžky $4R$ a navyše je v nej valcová diera s polomerom R, pričom jej os spája stredy protiľahlých stien. Keď si hodí jednu takú žartovnú kocku do kávy, kocka sa začne pomaly rozpúšťať, a to tak, že povrch vystavený káve ustupuje v smere normály konštantnou rýchlosťou v.

Ako dlho bude trvať, kým sa celá kocka v káve rozpustí?

Úlohu riešte pre $R = 1$ cm *a* $v = 50$ µm/s *a výsledok uveďte v minútach s presnosťou aspoň na dve platné číslice.*

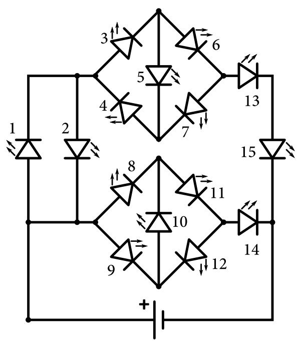


16 Hovorca si vyrába veľký zmrzlinový pohár. Na to si zobral plastovú misku v tvare pologule s polomerom 10 cm a prakticky nulovou hmotnosťou. Predtým ju však musí ešte umyť. Misku položil na dno drezu, nechal do nej napustiť vodu a odišiel. Keď sa vrátil, miska bola napustená až po okraj a priam podozrivo čistá. Ostávalo len vyliať vodu. Akú prácu musí Hovorca vykonať, aby z misky vylial všetku vodu?

Vodu pokladajte za ideálnu kvapalinu. Výsledok odovzdajte v jouloch s presnosťou na aspoň dve platné cifry.

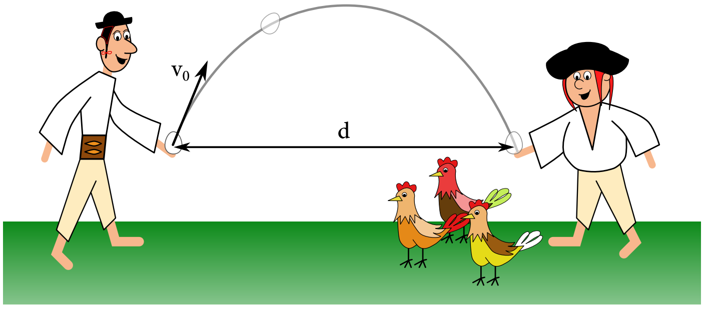
17 Sabinka našla v skrini škatuľku rovnakých svetelných diód. Zostavila si z nich obvod zobrazený na schéme. Následne ho pripojila na zdroj jednosmerného napätia – o dosť vyššieho, než prahové napätie diód, a omnoho nižšieho, než ich prierazné napätie, takže diódy nezhoreli. Ktoré z diód sa rozsvietili?

Odovzdávajte čísla rozsvietených diód vo vzostupnom poradí oddelené čiarkami bez medzier (napríklad `1,2,3,4`*).*



18 Jedného slnečného rána Maťko a Kubko navštívili salaš, na ktorom boli okrem ovečiek aj sliepky. Keďže bača mal plné ruky práce, poprosil ich o pomoc so zberom slepačích vajíčok. Maťko vošiel do kurína a odtiaľ opatrne hádzal vajíčka Kubkovi. Akú najmenšiu rýchlosť môže mať vajce v okamihu, keď ho Kubko chytá, ak od seba stoja vo vzdialenosti d a ich ruky sú v rovnakej výške?

Úlohu riešte pre $d = 4\ \mathrm{m}$ *a výsledok odovzdajte s presnosťou aspoň na tri platné cifry.*



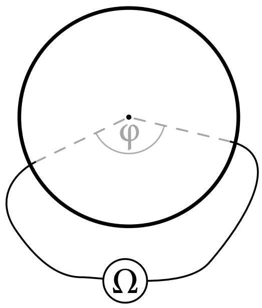
19 V istej starej vedeckofantastickej knižke si americký milionár postavil obrovský luxusný bazén vyhrievaný slnečným svetlom. Jimi by si podobný bazén rád postavil doma. Inžinieri v knihe však všetky miery udávali v dobových jednotkách a Jimi si nie je istý, či jeho bazén bude vôbec možné vyhriať.

Napríklad výkon na jednotku plochy potrebný na ohrev vody udávali v jednotkách *blaze*. Jeden *blaze* znamená, že dokonale čierna nádoba s vodou hlboká 1 palec sa ohreje o 1 °F za 1 hodinu. Koľko *blazeov* má priame, kolmo dopadajúce slnečné svetlo?

Odraz svetla od vodnej hladiny neuvažujte. Vo Fahrenheitovej stupnici voda pri štandardnom tlaku mrzne pri 32 °F a vrie pri 212 °F. Výsledok odovzdajte zaokrúhlený na celé číslo.

20 Enka dostala od Maťa k narodeninám okrúhly náramok z odporového drôtu s konštantným dĺžkovým odporom. Ako správna fyzička ho ihneď pripojila na ohmmeter. Zistila, že ak elektródy zvierajú uhol 180°, ohmmeter ukazuje odpor R. Pod akým uhlom φ musí Enka pripojiť elektródy na náramok, aby ohmmeter ukázal polovičný odpor?

Odovzdajte menší z dvojice uhlov v stupňoch s presnosťou aspoň na dve desatinné miesta.



21 Plyš opäť ukuchtila voľáku lakocinku v tvare kvádra s rozmermi $a \times b \times c$. Dobre vie, že Kvík ju v chladničke skôr či neskôr objaví a začne ohlodávať. Preto ju občas chodieva skontrolovať, a ak z viditeľných strán nič nechýba, je spokojná.

Kvík už z minulého príkladu vie, ako môže za týchto okolností potajomky odhrýzť čo najviac. Lenže občas mu nestačí ani to. Je však dostatočne prešpekulovaný, aby si uvedomil, že môže plech s lakocinkou nenápadne otočiť tak, aby po otvorení dverí chladničky bolo vidieť iba prednú a hornú stranu kvádra. Akú najväčšiu časť lakocinky môže teraz Kvík jedným rovinným rezom oddeliť a spucovať bez toho, aby si to Plyš pri kontrole všimla?

Výsledok odovzdajte v percentách zaokrúhlený na aspoň tri platné číslice.

22 Vĺčik Andrej striehne za ohradou pri salaši na ovce. Aby mu náhodou neušli, pripravil si novú stratégiu, na ktorú ovce ešte nedorástli. Miesto toho, aby bežal priamo k stojacej ovci, bude sa k nej blížiť tak, aby uhol φ medzi smerom jeho pohybu a smerom priamo k ovci bol vždy konštantný ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$). A aby ovcu úplne poplietol, bude k tomu ešte aj zrýchľovať s konštantnou zložkou zrýchlenia v smere dotyčnice s veľkosťou a.

Ako dlho mu potrvá dobehnúť k ovci, ak od nej na začiatku pohybu stojí vo vzdialenosti d?

Úlohu riešte pre $\varphi = 60°$, $a = 0{,}2\ \mathrm{m/s^2}$ *a* $d = 20\ \mathrm{m}$. *Výsledok odovzdajte v celých sekundách.*

23 Pračlovek Adam vyrástol až tak, že sa nezmestí do rodičovskej jaskyne a musí si nájsť novú. Realitný agent ho priviedol do peknej novej jaskyne, ktorá je však zatiaľ nezariadená, a teda úplne tmavá. Aby zistil jej výšku, vytiahne z vrecka skákalku. Keď ju pustí na zem, počuje odrazy s frekvenciou 0,8 Hz. Keď ju z tej istej výšky naopak hodí dohora rýchlosťou 5 m/s, odrazy počuje s frekvenciou 2,5 Hz.

Adam spokojne skonštatuje, že teraz už vie, aká vysoká je jaskyňa. Zistite to aj vy!

Dobové zdroje tvrdia, že rýchlosť zvuku bola v praveku prakticky nekonečná a netreba s ňou počítať. Výsledok odovzdajte v metroch s presnosťou na aspoň tri platné cifry.

24 Pri natáčaní filmu použil štáb kamery so snímkovacou frekvenciou 24 a 25 snímok za sekundu. Na pomalšej kamere sa zdá, že sa koleso otočí raz za $\frac{5}{8}$ sekundy, na druhej raz za $\frac{1}{2}$ sekundy. Okrem toho, že sa uhlová rýchlosť otáčania na jednotlivých kamerách zdá byť rôzna, štáb udivilo, že sa zdanlivý smer otáčania na zázname môže meniť. Aká najmenšia môže byť skutočná uhlová rýchlosť kolesa, ak má päť spíc?

Výsledok uveďte v radiánoch za sekundu s presnosťou aspoň na jedno desatinné miesto.

25 Tinka už dva týždne polihuje kdesi v trópoch s koktejlom v ruke, každodenne sa kúpe v mori a občas kľaje na otravné moskyty. Pritom si navyše všimla, že ponad jej súkromnú pláž každú noc raz za 24 hodín pomaly prelieta ten istý satelit. Ako vysoko nad povrchom sa nachádza, ak vieme, že jeho dráha má tvar kružnice?

Výsledok udávajte v celých kilometroch.

26 Zdenka si z výletu po Ukrajine priniesla kilogramové balenie rádioaktívneho uhlíka ^{14}C. Uhlík sa postupne premieňa na dusík β-rozpadom ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^- + \bar{\nu}_e$ s polčasom premeny 5730 rokov. Ako dlho priemerne potrvá, kým sa všetky atómy uhlíka premenia na dusík ^{14}N?

Výsledok udávajte v rokoch. Uznané budú výsledky líšiace sa od presného riešenia najviac o jeden polčas premeny uhlíka ^{14}C.

27 Helboj vyhrabal vo svojej pekelnej dielni vzduchový kompresor s objemom 10 litrov. Natlakoval ho na 5 atmosfér, čím sa vzduch vo vnútri zahrial, a odišiel pohľadať niečo, čo by ním mohol nafúknuť. Po dlhom čase našiel balón vyrobený z materiálu, ktorého elastická energia je úmerná povrchu s konštantou $\sigma = 200\ \mathrm{N/m}$. Medzitým vzduch v kompresore stihol vychladnúť.

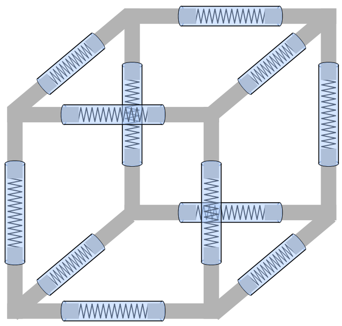
Helboj pripevnil balón na kompresor a uvoľnil ventil. Keď sa tlaky vyrovnali, balón odpojil, zaviazal ho tak, aby neunikol žiaden vzduch… a práve vtedy ho odvolali za ďalšími pekelnými povinnosťami. Aký polomer mal balón po ustálení?

Uvažujte, že vzduch je tvorený dvojatómovými molekulami. Okolitý vzduch má štandardný atmosférický tlak. Výsledok uveďte v centimetroch. Uznané budú odpovede líšiace sa od presného riešenia najviac o 1 mm. Pri riešení sa nebojte použiť kalkulačku.

28 Železiarom sa dnes už môže stať naozaj ktokoľvek. Želé s Jarom si takisto otvorili obchod a hneď začali ponúkať všakovaké kovové výrobky. Napríklad takúto vysoko užitočnú teleskopickú kocku.

V strede každej hrany je pružinka s tuhosťou k. Hrany sú teleskopické, môžu sa teda predlžovať, ale nikdy nie ohýbať – kocka teda vždy ostáva kockou. Aká je tuhosť tohoto zázraku moderného inžinierstva, ak ho napíname pozdĺž jednej z jeho telesových uhlopriečok?

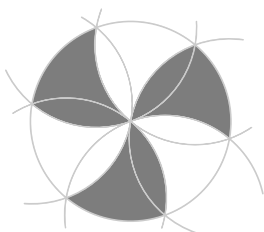
Odovzdajte podiel hľadanej tuhosti kocky a tuhosti jednej pružinky s presnosťou na aspoň dve platné cifry.



29 Majo si počas letných horúčav otvoril dielničku, kde skladá ventilátory. Nie je to však úplne jednoduché: ak použije príliš slabý motorček, vrtuľa sa sotva pohne; ak to naopak s motorom preženie, ventilátor po spustení prevracia kontajnery a vytrháva dlažobné kocky z námestia. Preto si radšej najprv všetko poriadne prepočíta.

Pri výrobe svojho najnovšieho modelu zdrapol kus plechu s plošnou hustotou σ a pomocou kružidla naň nakreslil predlohu ako na obrázku. Následne si vystrihol takúto trojlistú vrtuľu s polomerom R. Aký je jej moment zotrvačnosti okolo kolmej osi prechádzajúcej stredom?

Úlohu riešte pre $\sigma = 1\ \mathrm{kg/m^2}$ *a* $R = 10\ \mathrm{cm}$. *Výsledok vyjadrite v jednotkách* $\mathrm{kg\,m^2}$ *s presnosťou aspoň na štyri platné cifry.*



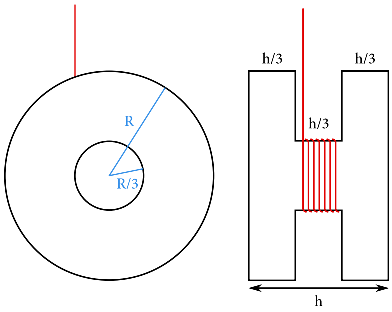
30 Keď sa Syseľ opatrne postaví na váhu, pružina v nej sa stlačí o 5 mm a váha ukáže hodnotu 100 kg. Akú najvyššiu hodnotu ukáže, keď na ňu Syseľ skočí z výšky 10 cm?

Výsledok udávajte v celých kilogramoch.

31 Simon sa z dlhej chvíle zabával s jojom. Po chvíli si uvedomil, že odvíjajúce sa jojo je akési ľahšie, než keby voľne viselo na šnúrke. Koľkokrát ľahšie sa Simonovi zdá byť odvíjajúce sa jojo?

Simonovo jojo je z homogénneho materiálu a pozostáva z dvoch diskov polomeru R a hrúbky $\frac{h}{3}$, spojených menším diskom polomeru $\frac{R}{3}$ a hrúbky taktiež $\frac{h}{3}$, na ktorý sa namotáva lanko.

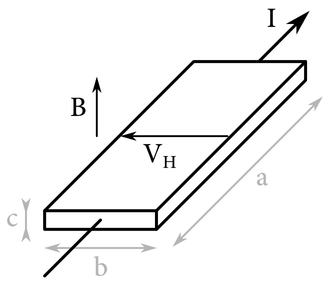
Predpokladajte, že lanko je počas pohybu vo vertikálnej polohe. Výsledok odovzdajte zaokrúhlený na aspoň dve platné cifry.



32 Dušan sa rozhodol investovať svoje celoživotné úspory do zlata. A keďže tie nie sú obzvlášť veľké, vydali mu len na malú tehličku s rozmermi $a \times b \times c$. O to viac ju chcel ochrániť pred zlodejmi. Preto ju zapojil do elektrického obvodu, takže ňou teraz prechádza prúd $\mathbf{I} = (I, 0, 0)$. Keď ju niekto bude chcieť vytiahnuť, jednak dostane ranu prúdom, jednak sa spustí alarm, keď sa obvod preruší.

Z nám neznámych dôvodov sa rozhodol umiestniť ju aj do magnetického poľa $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Faktom však zostáva, že v dôsledku toho sa na nej vytvorilo priečne napätie V v smere osi y. Aké veľké je toto napätie, ak každý atóm zlata v tehličke prispieva k jej vodivosti jedným vodivostným elektrónom?

Úlohu riešte pre tehličku veľkosti $2.5 \times 1.5 \times 0.5$ cm*, magnetické pole veľkosti* $B = 10$ mT *a pretekajúci prúd* $I = 100$ mA*. Výsledok odovzdajte vo voltoch s presnosťou aspoň na tri platné číslice.*



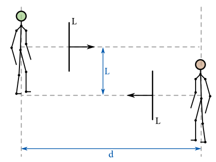
33 Adam si raz omylom miesto utopencov kúpil voľajaké podozrivé špekáčiky v tvrdom plastovom obale. Obalom sa veľmi nechcelo dolu, takže si pomohol vreckovým nožom. Na konci tejto operácie ostal z každého špekáčika len smutne vyzerajúci šesťboký hranol so stranou podstavy a a hmotnosťou m.

Povzbudený týmto úspechom zobral jeden špekáčik, napichol ho na ražeň pozdĺž jeho osi a položil nad pahrebu. Akú prácu vykoná, kým ho roztočí na uhlovú rýchlosť ω?

Uvažujte $a = 2$ cm*,* $m = 100$ g *a frekvenciu otáčania jedno otočenie za sekundu. Výsledok vyjadrite v jouloch s presnosťou aspoň na tri platné číslice.*

34 Rony s Dvojkom vymieňajú anténu na Hubblovom teleskope. Dvojka odpojil starú anténu, čo je iba tenká tyč dĺžky L, a Rony mu v beztiažovom stave hodil zo vzdialenosti d náhradnú anténu, ktorá je s tou prvou identická (akurát funguje).

Ťažiská antén sa proti sebe pohybujú rovnako veľkými rýchlosťami po rovnobežných dráhach vzdialených od seba L. Antény však ako na potvoru obe ležia kolmo na svoje dráhy a ešte k tomu rovnobežne jedna k druhej, a tak nejako sa im akurát podarilo o seba zavadiť končekmi v polovici ich dráh. Koľkokrát dlhšie bude táto výmena antén trvať oproti situácii, keby sa nezrazili?



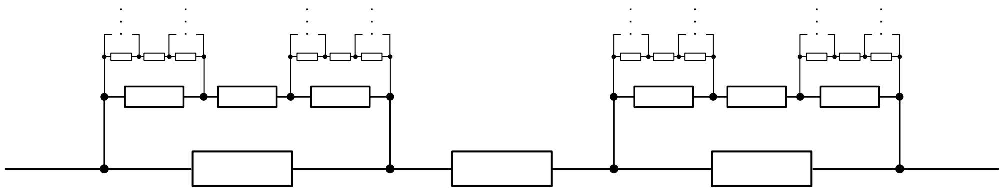
Antény považujte za homogénne a dokonale tuhé a zrážku za dokonale pružnú. Antény pred zrážkou nerotovali. Hmotnosť antén je oproti hmotnostiam astronautov zanedbateľná. Astronauti hádžu aj chytajú antény za ťažisko. Výsledok udávajte s presnosťou na jedno desatinné miesto.

35 Marcel našiel v skrini bezodnú škatuľu plnú rezistorov s odporom R. V rámci prokrastinácie sa rozhodol postaviť si z nich niečo pekné. A keďže jeho nechuť učiť sa bola priam nekonečne veľká, nezastavil sa, kým nepostavil nekonečne rozvetvenú sieť podľa jednoduchých pravidiel:

- sériovo spojil tri rezistory;
- k prvému a poslednému rezistoru paralelne pripojil novú sériu troch rezistorov;
- k prvému a poslednému rezistoru z každej z trojíc pripojil opäť nové trojice sériovo zapojených rezistorov, atď.

Aký bol výsledný odpor Marcelovho zapojenia?

Úlohu riešte pre $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ a výsledok odovzdajte v celých ohmoch.



36 Vierka rada varí, takže si kúpila novú panvicu, úplne podľa najnovších trendov. Panvica má kovové dno a steny z izolantov vysoké 6 cm. Nanešťastie sa predávala bez pokrievky a Vierka teraz musí improvizovať. Zobrala si pokrievku zo svojho starého hrnca, ktorá je úplnou náhodou presne rovnako veľká ako Vierkina nová panvica, preto do nej dokonale zapadla, čím ju hermeticky uzavrela, ale pritom sa v nej mohla voľne pohybovať, čiže z panvice vyrobila piest. Pokrievka je kovová, má plochu 0,1 m^2 a prakticky nulovú hmotnosť.

Vierke však okrem varenia nie je cudzia ani fyzika. Uvedomila si, že takto prikrytá panvica pripomína kondenzátor, a tak dno a pokrievku pripojila na svorky zdroja elektrického napätia 1,5 V. Po zopnutí spínača sa pokrievka mikroskopicky pohla, čím mierne stlačila vzduch v panvici. O koľko stupňov vzrástla teplota vzduchu vo vnútri panvice v dôsledku stlačenia?

Vzduch považujte za ideálny dvojatómový plyn s teplotou 20 °C a štandardným atmosférickým tlakom. Výsledok odovzdajte v °C s presnosťou aspoň na dve platné cifry.

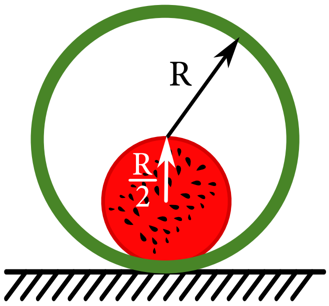
37 Kiko má na záhrade krásny zvnútra postriebrený paraboloid s polomerom 1 m a hĺbkou 50 cm. Namieri ho na Slnko. Na akú najvyššiu teplotu ním za ideálnych podmienok dokáže rozpáliť absolútne čierne teliesko s polomerom 1 mm?

Uvažujte len prenos energie žiarením. Výsledok udávajte v kelvinoch zaokrúhlený na celé číslo.

38 Traktorista Fero sa presťahoval z horného Považia na južné Slovensko a začal tam pestovať melóny. Prišli však obrovské suchá a dužiny melónov sa začali scvrkávať. Momentálne majú melóny pevnú sférickú šupku s hmotnosťou M a polomerom R a vnútri voľne sa pohybujúcu dužinu guľovitého tvaru s hmotnosťou $2M$ a polomerom $\frac{R}{2}$.

Aká je perióda malých kmitov takéhoto melónu okolo rovnovážnej polohy v tiažovom poli? Dužina je na začiatku vychýlená o uhol $\alpha \ll 1$ vzhľadom na stred melóna (t. j. α je uhol, ktorý zviera spojnica stredu melóna s bodom dotyku dužiny a šupky so zvislým smerom) a šupka stojí.

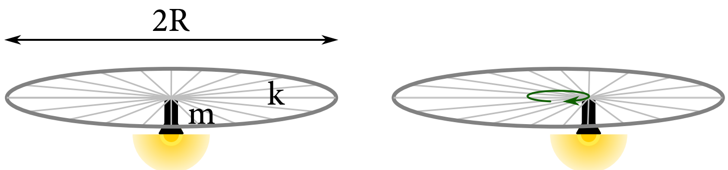
Uvažujte, že dužina vo vnútri melóna a ani melón samotný na zemi nepresmykujú. Riešte pre $M = 1{,}5$ kg *a* $R = 15$ cm. *Výsledok odovzdajte v sekundách zaokrúhlený na aspoň tri platné cifry.*



39 Plyš si konečne vybrala luster do svojej novej obývačky. A nie hocijaký. Pozostával z kovovej obruče s polomerom R a žiarovky s hmotnosťou m upevnenej na obruči veľmi veľkým množstvom N slabučkých pružných vlákien s tuhosťou k a nulovou pokojovou dĺžkou.

Lenže Kvík je veľké deco a čoskoro zistil, že sa s lustrom dá aj výborne zabávať. Podaril sa mu husársky kúsok, keď sa mu podarilo donútiť žiarovku obiehať stred obruče po kružnici s polomerom $r \ll R$ v rovine obruče. Akú obvodovú rýchlosť musel žiarovke udeliť, aby sa mu to podarilo?

Vplyv tiaže neuvažujte. Riešte pre $R = 25$ cm, $m = 100$ g, $N = 10\,000$, $k = 1$ mN/m *a* $r = 5$ cm. *Výsledok vyjadrite v metroch za sekundu s presnosťou na jedno desatinné miesto.*



40 Mystická astrálna entita, v ezoterických kruhoch tiež známa ako Kaťa, bude o chvíľu skladať skúšku z predmetu *Tvorba a osídľovanie svetov II*. Keďže miesto poctivej prípravy na skúšku radšej prenikala do iných dimenzií, nezriadene popíjala s démonmi a zakladala rozličné okultné spolky, teraz sa potí za ušami a tak trochu varí z vody.

Našťastie práve o to na skúške ide: treba vytvoriť planétu z čistej vody, pričom v jej strede musí byť po ustálení hydrostatickej rovnováhy tlak presne 100 kPa. Aký bude jej polomer, než sa začne vyparovať do nekonečnej prázdnoty vesmíru?

Výsledok odovzdajte v kilometroch zaokrúhlený na celé číslo.

Vzorové riešenia

1 Najprv si vysvetlime, čo sa deje v jednotlivých elementoch systému ozubených kolies a pásov.

Keď sú dve ozubené kolesá na jednej oske, ich uhlová rýchlosť je rovnaká. Keď dve susediace ozubené kolesá do seba zapadajú, v bode dotyku musí byť rovnaká obvodová rýchlosť a smer otáčania kolies je navzájom opačný. To znamená, že platí

$$\omega_2 = -\frac{N_1}{N_2}\omega_1,$$

kde ω_i označuje uhlovú rýchlosť kolesa a N_i počet jeho zubov.

Po chvíľke zamyslenia je snáď jasné, že ak je takýchto kolies zapojených viac za sebou, na zistenie uhlovej rýchlosti posledného kolesa stačí poznať iba počet zubov prvého a posledného kolesa a smer jeho otáčania zistíme z párnosti alebo nepárnosti počtu zapojených kolies.

Kolesá spojené pásmi sa správajú veľmi podobne, tiež majú rovnakú obvodovú rýchlosť. To znamená, že pre veľkosť obvodovej rýchlosti opäť platí

$$|\omega_2| = \frac{N_1}{N_2}|\omega_1|.$$

Smer sa zmení práve vtedy, ak je pás prekrížený. Dodajme, že ak pás spája viac ako dve kolesá, stačí sa opäť zamerať iba na prvé a posledné koleso.

Teraz už na základe pomerov počtu zubov podstatných kolies nájdeme, že

$$\omega' = \frac{-8}{15}\cdot\frac{-10}{9}\cdot\frac{24}{30}\cdot\frac{-15}{12}\cdot\frac{27}{14}\cdot\frac{28}{25}\cdot\frac{-15}{24}\cdot\frac{-10}{18}\cdot\frac{12}{12} = -\frac{4}{9}\omega.$$

Teda veľkosť uhlovej rýchlosti posledného kolesa bude $\frac{4}{9}\omega$ a bude sa točiť v opačnom, zápornom smere. Hľadaný pomer uhlových rýchlostí je tým pádom $-\frac{4}{9}\omega \doteq -0{,}44$.

2 V úlohe sa pýtame na dostredivú silu. To je sila, ktorá tlačí Kretériu do stredu jej kruhovej dráhy, takže jej dráha nie je priama. Táto sila je rovná $F = m\omega^2 R$. Stačí nám dosadiť jednotlivé veličiny a obdržíme výsledok.

Polomer je v základných jednotkách rovný 0,05 m, uhlová rýchlosť hodinovej ručičky je $\frac{2\pi}{43200}$ rad/s, čiže asi $1{,}454\cdot 10^{-4}$ rad/s. Po dosadení zistíme, že $F = 1{,}06\cdot 10^{-24}$ N = 1,06 yN.

3 Pri prelievaní vody do veľkého hrnca dodá každý hrniec s vodou určitú časť tepla. Výslednú teplotu budeme počítať z kalorimetrickej rovnice ako vážený priemer teplôt a objemov vody v hrncoch[1].

O sčítaní vieme, že je komutatívne, a teda na poradí nezáleží. Výsledok preto získame vždy rovnaký, a to

$$T = \frac{\sum_1^5 V_i T_i}{\sum_1^5 V_i} = \frac{V_1T_1 + V_2T_2 + V_3T_3 + V_4T_4 + V_5T_5}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5}.$$

Po dosadení získavame hodnotu 60 °C.

[1] Všeobecne by sa mala počítať ako vážený priemer tepelných kapacít a teplôt, avšak všetka voda má rovnakú mernú tepelnú kapacitu a taktiež rovnakú hustotu. Preto sa tieto veličiny vykrátia.

4 Označme si hustotu vody ako ρ a atmosférický tlak ako p_a. Vidíme, že medzi prvou a druhou nádobou je stĺpec vody výšky $h_1 = 2\ \mathrm{m}$, ktorý spôsobí, že na vodnej hladine v druhej nádobe bude tlak

$$p_2 = p_a + \rho g h_1 .$$

Druhá a tretia nádoba sú prepojené priamo vzduchovým stĺpcom. V ňom sa tlak zmení len nepatrne, keďže hustota vzduchu je zanedbateľná oproti hustote vody, a tak môžeme odvážne vyhlásiť, že tlak vzduchu, a teda aj vodných hladín v druhej a tretej nádobe, je rovnaký, teda $p_3 = p_2$.

Teraz sa pozrime na malý kúsok vody s objemom ΔV. Kým sa nachádza na hladine v tretej nádobe, má potenciálnu energiu $E = p_3\,\Delta V$. Po absolvovaní cesty slamkou vyletí až na vrch, kde bude mať nulovú rýchlosť, ale zato nadobudne potenciálnu energiu

$$E' = p_a \Delta V + \rho g \left(h + h_3\right) \Delta V,$$

kde $h_3 = 0{,}5\ \mathrm{m}$.

Keďže trenie je nulové, energia sa nestráca, a teda platí $E' = E$. Z toho dostaneme výsledok

$$h = h_1 - h_3 = 1{,}5\ \mathrm{m}.$$

5 Označme si dĺžku lustra L a hmotnosť prvého netopiera m. Luster sa správa ako páka. Jedinou komplikáciou je, že nemáme len jeden záves, ale dva. Uvedomme si ale, že nosným lankom je vždy to, ktoré je bližšie k ťažšiemu netopierovi. Potom už môžeme aplikovať podmienku rovnováhy momentov síl na páke,

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 .$$

Začnime horným odhadom hmotnosti prisadnuvšieho si netopiera. V takom prípade je osou otáčania lanko práve pri tomto netopierovi, keďže je zrejme ťažší, a platí

$$mg \cdot \frac{3}{5} L = m_{\max} g \cdot \frac{2}{5} L \qquad \Rightarrow \qquad m_{\max} = \frac{3}{2} m .$$

V prípade dolného odhadu je osou otáčania naopak lanko pri prvom netopierovi, ktorý je zrejme ľahší, a platí

$$mg \cdot \frac{2}{5} L = m_{\min} g \cdot \frac{3}{5} L \qquad \Rightarrow \qquad m_{\min} = \frac{2}{3} m .$$

Hmotnosť prisadnuvšieho si netopiera teda môže byť z intervalu $\langle \frac{2}{3} m; \frac{3}{2} m \rangle$. Hľadaná dĺžka intervalu je potom $\frac{3}{2} m - \frac{2}{3} m = \frac{5}{6} m$. Pre hodnoty zo zadania dostávame $\frac{5}{6}$ ugh, pričom na veľkosti pravekej jednotky ugh nezáleží.

6 Označme si dĺžku dolnej paličky ypsilonu ako a a dĺžky horných paličiek ako b. Za počiatok súradnicovej sústavy zvoľme stred ypsilonu. Potom ťažisko ioty má súradnicu 0 a ťažisko ypsilonu leží vo výške x. Zostáva nám teda nájsť x.

Hmotnosti paličiek sú úmerné ich dĺžke. Dolná palička má ťažisko v bode so súradnicou $-\frac{a}{2}$ a horné paličky v bodoch so súradnicou $\frac{a}{2}$, takže možno písať

$$(a + 2b) \cdot x = a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + 2b \cdot \frac{a}{2} .$$

Odtiaľ

$$x = \frac{2b - a}{2b + a} \cdot \frac{a}{2}.$$

Horné paličky zvierajú uhol 60°, takže zrejme platí

$$\frac{a}{b} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Preto $b = \frac{2}{\sqrt{3}}a$. Dosadíme to do výrazu pre x a dostaneme

$$x = \frac{4 - \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2}.$$

Keďže obe písmenká sú vysoké 6 mm, tak $a = 3$ mm a $x \approx 0{,}6$ mm.

7 Terezka sa najprv plaví z Bratislavy do Devína proti prúdu. Jej rýchlosť voči brehu v_1 je teda $v_1 = v - u$, kde v je rýchlosť lode a u rýchlosť prúdu vody. Obdobnou analýzou Terezkinej plavby naspäť po prúde dostávame druhú rovnicu $v_2 = v + u$. Po odčítaní zistíme, že rýchlosť prúdu je

$$u = \frac{v_2 - v_1}{2}. \tag{7.1}$$

Zároveň vieme, že rýchlosť je daná podielom vzdialenosti a času, ktoré poznáme zo zadania. Nahraďme teda $v_1 = \frac{d}{t_1}$ a $v_2 = \frac{d}{t_2}$. Rovnicu 7.1 potom vieme upraviť do tvaru

$$u = \frac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} d. \tag{7.2}$$

Pre obe Bubuho plavby musia platiť úplne identické vzťahy, akurát s jeho hodnotami časov a vzdialeností, ktoré si analogicky označíme T_1, T_2 a D. Rýchlosť prúdu je na oboch úsekoch rovnaká, preto platí

$$u = \frac{T_2 - T_1}{2T_1 T_2} D. \tag{7.3}$$

Ľavé strany rovníc 7.2 a 7.3 sa rovnajú, preto môžeme ich pravé strany spojiť do novej rovnice

$$\frac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} d = \frac{T_2 - T_1}{2T_1 T_2} D,$$

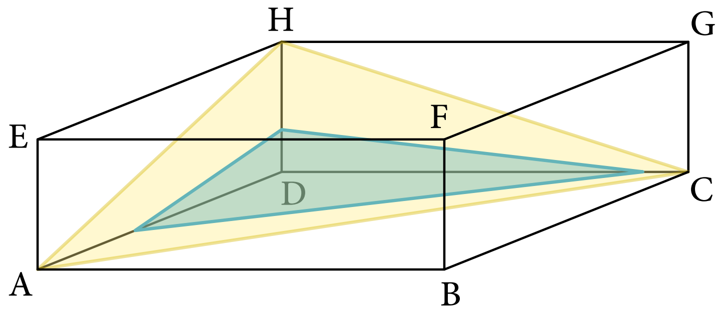
odkiaľ po úpravách dostaneme

$$D = \frac{t_2 - t_1}{T_2 - T_1} \frac{T_1 T_2}{t_1 t_2} d.$$

Po dosadení číselných hodnôt nám vyjde výsledok 90 km.[2]

8 Kvík nesmie porušiť pravú, hornú ani prednú stranu kvádra. To znamená, že jeho rez môže preťať najviac tri hrany – konkrétne AD, CD a DH, ktoré vychádzajú zo spodného zadného ľavého vrchola kvádra. A keďže každý rovinný rez prechádzajúci kvádrom a oddeľujúci nenulový objem pretne aspoň tri hrany, nutne pretne **práve** tieto tri hrany. Vezmime teda nejaký všeobecný rez, ktorý tieto podmienky spĺňa.

[2] Táto hodnota schválne nie je realistická, aby sme nezvýhodňovali tímy, ktoré správny výsledok poznajú.



Obrázok 8.1: *Lakocinka s ľubovoľným všeobecným vyhovujúcim rezom a optimálnym rezom*

Ak rez nepretína vrcholy A, C a H, vieme ho ľahko zlepšiť (čiže zväčšiť odrezaný objem) tak, že rovinu rezu posunieme smerom k týmto bodom. Jediný rez, ktorý takto vylepšiť nevieme, už prechádza cez všetky tri vrcholy. Tento rez teda musí byť hľadaným riešením.

Kvík teda môže zjesť celý ihlan $ACDH$. Jeho podstava má plochu polovice podstavy kvádra $\frac{ab}{2}$ a jeho výška je rovná výške kvádra c. Jeho objem je teda $\frac{abc}{6}$, čiže $\frac{1}{6}$ objemu pôvodnej lakocinky.

Nakoniec ešte musíme overiť, či sa ostávajúci kúsok neprevalí. Ľahko však zistíme, že ťažisko ostávajúceho kúska sa nachádza nad jeho podstavou – pôvodné ťažisko sa nachádzalo priamo nad stranovou uhlopriečkou AC a po odrezaní sa muselo posunúť smerom k vrcholu B. Naše riešenie je teda vyhovujúce.

9 Pri riešení tejto úlohy sa nedá použiť žiaden trik, a tak nemáme inú možnosť, než skúšať natáčať jednotlivé zrkadielka a hľadať cestu lúča s minimálnym kumulatívnym otočením zrkadielok. Aby sme si uľahčili referovanie na jednotlivé zrkadielka, očíslujme si ich ako na obrázku.

Keďže svetlo sa šíri šialenou rýchlosťou, nevieme zrkadiela otáčať "za behu lúča", a teda každé zrkadielko môžeme otočiť len raz. Je teda len obmedzený počet možností, ktoré treba overiť. Niektoré sú už na prvý pohľad výhodnejšie než iné, takže čas, ktorý strávime pri riešení tejto úlohy, závisí výrazne od toho, ako veľmi budeme rozmýšľať.

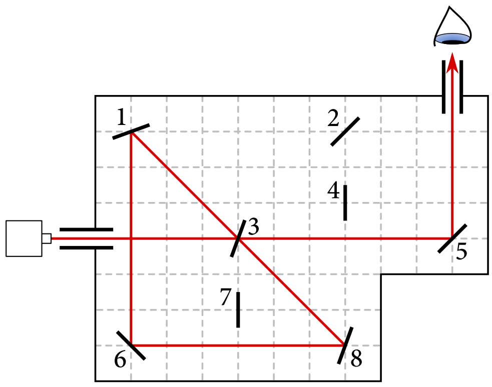
Prv, než sa pustíme do hrania sa so zrkadielkami, môžeme si všimnúť, že do Halovho oka vedie dlhá tenká rúra, ktorá zabezpečí, že posledný odraz musí nastať na zrkadle 5. Takisto, keďže zrkadlá majú pohlcujúce hrany, prvý odraz nastane vždy na 3.

Ďalej si môžeme všimnúť, že niektoré trojice zrkadielok sú kolineárne. To má dva dôležité dôsledky. Prvý z nich je, že nevieme dostať lúč priamo z prvého z trojice zrkadielok cez prostredné na tretie, pretože to má pohlcujúce hrany, a teda treba použiť pomocný odraz do strany, čo trajektóriu predĺži a pridá otočenia naviac, čím ju s najväčšou pravdepodobnosťou spraví nevýhodnou. Druhým dôsledkom je, že môžeme získať "odraz zadarmo" od zadnej strany prostredného zrkadla na posledné zrkadielko z trojice, ak ho nasmerujeme prednou stranou na prvé zrkadielko z trojice. Takými sú napríklad trojice 1,3,8; 2,3,6; 2,4,8; 1,4,5, či 6,7,5.

Pri odhadovaní vhodnosti jednotlivých trajektórií zvolíme stratégiu, že sa budeme riadiť mierou natočenia pri najbližších odrazoch a celkovým množstvom odrazov od unikátnych zrkadiel.[3] Napríklad začneme trajektóriami, ktoré si vyžadujú prechod z 3 na 5 cez jeden odraz. Také možnosti sú tri – cez 2, 4 alebo 7. Nájdeme najoptimálnejšiu z nich a bežíme za opravovateľom. Ten nám povie, že nie, a tak začneme hľadať dlhšie trajektórie. Tu je tých možností už viac, no začneme tými, ktoré si vyžadujú už na prvý pohľad najmenšie otočenia, preto budeme smerovať prvý odraz nahor. Navyše ak pôjdeme z 3 na 1, tak si môžeme uvedomiť, že vďaka polohe na opačnej polpriamke máme odraz z 3 na 5 v smere od 8 zadarmo. Po pár po-

[3] Toto nám samozrejme nezaručí, že takto nájdená trajektória je najoptimálnejšia, no je pravdepodobnejšie, že optimálna trajektória bude skôr kratšia a pootočenia jednotlivých zrkadielok na nej budú tiež menšie.

kusoch nájdeme správne riešenie 3-1-6-8-3-5, ktoré si vyžaduje pootočenie každého zo zrkadielok 3, 1 a 8 o 22,5° – celkovo teda o 67,5°.

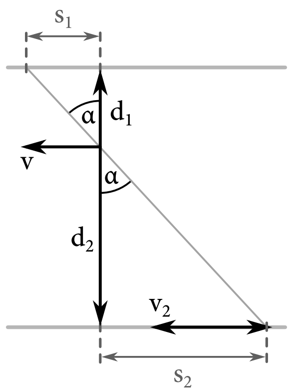


Obrázok 9.1: *Optimálna cesta*

10 Presuňme sa do vzťažnej sústavy Kuba. Označme si rýchlosť Kuba v. Rýchlosť auta v_2 je v Kubovej sústave $v_2 - v$ a rýchlosť jeho tieňa je v_1. Ďalej platí

$$v_1 = \frac{s_1}{t} \qquad \text{a} \qquad v_2 - v = \frac{s_2}{t}, \tag{10.1}$$

kde s_1 je vzdialenosť na stene, ktorú prejde tieň za čas t, a s_2 je vzdialenosť, ktorú prejde auto tiež za rovnaký čas t.



Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že

$$\tan\alpha = \frac{s_1}{d_1} = \frac{s_2}{d_2}. \tag{10.2}$$

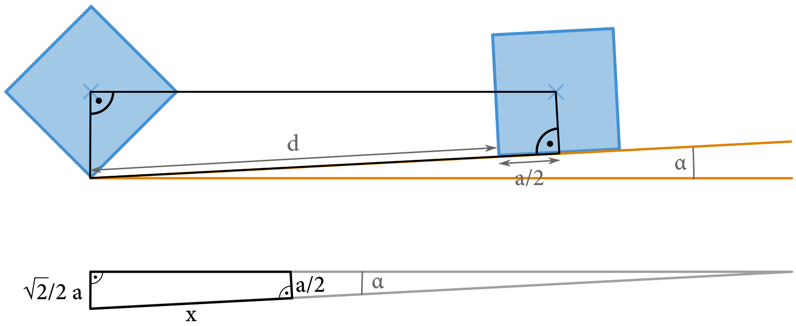
Z rovníc 10.1 a 10.2 dostávame

$$\frac{v_2 - v}{v_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1\frac{d_2}{d_1} + v.$$

Po dosadení hodnôt dostávame $v_2 = 18$ km/h.

11 Označme si sklon stola α a dĺžku hrany kocky a.

Aby sa kocka po náraze na obrubu neprevrhla, musí byť jej kinetická energia nanajvýš rovná nárastu jej potenciálnej energie pri preklápaní cez hranu. Keď si ale uvedomíme, že kinetická energia kocky pochádza z poklesu jej potenciálnej energie pri zosúvaní sa po naklonenom stole, okamžite vidíme, že jej ťažisko musí byť na začiatku nanajvýš v takej istej výške, do akej sa dostane pri preklápaní. Tým celú úlohu transformujeme na jednoduchý geometrický problém – nájsť dĺžku strany štvoruholníka s dvomi pravými uhlami, v ktorom poznám dve strany a jeden ďalší uhol (viď obrázok).



Označme si neznámu dĺžku strany x a doplňme si štvoruholník na pravouhlý trojuholník s vnútorným uhlom α. Potom hľadaná dĺžka strany je rozdielom dĺžok príslušných strán veľkého a malého pravouhlého trojuholníka

$$x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sin\alpha} - \frac{\frac{a}{2}}{\tan\alpha}.$$

Hľadaná vzdialenosť kocky od obruby je potom

$$d = x - \frac{a}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha} - \frac{1}{\tan\alpha} - 1\right)\frac{a}{2} = \left(\sqrt{2}\csc\alpha - \cot\alpha - 1\right)\frac{a}{2}.$$

Pre hodnoty zo zadania $d \approx 341{,}14$ mm.

12 Označme si $b = a/10$, aby sme sa vyhli škaredým zlomkom. Objem ponorenej časti je

$$V = \frac{4b + 7b}{2} \cdot 2b \cdot 20b = 220b^3.$$

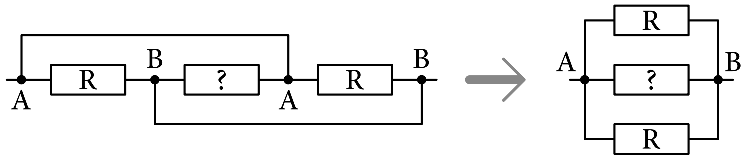
Povrch nájdeme ako súčet povrchov dvoch lichobežníkov, spodnej strany a dvoch bočných strán,

$$S = 2\frac{4b + 10b}{2} \cdot 4b + 4b \cdot 20b + 2 \cdot 5b \cdot 20b = 336b^2.$$

Na kompu pôsobí vztlaková sila $F_v = \rho V g$ a tiažová sila $F_g = \sigma S g$, kde σ je hľadaná povrchová hustota. V rovnovážnom stave sa sily vyrovnajú, takže dostávame

$$F_v = F_g \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{V}{S}\rho = \frac{55}{84}b\rho = \frac{11}{168}a\rho \approx 65{,}5\ \mathrm{kg/m^2}.$$

13 Riešenie začneme tým, že si zapojenie prekreslíme na jednoduchšie ekvivalentné zapojenie. Treba si uvedomiť, že ideálny vodič má nulový odpor, a preto ním spojené uzly možno zlúčiť do jedného uzla ako na obrázku.



Obrázok 13.1: *Ekvivalentný paralelný obvod*

Vidíme, že sme dostali triviálne paralelné zapojenie troch rezistorov. Odpor takého zapojenia sa s meniacim sa odporom neznámeho rezistora mení spojito a monotónne. Stačí sa teda pozrieť na extrémne prípady:

- Ak je neznámy odpor nulový, správa sa ako ideálny vodič a dochádza ku skratu. Inak povedané, výsledný odpor zapojenia je nulový.

- Ak je neznámy odpor nekonečný, môžeme danú vetvu zo zapojenia odstrániť, pretože po zapojení do siete cez ňu nikdy nebude tiecť prúd.

Efektívne sa teda výsledné zapojenie zmení na paralelné zapojenie dvoch rezistorov s odporom R. Výsledný odpor takého zapojenia je notoricky známa hodnota $\frac{R}{2}$.

Riešením je teda interval $\langle 0\,; \frac{R}{2}\rangle$. Jeho dĺžka je $\frac{R}{2} = 500\ \Omega$.

14 Bzdušovi je najlepšie vletieť do kruhu dverí v momente, kedy sa otvor tesne za ním zavrie. Z otvoru naproti potom vyletí tesne po otvorení dverí. Musí teda preletieť dráhu medzi krajmi dvoch otvorov, ktorým prislúchajúca časť kružnice opisuje uhol 135°. Dvere sa za tento čas musia stihnúť otočiť o 135° − 120° = 15°, čiže $\frac{1}{24}$ celého otočenia.

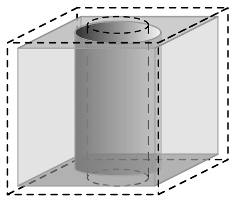
Použijúc goniometriu zistíme, že dráha bude dlhá $2 \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \sin(\frac{135°}{2}) \approx 5{,}54\ \mathrm{m}$. Dverám bude otočenie o 15° trvať $\frac{15\ \mathrm{s}}{24} = \frac{5}{8}\ \mathrm{s}$.

Najvyššia rýchlosť, ktorou môže čmeliak letieť, je teda

$$\frac{2 \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \sin(\frac{135°}{2})}{\frac{5}{8}\ \mathrm{s}} \approx 8{,}87\ \mathrm{m/s}.$$

15 Zabudnime na chvíľu na valcovú dieru a predstavme si, že si na kocke v čase $t = 0$ s vyznačíme všetok cukor, ktorý sa rozpustí za nejaký krátky časový úsek Δt. Zo zadania vieme, že toto geometricky zodpovedá množine bodov, ktoré sú od povrchu kocky vzdialené práve $v\,\Delta t$ alebo menej. Z toho okamžite vidíme, že zostávajúci cukor po nejakom čase Δt bude tvoriť kocku so stranou $4R - 2v\,\Delta t$.

Teraz sa pozrime na valcovú dieru. Jej správanie bude analogické správaniu kocky. Keď si predstavíme profil kocky, v ktorom sa valcová diera zobrazí do kruhovej diery, za nejaký časový úsek Δt sa v okolí diery rozpustí všetok cukor, ktorý je od najbližšieho bodu na obvode kruhu vzdialený maximálne $v\,\Delta t$. Po nakreslení vidíme, že ide o medzikružie medzi obvodom kruhovej diery a kružnicou s ňou koncentrickou, ktorej polomer je $R + v\,\Delta t$. Keď sa vrátime do troch rozmerov, vidíme, že diera v tvare valca si zachová tvar, a jej polomer sa bude v čase zväčšovať rýchlosťou v.



Obrázok 15.1: *Rozpúšťajúca sa kocka*

Teraz dáme dokopy všetko, čo vieme: máme zmenšujúcu sa kocku s počiatočnou stranou $4R$ a zväčšujúci sa valec s počiatočným polomerom R. Za aký čas nezostane žiadny bod v priestore, ktorý by patril kocke, ale nie valcu? Okamžite vidíme, že posledný rozpustený cukor bude ležať na hranách zmenšujúcej sa kocky, ktoré sú rovnobežné s osou valca.

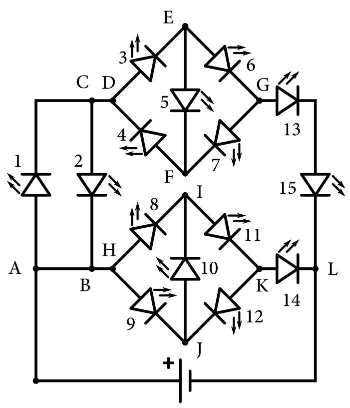
Ako sa kocka zmenšuje, body na tejto hrane sa blížia k osi valca rýchlosťou $\sqrt{2}v$, a povrch valca sa ku nim blíži rýchlosťou v. Ich vzájomná rýchlosť je teda $v(\sqrt{2}+1)$. Z Pytagorovej vety vidíme, že ich počiatočná vzdialenosť je $R\left(2\sqrt{2}-1\right)$. Čas úplného rozpustenia teda bude

$$t = \frac{R\left(2\sqrt{2}-1\right)}{v\left(\sqrt{2}+1\right)}.$$

Pre hodnoty zo zadania $t \approx 2{,}5\ \mathrm{min}$.

16 Celková práca, ktorú musí Hovorca vynaložiť na vyliatie vody, pozostáva zo zmeny potenciálnej energie misky a vody pri naklonení. Najjednoduchšie bude samozrejme misku s vodou nezdvíhať, ale ju iba nakloniť, aby voda vytiekla. Ťažisko misky sa pri naklonení síce zdvihne, no keďže je hmotnosť misky nulová, aj práca pri zmene jej polohy bude nulová. A čo s vodou? Tá sa predsa začne ochotne vylievať pri ľubovoľnom naklonení misky. Celková práca potrebná na vyliatie vody z misky je teda nulová.

17 Zadanie nám hovorí, že napätie na zdroji je dostatočne veľké na to, aby sa rozsvietili diódy zapojené v priepustnom smere, ale na druhej strane aby nebolo presiahnuté prierazné napätie. To znamená, že na určenie toho, ktoré diódy budú svietiť, nám stačí nájsť smer prúdu jednotlivými vetvami obvodu a identifikovať, ktoré diódy sú zapojené v priepustnom smere.



Prúd tečie od kladného pólu zdroja k zápornému. Triviálne teda vidíme, že postupnosti diód 1–3–6–13–15 a 8–11–14–9–10 sú zapojené v priepustnom smere bez ďalších vetiev, takže svietiť budú.

A čo také diódy 4 a 7? Na prvý pohľad sa môže zdať, že sú zapojené v závernom smere. Nemôže sa však stať, že prúd tečie v akejsi slučke po trase C–D–3–E–6–G–7–F–4–D–3–E–6–G–13, čo by znamenalo, že by sa aj LEDky 4 a 7 mohli rozsvietiť? Hoci to vyzerá ako reálna možnosť, treba si spomenúť na Kirchhoffove zákony. Konkrétne podľa druhého Kirchhoffovho zákona musí byť súčet napätí na uzavretej slučke nulový, no a keďže na uvažovanej slučke D–3–E–6–G–7–F–4–D majú všetky napätia rovnaké znamienka, ich súčet bude určite nenulový. Jediným logickým riešením teda je, že prúd chce tiecť dolnou vetvou v smere D–4–F–7–G, čo znamená, že diódy 4 a 7 sú zapojené v závernom smere, a teda nesvietia. Obdobnou úvahou pre slučku D–3–E–5–F–4–D zistíme, že ani dióda 5 nemôže svietiť.

Dióda 12 je zapojená taktiež v závernom smere, čo opäť dostávame úvahou podľa druhého Kirchhoffovho zákona pre slučku J–10–I–11–K–12–J. No a ešte zostáva dióda 2, ktorá je tiež zapojená v závernom smere, čo vidíme z úvahy pre slučku A–1–C–2–B–A.

Po pripojení k zdroju napätia sa teda rozsvietili diódy 1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14 a 15.

18 Maťko hodil vajíčko s počiatočnou rýchlosťou v_0 pod uhlom α. Keďže odpor vzduchu zanedbáme, jediná sila, ktorá nám na vajíčko pôsobí, je tiažová sila spôsobujúca zrýchlenie g. Zaveďme si súradnicovú sústavu tak, aby nám vajíčko zrýchľovalo iba v smere osi y. Keďže počiatočná rýchlosť nemusí mať smer nami zvolených osí, rýchlosti v smeroch osí x a y si vyjadríme všeobecne ako

$$v_x(0) = v_0 \cos\alpha \qquad \text{a} \qquad v_y(0) = v_0 \sin\alpha.$$

V smere osi x na vajíčko nepôsobí žiadna sila, a preto sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro, čiže

$$x = t v_0 \cos\alpha. \tag{18.1}$$

V smere osi y pôsobí tiažová sila, preto sa bude pohybovať so spomalením g, čiže

$$y = t v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{18.2}$$

Keďže Maťko a Kubko chytajú vajíčko v rovnakej výške, potenciálna energia vajíčka je rovnaká. Z toho nám vyplýva, že rýchlosť vajíčka pri hode bude rovnaká ako pri jeho chytaní. Preto si môžeme označiť $v = v_0$. Pomocou týchto rovníc vieme vyjadriť polohu vajíčka v danom okamihu, čiže parameter t je v obidvoch rovniciach rovnaký. Po vyjadrení t z rovnice 18.1 a dosadení do rovnice 18.2 dostávame výraz

$$h = \frac{d \sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g d^2}{2 v^2 \cos^2\alpha}.$$

Keďže výška, v ktorej chytí Kubko vajíčko je nulová, za h dosadíme 0. Po úprave dostávame rovnicu

$$v = \sqrt{\frac{gd}{\sin^2 2\alpha}}.$$

Ak chceme aby bol výsledok čo najmenší, menovateľ musí byť čo najväčší. To nastáva vtedy, keď je uhol $\alpha = 45°$ a $\sin 2\alpha = 1$. Preto najmenšia rýchlosť bude $v = \sqrt{gd} \approx 6{,}26\ \mathrm{m/s}$.

Elegantná metóda

Existuje však aj oveľa krajšia metóda, ktorú tu z edukačných dôvodov taktiež uvedieme: označme rýchlosť na začiatku pohybu $\mathbf{v}_0$ a na konci ako $\mathbf{v}$, taktiež označme dĺžku trvania tohto pohybu ako t a zmenu polohy vajíčka ako $\mathbf{r}$. Keďže sa rýchlosť mení lineárne s časom, môžeme povedať, že priemerná rýchlosť je

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}}{2} = \frac{\mathbf{r}}{t} \tag{18.3}$$

Taktiež, keďže je zrýchlenie konštantné, môžeme použiť rovnicu

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{g}t. \tag{18.4}$$

Teraz spočítame vektorový súčin 18.3 × 18.4,

$$\frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \mathbf{r} \times \mathbf{g},$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{v}_0) = \mathbf{r} \times \mathbf{g},$$

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}.$$

Teraz poďme aplikovať túto všeobecnú rovničku na náš konkrétny prípad. Jednoznačne platí $|\mathbf{r} \times \mathbf{g}| = gd$. Kvôli zachovaniu energie vieme, že $|\mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}| = v$. Všeobecne platí, že ak označíme uhol medzi vektormi $\mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}$ ako θ, dostaneme

$$v^2 \sin\theta = gd.$$

Teraz už ostáva len si uvedomiť, že $\sin\theta \leq 1$ a teda

$$v \geq \sqrt{gd}.$$

19 Riešenie úlohy bude pozostávať z postupného popremieňania jednotky *blaze* na W/m², ktorú budeme vedieť porovnať so solárnou konštantou z tabuľky, $F_\odot = 1361\ \mathrm{W/m^2}$. Dokonale čierna nádoba totiž všetko slnečné svetlo pohltí, a to sa premení na teplo zohrievajúce vodu. Označme teda

$$1\ \mathrm{blaze} = \frac{Q}{1\ \mathrm{m}^2 \cdot 1\ \mathrm{h}},$$

kde Q je teplo potrebné na zohriatie vody v onej čiernej nádobe o 1 °F. Pre lepšiu predstavu budeme uvažovať o nádobe s plochou podstavy 1 m².

Na zistenie tepla Q treba poznať hmotnostnú tepelnú kapacitu vody, jej hmotnosť a rozdiel teplôt. Hmotnostná tepelná kapacita c_{H_2O} je známych 4180 kJ/(kg K). Jej hmotnosť poľahky zistíme z jej objemu – ten je $1\ \mathrm{m}^2 \cdot 25{,}4\ \mathrm{mm} = 0{,}0254\ \mathrm{m}^3$, a teda hmotnosť bude 25,4 kg. Nakoniec zmena teploty o 1 °F znamená v Kelvinovej škále zmenu o $\frac{5}{9}$ K.

Môžeme dosadiť

$$Q = c_{H_2O} \cdot m \cdot \Delta T = 4{,}18\ \mathrm{kJ/(kg\,K)} \cdot 25{,}4\ \mathrm{kg} \cdot \frac{5}{9}\ \mathrm{K} \approx 58{,}98\ \mathrm{kJ}.$$

a teda 1 *blaze* bude rovný

$$\frac{Q}{1\ \mathrm{h} \cdot 1\ \mathrm{m}^2} = \frac{58{,}98\ \mathrm{kJ}}{3600\ \mathrm{s} \cdot 1\ \mathrm{m}^2} = 16{,}38\ \mathrm{W/m^2}.$$

Zo Slnka však na meter štvorcový dopadá až 1361 W. Po vydelení zistíme, že slnečné svetlo má približne 83-krát väčší výkon na jednotku plochy, čiže 83 *blazov*.

20 Na úvod si spočítame odpor náramku pre všeobecný uhol φ. Označme polomer náramku r a dĺžkový odpor drôtu λ. Pripojením elektród pod uhlom φ spôsobíme, že náramok sa efektívne rozdelí na dva paralelne zapojené rezistory s odpormi $\varphi r\lambda$ a $(2\pi - \varphi)\, r\lambda$. Výsledný odpor dvoch paralelne zapojených rezistorov je teda triviálne

$$R_\varphi = \frac{\varphi\,(2\pi - \varphi)}{2\pi} r\lambda.$$

Zo zadania a rovnice pre výsledný odpor vieme, že pre $\varphi = \pi$ platí $R = \frac{\pi}{2} r\lambda$. Pre n-krát menší odpor, ktorý dostaneme pri uhle φ_n musí preto platiť

$$\frac{R}{n} = \frac{\pi}{2n} r\lambda = \frac{\varphi_n\left(2\pi - \varphi_n\right)}{2\pi} r\lambda.$$

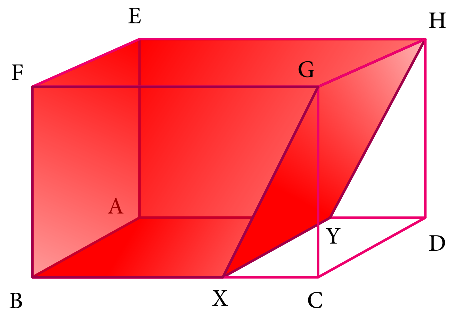
To je kvadratická rovnica pre φ_n, po ktorej vyriešení dostávame

$$\varphi_n = \pi\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right).$$

Pre $n = 2$ dostávame jednoduchý výsledok $\varphi_2 = \pi\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \doteq 180° \pm 127{,}28°$. Uhol, ktorý musia zvierať elektródy, je teda 52,72°, čo je ekvivalentné 307,28°.

21 Aby si Plyš nič nevšimla, Kvík určite nesmie rezom porušiť hrany prednej steny AB, BF, EF a AE a rovnako ani zvyšné hrany hornej steny FG, GH a EH. Obdobným argumentom ako v predošlej úlohe o lakocinke môžeme zdôvodniť, že ideálnym rezom bude rez rovinou $ABGH$.

Lenže tu narážame na problém. Ak by Kvík ukradol spodnú časť kvádra, zvyšná časť by spadla. To by si Plyš určite všimla a spolu s tým by prišli aj spomenuté nepríjemné dôsledky. Musí preto nechať takú časť podstavy, aby zvyšok bezpečne udržala. To znamená len toľko, že ťažisko ostávajúcej časti musí ležať nad jej podstavou.[4]

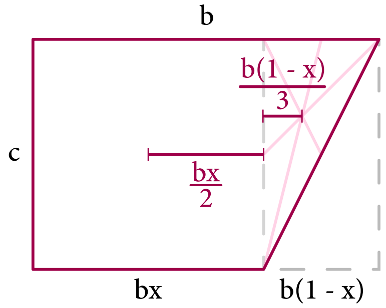


Obrázok 21.1: *Pohľad na lakocinku zboku*

Rez teda bude musieť spraviť tak, aby jeho spodná hrana bola rovnobežná s hranou kvádra CD, ale prechádzala podstavou $ABCD$ niekde v jej vnútri. Označme si dva nové body prieniku roviny rezu s hranami AD a BC ako X a Y. Ostáva určiť, aká najväčšia môže byť vzdialenosť medzi úsečkami AB a XY, ktorú označíme ako bx pre nejaké $0 < x < 1$.

[4] Presnejšie povedané, ťažisko musí byť nad konvexným obalom novej podstavy, ale pri jedinom rovinnom reze podstava určite ostane konvexná.

Tu použijeme momentovú vetu: musí platiť, že moment sily spôsobený tiažou kvádra s podstavou $ABXY$ musí byť aspoň taký veľký, ako moment sily spôsobený tiažou zvyšnej časti v tvare trojbokého hranola. Rozmer v smere hrany a môžeme ignorovať, keďže v tomto smere je kváder všade rovnaký. Pozrime sa teda na bokorys kvádra.



Obrázok 21.2: *Momentová veta uplatnená na bočný priemet lakocinky*

Hmotnosť kvádra je úmerná $abcx$ a jeho ťažisko je v horizontálnej vzdialenosti $\frac{bx}{2}$ od osi XY. Hmotnosť zvyšku je úmerná $\frac{abc(1-x)}{2}$ a jeho ťažisko sa nachádza v jednej tretine ťažnice, teda v horizontálnej vzdialenosti $\frac{b(1-x)}{3}$. Momentová veta preto tvrdí, že v krajnom prípade platí

$$abcx\frac{bx}{2} \overset{!}{=} \frac{abc\,(1-x)}{2}\frac{b\,(1-x)}{3},$$

odkiaľ po vykrátení a vynásobení šiestimi dostávame rovnicu

$$2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Tá má riešenia

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4+8}}{4} = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

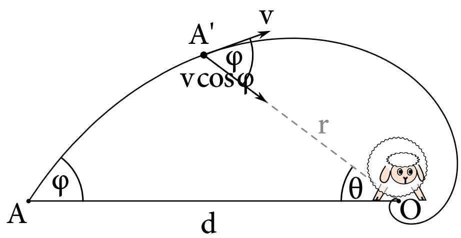
z ktorých fyzikálne zmysluplné je to so znamienkom „+“ pri diskriminante.

Ostáva nám spočítať objem odrezanej časti, ktorý je zjavne rovný

$$\frac{abc\,(1-x)}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}abc,$$

a Kvík teda môže odhlodať $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ objemu lakocinky, čiže približne 31,7%.

22 Andrejova rýchlosť v čase t je $v = at$. Zoberme si úsečku AO, ktorá spája Andreja a ovcu a označme jej dĺžku ako r.



Obrázok 22.1: *Andrejova trajektória*

Priemet Andrejovej rýchlosti na túto úsečku je $v \cos \varphi$, čo je zároveň aj rýchlosť skracovania úsečky. Úsečka sa teda skracuje s konštantným zrýchlením ako

$$r(t) = d - \frac{1}{2} a \cos \varphi t^2.$$

Čas, keď Andrej dobehne ovcu ($r = 0$) je potom

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a \cos \varphi}},$$

čo je prekvapivo jednoduchý výsledok vzhľadom na to, aká komplexná je Andrejova trajektória. Pre hodnoty zo zadania to dáva čas $t = 20$ s.

23 Rozdeľme si výšku na dve zložky: h_1 nech je vzdialenosť od zeme po Adamovu ruku a h_2 nech je vzdialenosť od Adamovej ruky po strop jaskyňe. Potom $H = h_1 + h_2$.

V prvom deji Adam skákalku iba pustí, teda jej rýchlosť vo výške h_1 je nulová. Zistime čas dopadu na zem. Rovnica pohybu je v tomto prípade

$$\frac{1}{2} g t_1^2 = h_1.$$

Získame tak známy výsledok $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Vieme, že medzi dvoma dopadmi skákalka raz klesne z maximálnej výšky na zem, a potom vystúpa od zeme do maximálnej výšky, pričom oba tieto deje trvajú t_1. Teda $T_1 = 2t_1$ a $f_1 = \frac{1}{2t_1}$. Po dosadení a vyriešení vzhľadom na h_1 máme $h_1 = \frac{g}{8f_1^2}$.

V druhom deji máme dve možnosti: buď sa skákalka dotkne stropu, alebo sa ho nedotkne. Máme však zadané, že Adam dokázal určiť výšku stropu, čo by bolo v druhom prípade nemožné, teda skákalka sa stropu dotkne. Medzi dvoma odrazmi skákalka raz stúpne z podlahy do výšky h_1, kde má rýchlosť v, a raz stúpne z výšky h_1 do výšky $h_1 + h_2$. Medzi ďalšími dvoma odrazmi klesne späť a toto sa opakuje.

Vieme, že vystúpať do výšky h_1 tak, aby tam mala skákalka rýchlosť v, trvá rovnako dlho, ako klesnúť z tej výšky s počiatočnou rýchlosťou v v opačnom smere. Teda prvá rovnica bude

$$\frac{1}{2} g t_{21}^2 + v t_{21} = h_1.$$

Pohybová rovnica pre vystúpanie o h_2 s počiatočnou rýchlosťou v je

$$-\frac{1}{2} g t_{22}^2 + v t_{22} = h_2.$$

Riešenie prvej rovnice vzhľadom na t_{21} má len jeden kladný koreň: $t_{21} = \frac{1}{g}\left(-v + \sqrt{v^2 + 2gh_1}\right)$. Riešenie druhej rovnice vzhľadom na t_{22} má dva kladné korene, pričom ten väčší predstavuje čas dosiahnutia danej výšky po dosiahnutí maximálnej výšky pre neprerušený pohyb, a teda nás zaujíma ten menší koreň. Dostávame hodnotu $t_{22} = \frac{1}{g}\left(v - \sqrt{v^2 - 2gh_2}\right)$ a rovno si vyjadríme periódu medzi dvoma odrazmi: $T_2 = t_{21} + t_{22} = \frac{1}{f_2}$. Dosadíme časy a vyriešime pre h_2,

$$h_2 = \frac{1}{2g}\left(v^2 - \left(\sqrt{v^2 + 2gh_1} - \frac{g}{f_2}\right)^2\right).$$

Dosadíme hodnotu h_1 a nájdeme celkovú výšku jaskyne

$$H = \frac{1}{2g}\left(v^2 - \left(\sqrt{v^2 + \frac{g^2}{4f_1^2}} - \frac{g}{f_2}\right)^2\right) + \frac{g}{8f_1^2} \approx 2{,}38\ \mathrm{m}.$$

24 Začnime tým, že bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať otáčanie skutočného kolesa v kladnom smere. Otázkou je, prečo by mal štáb pri rôznej snímkovacej frekvencii vidieť inú uhlovú rýchlosť kolesa. Odpoveď nájdeme, ak sa pozrieme na dve snímky idúce po sebe. Pri pohybe kolesa uvidíme, že sa otočilo o uhol φ. S rastúcou uhlovou rýchlosťou kolesa bude rásť aj uhol φ až po $\frac{\pi}{N}$, kde N je počet spíc kolesa. Ak je rýchlosť len o kúsok väčšia, bude sa efektívne zdať, že sa otočí už o menší uhol, ale opačným smerom. Takto to pôjde až po uhol $\frac{2\pi}{N}$, kedy bude zdanlivá rýchlosť nulová, pretože poloha spíc sa na snímkach nebude meniť. A takto môžeme periodicky pokračovať. Ďalej budeme uvažovať $N = 5$ ako je uvedené v zadaní.

Pozrime sa teraz, o aký skutočný uhol sa otočí koleso za jednu snímku, ak zdanlivý uhol, o ktorý sa otočilo koleso na prvej kamere je $\frac{2\pi}{\frac{5}{8}\,\mathrm{s}}\frac{1}{24}$ s. Zadanie úlohy neurčuje, či sa na kamere koleso otáča rovnakým smerom alebo opačne ako v skutočnosti. Skutočný uhol, o ktorý sa koleso otočí za jednu snímku je preto

$$\frac{2\pi}{5}k \pm 2\pi\frac{1}{15},$$

kde $k \in \mathbb{N}$.

Pre druhú kameru, so snímkovacou frekvenciou 25 fps, dostávame obdobným spôsobom pre skutočný uhol za jednu snímku

$$\frac{2\pi}{5}\ell \pm \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\,\mathrm{s}}\frac{1}{25}\,\mathrm{s} = \frac{2\pi}{5}\ell \pm 2\pi\frac{2}{25},$$

kde $\ell \in \mathbb{N}$.

Skutočná uhlová rýchlosť musí byť v oboch prípadoch rovnaká, preto musí platiť

$$\omega = \frac{\left(\frac{2\pi}{5}k \pm 2\pi\frac{1}{15}\right)}{\frac{1}{24}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{5}\ell \pm 2\pi\frac{2}{25}\right)}{\frac{1}{25}}$$

Po úprave dostávame rovnicu

$$24k \pm 8 = 25\ell \pm 10.$$

Keďže hľadáme najmenšiu možnú uhlovú rýchlosť, hľadáme riešenie rovnice s čo najmenším k, respektíve ℓ. Vyskúšame všetky (štyri) kombinácie plusov a mínusov v rovnici a zistíme, že najmenšiu uhlovú rýchlosť môžeme dostať pre prípad, keď sa na oboch kamerách otáča koleso v opačnom smere ako v skutočnosti, a teda $k = \ell = 2$. Najmenšia možná skutočná uhlová rýchlosť kolesa je preto

$$\omega = \frac{\left(\frac{2\pi}{5}2 - 2\pi\frac{1}{15}\right)}{\frac{1}{24}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{5}2 - 2\pi\frac{2}{25}\right)}{\frac{1}{25}} = 16\pi\ \mathrm{rad/s}.$$

Inak povedané, koleso sa v skutočnosti otočí minimálne osemkrát za sekundu.

25 Aby sme túto úlohu vyriešili, musíme si uvedomiť, čo znamená, že satelit ponad Tinku preletí každý deň práve raz. Tinka sa nachádza kdesi blízko rovníka, teda v inerciálnej sústave sama obíde okolo stredu Zeme raz za deň. Ak má Tinka vidieť každý deň práve jeden obeh, satelit má dve možnosti:

- buď rotujúcu Zem obehne za ten čas ešte raz v smere otáčania (a teda v inerciálnej sústave dvakrát),
- alebo proti smeru otáčania, a teda bude stáť na mieste, rovnako ako hviezdy.

Druhá možnosť samozrejme pre satelit nie je fyzikálne reálna – aby na Zem vplyvom jej príťažlivosti nespadol, musel by byť nekonečne ďaleko[5], a potom by to nemohol byť satelit, nehovoriac o tom, že by ho Tinka sotva odlíšila od hviezd. Musí teda ísť o prvú možnosť. No a to už je iba jednoduchá keplerovská úloha.

Použijeme tretí Keplerov zákon

$$\omega^2 a^3 = GM, \tag{25.1}$$

odkiaľ dostaneme

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}. \tag{25.2}$$

Aká je uhlová rýchlosť? Za 24 hodín musí satelit obehnúť Zem v inerciálnej sústave dvakrát, plus ešte o drobný kúsok, o ktorý sa Zem za jeden deň posunie na svojej dráhe, čiže približne $\frac{2\pi}{365}$.[6] Uhlová rýchlosť satelitu na obežnej dráhe teda bude

$$\omega = \frac{2\pi\left(2 + \frac{1}{365{,}25}\right)}{86\,400\ \mathrm{s}}. \tag{25.3}$$

Po dosadení do rovnice 25.2 dostaneme

$$a \doteq 26\,577\ \mathrm{km}.$$

Zadanie sa však nepýta na hlavnú poloos, ale na výšku nad povrchom. Preto od tejto hodnoty ešte odčítame polomer Zeme a získame odpoveď

$$h \doteq 20\,199\ \mathrm{km}.$$

26 Z rovníc popisujúcich prirodzený rozpad rádioaktívnych prvkov vieme, že ak na začiatku máme N_0 atómov prvku, ktorého polčas premeny je $t_{1/2}$, v čase t ostane v priemere

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}} = N_0 2^{-\frac{t}{t_{1/2}}}$$

častíc.

Čas, kedy sa v priemere premení aj posledná častica, vieme aproximovať ako také t_f, že $N(t_f) = \frac{1}{2}$. Riešme teda vzniknutú rovnicu vzhľadom na t_f:

$$N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_{1/2}}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t = t_{1/2}\left(\log_2 N_0 + 1\right). \tag{26.1}$$

A koľkože je N_0? Nuž, vieme, že $N = N_A \frac{m}{M}$, kde $m = 1$ kg je hmotnosť uhlíka a M je atómová hmotnosť uhlíka. Keďže náš izotop $^{14}_{6}\mathrm{C}$ má 14 nukleónov a malé protónové číslo, môžeme odhadnúť jeho atómovú hmotnosť na približne 14 g/mol, čo potvrdí rýchly pohľad do tabuľky. Po dosadení atómovej hmotnosti a Avogadrovej konštanty zisťujeme, že v kilograme uhlíka máme asi $4{,}3 \cdot 10^{25}$ atómov.

[5] alebo v niektorom Lagrangeovom bode

[6] Občiansky dvadsaťštyrihodinový deň je totiž definovaný zdanlivým pohybom Slnka, nie hviezd. Keby sme rátali iba pohyb voči hviezdam, o pol roka by satelit lietal ponad Tinku cez deň.

Po dosadení do rovnice 26.1 zistíme, že sa v priemere všetky premenia za

$$t = \left(\log_2\left(\frac{1\ \mathrm{kg}}{14\ \mathrm{u}}\right) + 1\right) \cdot 5730\ \mathrm{y} \doteq 493\,657\ \mathrm{y}.$$

Poznámka pre úplnú korektnosť

Naša metóda na odhad priemerného času premeny všetkých atómov nie je úplne presná. Správne by sme mali rátať strednú hodnotu času premeny posledného atómu z podmienenej pravdepodobnosti.

Hustota pravdepodobnosti, že posledná častica sa premení v intervale $\langle t; t + \mathrm{d}t\rangle$ je daná súčinom pravdepodobností, že všekty ostatné častice sa už premenili na dusík; a hustoty pravdepodobnosti, že táto konkrétna častica sa premení práve v intervale $\langle t; t + \mathrm{d}t\rangle$.

Kumulatívna pravdepodobnosť, že sa jedna konkrétna častica už premenila, je

$$\mathrm{CDF}_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Pravdepodobnosť, že sa už premenili všetky ostatné častice, je potom daná súčinom jednotlivých pravdepodobností pre tieto častice. Tých je spolu $n - 1$, a je teda rovná

$$\mathrm{CDF}_{n-1}(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1}.$$

Hustota pravdepodobnosti premeny jednej častice v čase t je daná zmenou kumulatívnej pravdepodobnosti v čase, čiže

$$\mathrm{PDF}_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Hľadaným výrazom je teda

$$p(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}.$$

Očakávaný stredný čas premeny poslednej častice $\langle t\rangle$ je potom

$$\langle t\rangle = \frac{\int_0^\infty t p(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty p(t)\,\mathrm{d}t},$$

ktorú pár zložitými substitúciami vieme vyriešiť a dostať

$$\langle t\rangle = \frac{\mathrm{H}_n}{\lambda}, \quad \text{kde} \quad \mathrm{H}_n = \sum_1^n \frac{1}{n}.$$

Pre veľké čísla sa hodnota H_n asymptoticky blíži k $\ln n$. Presný výsledok je potom

$$H_{N_0} \cdot \frac{5730\ \mathrm{y}}{\ln 2} \doteq 492\,698\ \mathrm{y}.$$

Vidíme, že rozdiel medzi jednoduchým a korektným výpočtom je podstatne menší, ako je experimentálna chyba pri určení polčasu premeny izotopu ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, teda 5730 ± 40 y. Preto nám bohato stačí aj prvý postup.

27 Na začiatku natlakujeme kompresor na tlak $p_1 = 5p_a$, a to tak, že do objemu $V_1 = 10\,\mathrm{l}$ natlačíme vzduch, ktorý mal pôvodne tlak $p_0 = p_a$ a teplotu T_0, ktorá nás, ako uvidíme neskôr, nemusí vôbec zaujímať.

Pri natlakovaní kompresoru sa vzduch vo vnútri zahreje na teplotu T_1, ktorú si teraz nájdeme. Zrejme platí stavová rovnica

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Okrem toho natlakovanie kompresora prebehlo rýchlo, takže ho možno považovať za adiabatický proces. Tým pádom možno písať

$$p_0 V_0{}^{\varkappa} = p_1 V_1{}^{\varkappa}.$$

Vylúčením objemu z rovníc dostávame pre neznámu teplotu po natlakovaní

$$T_1 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} T_0.$$

Pre dvojatómový plyn $\varkappa = 7/5$ a keďže $p_1 = 5p_0$, tak

$$T_1 = 5^{-2/7} T_0.$$

Helbojove pekelné povinnosti zdržali Helboja dosť dlho na to, že vzduch vo vnútri kompresora stihol vychladnúť, čo spôsobilo mierny pokles tlaku vo vnútri. Označme si tlak po vychladnutí ako p_2. Chladnutie vzduchu vo vnútri je izochorický proces, preto

$$p_1 T_1 = p_2 T_2.$$

Vzduch sa ochladil na jeho pôvodnú teplotu $T_2 = T_0$, teda

$$p_2 = \frac{T_1}{T_2} p_1 = \frac{5^{-2/7} T_0}{T_0} 5p_0 = 5^{5/7} p_0.$$

Keď pripojíme na kompresor balón a otvoríme ventil, vzduch adiabaticky expanduje. Tlak, ktorý bude vo vnútri balóna, vieme zistiť z jeho polomeru. Keďže povrchová energia balóna je priamo úmerná jeho ploche, s polomerom balóna r sa bude meniť ako $4\pi r^2 \sigma$. To znamená, že radiálna sila stláčajúca vzduch v balóne bude mať veľkosť $8\pi r\sigma$, a teda príspevok tejto elastickej sily k tlaku vo vnútri bude $p_e = \frac{2\sigma}{r}$.

Tlak vzduchu v balóne je preto $p_3 = p_0 + \frac{2\sigma}{r}$, kde p_0 je atmosférický tlak vzduchu. Vzduch pri expanzii zväčší objem o objem balóna $\frac{4}{3}\pi r^3$. Pre adiabatickú expanziu platí

$$p_2 V_2{}^{\varkappa} = p_3 V_3{}^{\varkappa}$$

a samozrejme platí aj stavová rovnica

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}.$$

Po dosadení príslušných výrazov do rovnice adiabaty dostávame

$$5^{5/7} p_0 V_0{}^{\varkappa} = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r}\right)\left(V_0 + \frac{4}{3}\pi r^3\right)^{\varkappa}.$$

Dosadením do stavovej rovnice dostávame zase

$$\frac{5^{5/7} p_0 V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{2\sigma}{r}\right)\left(V_0 + \frac{4}{3}\pi r^3\right)}{T_3},$$

odkiaľ

$$T_3 = T_0 \frac{p_0 + \frac{2\sigma}{r}}{5^{5/7} p_0} \frac{V_0 + \frac{4}{3}\pi r^3}{V_0}.$$

Z rovnice adiabaty nájdeme polomer balóna r, a potom ho dosadíme do výrazu pre teplotu. Problémom je, že vyššieuvedená rovnica je transcendentná pre r, a preto ju musíme riešiť numericky. Použijeme binárne vyhľadávanie. Na to potrebujeme nájsť interval, v ktorom by mal hľadaný koreň rovnice ležať.

Ako dolný odhad môžeme použiť polomer r_L, na ktorý by sa balón nafúkol, keby bol rozdiel tlakov medzi vnútrom a vonkajškom

$$\Delta p = \left(5^{5/7} - 1\right) p_a,$$

čo je presne pretlak v kompresore. V balóne bude po nafúkaní samozrejme menší pretlak kvôli expanzii vzduchu, preto

$$\Delta p > \frac{2\sigma}{r_L} \qquad \Longrightarrow \qquad r_L > \frac{2\sigma}{\left(5^{5/7} - 1\right) p_a} \approx 0{,}366\ \text{cm}.$$

Ako horný odhad poslúži polomer r_P, na ktorý by sa balón nafúkol, keby pri napínaní nekládol žiaden odpor. V takom prípade

$$5^{5/7} p_0 V_0^{7/5} = p_0 \left(V_0 + \frac{4}{3}\pi r_P^3\right)^{7/5} \quad \Rightarrow \quad r_P = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\left(5^{\frac{25}{49}} - 1\right) V_0} \doteq 14{,}485\ \text{cm}.$$

Teraz už môžeme konečne začať s binárnym vyhľadávaním. Zadefinujeme si funkciu

$$f(r) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r}\right)\left(V_0 + \frac{4}{3}\pi r^3\right)^{\varkappa} - 5^{5/7} p_0 V_0^{\varkappa}$$

a budeme skúmať jej znamienka v koncových bodoch intervalu r_L a r_P. Potom interval rozdelíme na polovice a pozrieme sa na znamienko v deliacom bode. Z dvojice intervalov vyberieme ten, v ktorého koncových bodoch nadobúda funkcia opačné znamienko. S delením intervalov pokračujeme dovtedy, dokým nedosiahneme potrebnú presnosť. Keďže zadanie od nás chce až tri platné cifry a vzhľadom na to, že toto je len medzivýsledok, ktorý budeme vo výpočtoch používať ďalej, tak ho určíme s presnosťou až na štyri platné cifry, lebo chyby sa budú v priebehu výpočtu nabaľovať. To znamená, že skončíme až v okamihu, keď by sa už ďalším delením nemohla zmeniť štvrtá platná cifra. Dostaneme $r \approx 14{,}32$ cm.

Keď balón zaviažeme a odpojíme od kompresora, vzduch v balóne sa po čase dostane do teplotnej rovnováhy s okolím (t.,j. zmení sa mu teplota opäť na T_0) a podľa stavovej rovnice musí pre výsledný polomer balóna R platiť

$$\frac{\left(p_0 + \frac{2\sigma}{r}\right)\frac{4}{3}\pi r^3}{T_3} = \frac{\left(p_0 + \frac{2\sigma}{R}\right)\frac{4}{3}\pi R^3}{T_0}.$$

Po dosadení za T_3 dostávame kubickú rovnicu pre R,

$$\frac{5^{5/7} p_0 V_0 r^3}{V_0 + \frac{4}{3}\pi r^3} = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R}\right) R^3,$$

ktorú budeme riešiť opäť numericky, pričom budeme postupovať analogicky. Najskôr si zadefinujeme funkciu

$$g(R) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R}\right) R^3 - \frac{5^{5/7} p_0 V_0 r^3}{V_0 + \frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Ďalej budeme potrebovať prvotný odhad. Vieme, že pri nafukovaní balóna stlačený vzduch expandoval, teda sa ochladil. To znamená, že po odpojení začala jeho teplota rásť, čo malo za následok zväčšovanie balóna, čiže $R > r$. Za dolný odhad preto vezmeme

$$R_L = r \approx 14{,}32\ \text{cm}.$$

Ako horný odhad môžeme zase použiť polomer, na ktorý by sa balón zväčšil, keby pri nafukovaní nekládol žiaden odpor. Podľa stavovej rovnice

$$\frac{p_3 r^3}{T_3} = \frac{p_0 {R_P}^3}{T_0}.$$

Po dosadení za T_3 a p_3 a následnej úprave odtiaľ dostávame

$$R_P = \sqrt[3]{\frac{5^{5/7} V_0}{V_0 + \frac{4}{3}\pi r^3}}\, r \approx 16{,}08\ \text{cm}.$$

Konečne binárnym vyhľadávaním nájdeme $R \approx 15{,}9$ cm.

28 Na riešenie úlohy použijeme princíp virtuálnych prác. Predpokladajme, že každá z pružín ja napnutá na dĺžku x. Tým pádom každá pružina ťahá silou $T = kx$. Teraz natiahnime každú pružinku o Δx. Tým vykonáme prácu $W = 12 \cdot T\,\Delta x = 12kx\,\Delta x$.

Nahraďme celú kocku jedinou pružinou s hľadanou tuhosťou K. Keďže ju naťahujeme po telesovej uhlopriečke, musí byť natiahnutá na dĺžku $\sqrt{3}x$. Ďalšie zväčšenie kocky o Δx zodpovedá predĺženiu náhradnej pružiny o $\sqrt{3}\,\Delta x$. Pri tomto predlžovaní by sme museli vykonať prácu $W = K \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{3}\,\Delta x = 3Kx\,\Delta x$.

Obe situácie si musia byť ekvivalentné, čiže v oboch prípadoch musíme vykonať rovnakú prácu, teda

$$12kx\,\Delta x = 3Kx\,\Delta x.$$

Odtiaľ hľadaná tuhosť skeletu pri napínaní pozdĺž telesovej uhlopriečky je

$$K = 4k$$

a požadovaný podiel je 4,0.

29 Ako prvé je dôležité uvedomiť si, že moment zotrvačnosti telesa okolo osi prechádzajúcej ťažiskom nezávisí od natočenia telesa – ak by sme napríklad zobrali vrtuľu a otočil ju o radián v smere hodinových ručičiek, moment zotrvačnosti zostane rovnaký.

Po druhé je dobré si uvedomiť, že ak zlepíme dve telesá, ktoré zdieľajú os otáčania, moment zotrvačnosti výsledného telesa je len súčtom momentov zotrvačností oboch telies. Viac nám na riešenie netreba – stačí si všimnúť, že keď zoberieme kópiu pôvodnej vrtule s rovnakou osou otáčania a otočíme ju o $\frac{\pi}{3}$ radiánov, naše dve vrtule do seba presne zapadnú a vytvoria plný kruh s plošnou hustotou σ a polomerom R.

Jeho moment zotrvačnosti okolo kolmej osi prechádzajúcej ťažiskom je, ako napovie rýchly pohľad do fyzikálnych tabuliek,

$$I_{\text{disk}} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\pi R^4\sigma.$$

Hľadané riešenie je polovica z toho, teda

$$I = \frac{1}{2}I_{\text{disk}} = \frac{1}{4}\pi R^4\sigma.$$

Alebo ak chceme vyjadrené cez hmotnosť,

$$I = \frac{1}{2}mR^2,$$

čo je ekvivalentné momentu zotrvačnosti disku s rovnakou hmotnosťou a rovnakým polomerom. Tento výsledok by nás nemal prekvapiť, nakoľko vrtuľka má v každej vzdialenosti od osi otáčania presne polovicu hmoty oproti plnému disku dvojnásobnej hmotnosti, alebo teda presne rovnaké množstvo hmoty ako disk polovičnej hmotnosti. Pre číselné hodnoty zo zadania dostávame $I \approx 7.854\mathrm{e}-5\ \mathrm{kg\,m^2}$.

30 Vnútri váhy je pružina spojená so stupnicou. Hodnota na stupnici je priamo úmerná predĺženiu pružiny. Z prvého Sysľovho váženia vieme dve veci:

- po prvé, 5 mm výchylky pružiny zodpovedá 100 kg na stupnici,
- a po druhé, že v pokojovom stave (teda po ustálení hodnoty na stupnici) je Syseľ v rovnováhe síl, z čoho v kombinácii s Hookovým zákonom zisťujeme, že $kx_0 = mg$, kde k je tuhosť pružiny, $x_0 = 5$ mm je výchylka v pokojovom stave a m je Sysľova hmotnosť.

Čo sa však stane, keď Syseľ na váhu skočí? Pružinka sa na chvíľu poriadne stlačí, keďže musí absorbovať jeho náraz. V okamihu, keď je výchylka maximálna, bude jej (a teda aj Sysľova) rýchlosť nulová. Stačí nám teda porovnať potenciálne energie na začiatku skoku a pri maximálnom stlačení pružiny.

Zaveďme hladinu nulového potenciálu tak, aby nulová výchylka pružiny zodpovedala nulovej potenciálnej energii Sysľa. Potom na začiatku skoku platí $E_{P0} = mg \cdot 0{,}1$ m. V maximálnej výchylke musíme zarátať gravitačnú potenciálnu energiu aj potenciálnu energiu pružnosti pružinky, teda

$$E_{P1} = \frac{1}{2}kx^2 - mgx.$$

Tieto dve energie sa musia rovnať. Napíšme si teda rovnicu a rovno do nej dosaďme náš vzťah pre mg, ktorý sme si odvodili pri prvom vážení:

$$\frac{1}{2}kx^2 - kx_0x = kx_0 \cdot 0{,}1\ \text{m}.$$

Riešenie vzhľadom na x ukáže jeden kladný koreň $x \doteq 37$ mm. Z toho vidíme, že stupnica na váhe ukáže hodnotu 740 kg.

31 Napíšme si pohybové rovnice pre jojo. Pre translačný pohyb joja podľa druhého Newtonovho zákona platí

$$ma = mg - T,$$

kde T je ťahová sila, ktorou lanko pôsobí na jojo. Pre rotačný pohyb z druhej impulzovej vety vyplýva

$$J\varepsilon = T\frac{R}{3},$$

kde J je moment zotrvačnosti joja okolo ťažiska a ε je jeho uhlové zrýchlenie.[7] Medzi uhlovým zrýchlením ε a obyčajným translačným zrýchlením a je vzťah

$$a = \varepsilon\frac{R}{3}.$$

Vylúčením oboch zrýchlení dostávame pre ťahovú silu

$$T = \frac{Jmg}{J + m\left(\frac{R}{3}\right)^2}.$$

To, koľkokrát sa Simonovi zdá byť jojo ľahšie, je daný práve tým, koľkokrát mešou ťahovou silou ťahá lanko Simonovu ruku. Keď je jojo v pokoji, pôsobí na Simona silou $T_0 = mg$, takže padajúce jojo sa mu zdá byť

$$k = \frac{T}{T_0} = \frac{J}{J + m\left(\frac{R}{3}\right)^2}\text{-krát}$$

ľahšie.

Nech je hustota materiálu joja ρ. Nájdime si vyjadrenia pre moment zotrvačnosti a hmotnosť joja a dosaďme ich do nájdeného výrazu pre pomer ťahových síl. Pri hľadaní momentu zotrvačnosti joja využijeme poznatok, že moment zotrvačnosti disku, resp. valca je $J_\circ = \frac{1}{2}m_\circ r_\circ^2$ a to, že moment zotrvačnosti telesa je súčtom momentov zotrvačnosti jeho častí

$$J = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\pi R^2\frac{h}{3}\rho\right)R^2 + \frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\frac{h}{3}\rho\right)\left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{163}{486}\pi R^4 h\rho.$$

Hmotnosť joja je zase

$$m = 2\cdot\pi R^2\frac{h}{3}\rho + \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\frac{h}{3}\rho = \frac{19}{27}\pi R^2 h\rho.$$

Potom

$$k = \frac{\frac{163}{486}\pi R^4 h\rho}{\frac{163}{486}\pi R^4 h\rho + \frac{19}{27}\pi R^2 h\rho\cdot\frac{R^2}{9}} = \frac{163}{201} \doteq 0{,}81.$$

32 Zodpovedzme si najprv otázku, prečo by malo vo vodiči v magnetickom poli $(0,0,B)$, cez ktorý preteká prúd $(I,0,0)$, vôbec vznikať priečne napätie v smere osi y. Tesne po zapnutí prúdu cez vodič bude na voľné nosiče náboja, v tomto prípade elektróny, pôsobiť Lorentzova sila $\mathbf{F} = -e\left(-v,0,0\right)\times\left(0,0,B\right) = \left(0,-evB,0\right)$, kde v je rýchlosť elektrónov. Tie sa pohybujú proti smeru prúdu tak, ako hovorí konvencia. Nie je ťažké si domyslieť, že táto sila spôsobí pohyb elektrónov proti smeru y a tieto elektróny sa zachytia na hrane vodiča. To vytvorí vo vodiči priečne elektrické pole E v smere osi y a teda aj napätie $V_H = Eb$.

V ustálenom stave sa príspevky od elektrického poľa zachytených elektrónov a externého magnetického poľa k Lorentzovej sile pôsobiacej na prúdiace elektróny vykompenzujú. Inak povedané, bude platiť $-e\left(E - vB\right) =$

[7] Druhú impulzovú vetu možno písať buď vzhľadom na nejaký pevný bod, alebo vzhľadom na ťažisko. My sme zvolili druhý prípad. Potom treba použiť moment zotrvačnosti vzhľadom na zvolený bod.

0, čiže $E = vB$. Zostáva nám vyjadriť vzťah medzi prúdom a rýchlosťou elektrónov. Ten je však triviálne $I = (-e)\, nbc\, (-v)$, kde n je objemová hustota voľných elektrónov, pre ktorú platí $n = \frac{\rho N_A}{M_m(\mathrm{Au})}$. Spojením týchto vzťahov dostávame pre Hallovo napätie výraz

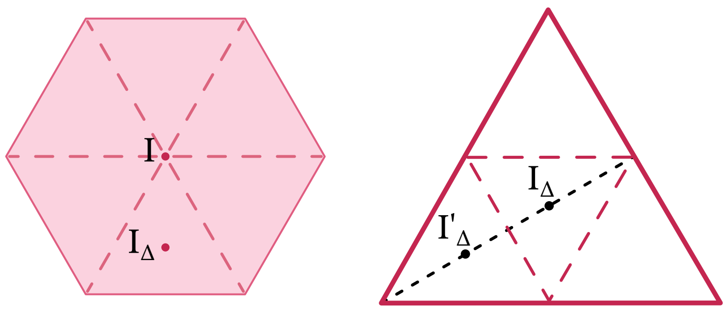
$$V_H = \frac{IBM_m\,(\mathrm{Au})}{ce\rho N_A}$$

a pre číselné hodnoty zo zadania $V_H = 2{,}12 \cdot 10^{-11}$ V.

33 Môžeme predpokladať, že všetka práca, ktorú Adam vynaložil, sa premenila na rotačnú kinetickú energiu špekáčika. Kinetickú energiu rotujúceho telesa vieme vyjadriť ako

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

kde I je moment zotrvačnosti daného telesa okolo osi, okolo ktorej toto teleso rotuje uhlovou rýchlosťou ω. Využijeme, že moment zotrvačnosti telesa je aditívny: môžeme ho teda počítať ako súčet momentov zotrvačnosti jeho častí okolo tej istej osi. Rozložme si teda špekáčik na šesť rovnakých častí s hmotnosťou $m' = m/6$ a podstavou v tvare rovnostranného trojuholníka s hranou dĺžky a.



Obrázok 33.1: *Rozklad špekáčika na trojboké hranoly a rozklad trojuholníka na podobné trojuholníky*

Teraz potrebujeme zistiť moment zotrvačnosti týchto častí okolo pôvodnej osi špekáčika. Na to vieme použiť Steinerovu vetu, ktorá nám hovorí, že ak poznáme moment zotrvačnosti I_T telesa s hmotnosťou M okolo osi prechádzajúcej cez jeho ťažisko, potom moment zotrvačnosti I' okolo rovnobežnej osi vzdialenej r bude

$$I' = I_T + Mr^2.$$

My ale chceme poznať moment zotrvačnosti našich šiestich častí okolo ražňa. Preto potrebujeme poznať ich moment zotrvačnosti okolo osi cez ich ťažisko, rovnobežnej s ražňom. Označme ho $I_\triangle$. Aby sme ho zistili, môžeme použiť rovnaký trik. Trojuholníkové kúsky si rozložíme na štyri menšie trojuholníkové kusy s rovnakým tvarom. Tieto budú mať pochopiteľne hmotnosť štvrtiny veľkého trojuholníkového kusu a dĺžka ich strany bude polovičná.

Všimnime si, že majú rovnaký tvar, len iné rozmery ako pôvodný trojuholníkový kus (konkrétne štvrtinovú hmotnosť a štvrtinovú druhú mocninu strany), preto si vieme ich moment zotrvačnosti okolo ich osi prechádzajúcej cez ich ťažisko ($I'_\triangle$) vyjadriť ako

$$I'_\triangle = \frac{1}{16} I_\triangle.$$

Vzdialenosť ťažiska vonkajších troch malých trojuholníkov od ťažiska veľkého trojuholníka bude rovná

$$\frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

čo vieme zistiť pomocou Pytagorovej vety a faktu, že ťažisko trojuholníka leží v dvoch tretinách dĺžky ťažnice od vrcholu trojuholníka.

Potom si vieme vyjadriť $I_\triangle$ ako

$$I_\triangle = \frac{1}{16}I_\triangle + 3\left(\frac{1}{16}I_\triangle + \frac{1}{4}m'\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\right),$$

odkiaľ

$$I_\triangle = \frac{1}{4}I_\triangle + \frac{3}{4}m'\frac{3}{36}a^2$$

a teda

$$I_\triangle = \frac{1}{12}m'a^2 = \frac{1}{72}ma^2.$$

Moment zotrvačnosti skúmanej údeniny si teda vieme vyjadriť ako

$$I = 6\left(\frac{1}{72}ma^2 + \frac{1}{6}m\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2\right) = \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{3}ma^2 = \frac{5}{12}ma^2.$$

A preto kinetická energia špekáčika ako aj práca potrebná na jeho roztočenie budú

$$W = E = \frac{5}{24}ma^2\omega^2.$$

Pre číselné hodnoty zo zadania to je $W \approx 3.29 \cdot 10^{-4}$ J.

34 Najprv sa zamyslime, ako by sme riešili klasickú zrážku hmotných bodov… no predsa pomocou zachovania energie a hybností! Tie môžeme samozrejme použiť aj teraz, keďže ide o elastické zrážky a na antény nepôsobí žiadna vonkajšia sila.

Pred aj po zrážke budú teda rýchlosti antén rovnako veľké a navzájom opačné. Označme si túto rýchlosť v. Avšak navyše budeme musieť siahnuť aj po zákone zachovania momentu hybnosti. Na anténu pôsobí jedine normálová sila od druhej antény, a tá má nulový moment okolo bodu dotyku. Preto sa aj celkový moment hybnosti sústavy okolo bodu dotyku zachová.

Naviac táto normálová sila pôsobí kolmo na tyče, a preto obe rýchlosti tyčí budú smerovať po tých istých priamkach ako pred zrážkou. Rovnako aj uhlové rýchlosti tyčí ω po zrážke budú rovnaké. Napíšme si teda zachovania energie

$$2\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{12}mL^2\omega^2\right)$$

a momentu hybnosti

$$2\left(\frac{L}{2}mv_0\right) = 2\left(\frac{L}{2}mv + \frac{1}{12}mL^2\omega\right).$$

Využili sme, že moment zotrvačnosti tyče okolo jej stredu je $I = \frac{1}{12}mL^2$. Presunieme prvý člen druhej strany oboch rovníc doľava, predelíme prvú rovnicu druhou a po chvíľke počítania zistíme, že

$$v = \frac{5}{7}v_0.$$

Čas potrebný na výmenu antén by bez zrážky bol

$$T_0 = \frac{d}{v_0}$$

a nový čas teda bude

$$T_1 = \frac{d}{2v_0} + \frac{d}{2v} = \frac{6}{5}T_0.$$

35 Označme si hľadaný odpor zapojenia $\mathfrak{R}$ a prizrime sa lepšie Marcelovmu obvodu. Všimnime si, že ho môžeme zostaviť z troch sériovo zapojených rezistorov a dvoch nekonečne veľkých blokov s odpormi $\mathfrak{R}$ paralelne pripojenými k prvému a tretiemu rezistoru. Pre výsledný odpor takéhoto zapojenia platí

$$\mathfrak{R} = 2 \cdot \frac{R \cdot \mathfrak{R}}{R + \mathfrak{R}} + R.$$

Po drobných úpravách dostávame kvadratickú rovnicu

$$\mathfrak{R}^2 - 2R\mathfrak{R} - R^2 = 0,$$

ktorej riešením je

$$\mathfrak{R} = R \pm \sqrt{2R^2}.$$

Odpor musí byť nezáporný, preto zoberieme riešenie so znamienkom „+“. Hľadaný odpor Marcelovho zapojenia je teda

$$\mathfrak{R} = \left(1 + \sqrt{2}\right) R \approx 2414\ \Omega.$$

36 Označme plochu panvice S a jej výšku h_0. To je zároveň aj vzdialenosť pokrievky odo dna. Kapacita prikrytej panvice je potom $C = \varepsilon_0 \frac{S}{h_0}$.

Po pripojení na zdroj napätia U sa na pokrievke a na dne panvice nahromadí náboj veľkosti $Q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{h_0}$. Nabitá platňa okolo seba vytvára elektrické pole s intenzitou $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$,[8] teda dno panvice vytvára vo svojom okolí elektrické pole s intenzitou $E = \frac{U}{2h_0}$.

Pokrievka je nabitá presne opačným nábojom než dno panvice, preto na ňu pôsobí príťažlivá elektrostatická sila, ktorá posunie pokrievku do vzdialenosti $h < h_0$ odo dna. Ak v mieste pokrievky vytvára dno elektrické pole s intenzitou E, veľkosť tejto elektrostatickej sily je

$$F = QE = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2h^2}.$$

Tým, že je vzduch vo vnútri panvice hermeticky uzavrený, je pokrievkou stláčaný, čo spôsobuje nárast tlaku vo vnútri panvice o $\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2}$. Stláčanie vzduchu započalo okamžite po zopnutí spínača a trvalo zlomok

[8] Dá sa to ukázať použitím Gaussovho zákona.

sekundy, takže ho možno považovať za adiabatické. V takom prípade možno písať

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} \text{a}$$

$$p_0 V_0^{\varkappa} = pV^{\varkappa}.$$

$$\text{kde} p_0 = p_a,$$

$$V_0 = Sh_0,$$

$$p = p_a + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2} \text{a}$$

$$V = Sh.$$

Vylúčením objemu pre hľadanú zmenu teploty dostávame

$$\Delta T = T - T_0 = \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2 p_a} \right) - 1 \right] T_0.$$

Tu narážame na problém. Vo výraze pre zmenu teploty nám vystupuje neznáma vzdialenosť h. Tú možno určiť z rovnice adiabaty

$$p_a h_0^{\varkappa} = p_a h^{\varkappa} + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2} h^{\varkappa - 2}.$$

Problémom je, že takúto rovnicu nevieme riešiť analyticky. Využime však to, že zadanie nám hovorí, že posunutie pokrievky je len mikroskopické, preto dosaďme za $h = h_0 - \Delta h$ a využime priblíženie $(1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$ platné pre malé x. Postupnými úpravami dostaneme

$$p_a h_0^{\varkappa} = p_a (h_0 - \Delta h)^{\varkappa} + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2} (h_0 - \Delta h)^{\varkappa - 2} =$$

$$= p_a h_0^{\varkappa} \left(1 - \frac{\Delta h}{h_0} \right)^{\varkappa} + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2} h_0^{\varkappa - 2} \left(1 - \frac{\Delta h}{h_0} \right)^{\varkappa - 2} \approx$$

$$\approx p_a h_0^{\varkappa} \left(1 - \varkappa \frac{\Delta h}{h_0} \right) + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2} h_0^{\varkappa - 2} \left(1 - (\varkappa - 2) \frac{\Delta h}{h_0} \right);$$

$$0 \approx -\varkappa p_a h_0^{\varkappa - 1} \Delta h + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2} h_0^{\varkappa - 2} - (\varkappa - 2) \frac{\varepsilon_0 U^2}{2} h_0^{\varkappa - 3} \Delta h;$$

$$\Delta h \approx \frac{\varepsilon_0 U^2 h_0}{2\varkappa p_a h_0^2 + (\varkappa - 2) \varepsilon_0 U^2}.$$

Dosadením číselných hodnôt ľahko overíme, že $\Delta h \sim 10^{-15}$ m $\ll h_0$, takže možno uvažovať $h \approx h_0$. V takom prípade

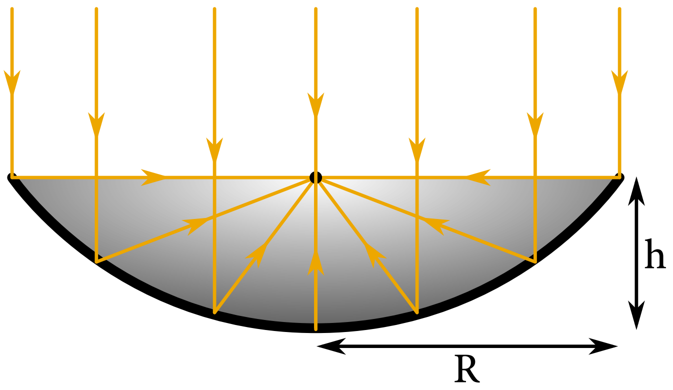
$$\Delta T \approx \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h_0^2 p_a} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - 1 \right] T_0.$$

V tejto chvíli sa zdá, že máme vyhraté, no netešme sa predčasne. Keď sa pokúsime nahádzať výraz do kalkulačky, dostaneme $\Delta T = 0$. Problém je, že výraz $\frac{\varepsilon_0 U^2}{2h_0^2}$ je zrejme ďaleko menší než 1, a teda hľadaný nárast teploty sa stratí v zaokrúhľovacích chybách. Čo s tým? Použijeme rovnaký trik ako pred chvíľou a dostaneme

$$\Delta T \approx \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h_0^2 p_a} T_0.$$

Po vyčíslení $\Delta T \approx 2.3 \cdot 10^{-12}$ °C.

37 V prvom rade potrebujeme určiť geometriu paraboloidu. Najprv z úlohy vylúčme uhlový rozmer – paraboloid je rotačné teleso a teda v tomto smere sa nemôže diať nič zaujímavé. Zaveďme si súradnicovú sústavu tak, aby os y bola totožná s osou symetrie a aby vrchol paraboloidu ležal na osi x, a pozrime sa na rez rovinou $z = 0$:



Parabolu na reze môžeme všeobecne popísať rovnicou $y = \alpha x^2$ pre nejaké $\alpha > 0$. Okrem vrcholu poznáme súradnice bodu na okraji, kde musí platiť

$$h = \alpha R^2,$$

odkiaľ vieme, že

$$\alpha = \frac{h}{R^2} = \frac{0{,}5\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}^2} = 0{,}5/\mathrm{m}.$$

Teraz potrebujeme nájsť ohnisko paraboly. Tu môžeme využiť viacero vlastností paraboly – napríklad tú, že všetky lúče rovnobežné s osou musia po jednom odraze prejsť práve cez ohnisko. Lúč, ktorý sa odrazí práve pod uhlom 45°, bude po odraze rovnobežný s osou x. Derivovaním alebo inou metódou zistíme, že toto nastane práve pri odraze vo výške 0,5 m, teda pri samom okraji zrkadla. Ohnisko paraboly sa teda bude nachádzať vo vzdialenosti 0,5 m od vrchola.

A teraz fyzikálna časť úlohy. Ak si neuvedomíme, že Slnko nie je bodový zdroj, mohli by sme si myslieť, že paraboloid nám všetky lúče sústredí do ľubovoľne malej plôšky, a teda stačí porovnať pomer plôch zrkadla a telieska. Takéto riešenie však nie je fyzikálne možné: Slnko bodovým zdrojom nie je, a navyše výpočet ľahko ukáže, že výsledná teplota by bola omnoho vyššia, ako povrchová teplota Slnka, čím by sme porušili zákony termodynamiky.

Zamyslime sa, čo „vidí“ teliesko pri pohľade do zrkadla, ak je namierené na Slnko. V každom bode zrkadla sa bude odrážať časť povrchu Slnka s efektívnou teplotou $T_\odot = 5777$ K. Teliesko teda „vidí“ žeravý slnečný povrch v priestorovom uhle 2π, čiže polovici celého priestoru 4π. Ak zanedbáme absorpciu žiarenia v atmosfére, je to úplne to isté, ako keby sme teliesko položili priamo k povrchu Slnka.[9]

Aká bude rovnovážna teplota? Tú môžeme spočítať zo Stefan-Boltzmannovho zákona: ak by teliesko „videlo“ Slnko vo všetkých smeroch (priestorovom uhle 4π), jeho rovnovážna teplota by musela byť rovnaká, ako

[9]Slnko tu považujeme za guľu s dobre definovaným povrchom. Nie je to pravda, ale pre účely tejto úlohy na tom nezáleží.

teplota Slnka. V našej situácii žiarením prijíma iba polovicu tohoto výkonu, vyžaruje však stále celým svojím povrchom.

Podľa Stefan–Boltzmannovho zákona teda na jednotku plochy prijíma $\sigma T_\odot^4$ žiarivého výkonu, vyžaruje však z oboch strán až $2\sigma T^4$. V rovnovážnom stave teda

$$\sigma T_\odot^4 \stackrel{!}{=} 2\sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{T_\odot^4}{2}\right)^{1/4} \doteq 4860\ \mathrm{K}.$$

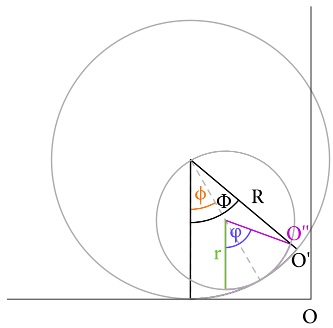
Pre poriadok...

...ešte musíme overiť, či je teliesko naozaj menšie, ako plocha, do ktorej sa svetlo koncentruje. Bez zložitého kreslenia môžeme overiť, že uhlová veľkosť telieska od vrchola paraboloidu je aspoň o rád menšia, ako uhlový rozmer Slnka. Lúč, ktorý prichádza z mierne iného smeru, ako je os paraboloidu, sa aj odrazí smerom rádovo rovnako odlišným od smeru ideálneho lúča. V každom bode telieska bude platiť, že naň dopadá žiarenie z celej plochy zrkadla.

Pre úplný poriadok...

...by sme mali ešte započítať malú časť výkonu, ktorú teliesko dostáva od Slnka priamo, bez odrazu od zrkadla. Tá je však oproti výkonu odrazenému od zrkadla zanedbateľná a spôsobí zmenu výsledku iba o asi 0,026 K.

$\boxed{38}$ Uvažujme sféru s polomerom R a hmotnosťou M a v nej voľne sa pohybujúcu guľu s polomerom r a hmotnosťou m. Na popísanie pohybu takejto mechanickej sústavy je nevyhnutné zvoliť si správnu parametrizáciu.



Obrázok 38.1: *Parametrizácia melóna*

Počiatok súradnicovej sústavy položme do bodu, v ktorom sa sféra dotýka podložky v nevychýlenom stave. Potom vychýlenie sféry možno popísať uhlom Φ, ktorý zviera spojnica jej stredu a bodu, ktorý sa v nevychýlenom stave dotýkal podložky, so zvislým smerom. Ako kladný smer budeme považovať smer proti chodu hodinových ručičiek. Potom pre súradnice ťažiska sféry v závislosti na uhle Φ platí

$$X = -R\Phi;$$

$$Y = R.$$

S popisom polohy gule je to zložitejšie. Núkajú sa nám dve možnosti. Tou jednoduchšou je popísať polohu gule vzhľadom na sféru – konkrétne môžeme zaviesť uhol ϕ, ktorý zviera spojnica stredu sféry a bodu dotyku gule a sféry so zvislým smerom. Táto voľba je priamočiara, ale daňou za to je, že uhol ϕ sa viaže na sféru, a teda by sme príslušné pohybové rovnice pre guľu museli formulovať v neinerciálnej sústave, čo spravidla býva značne komplikované.

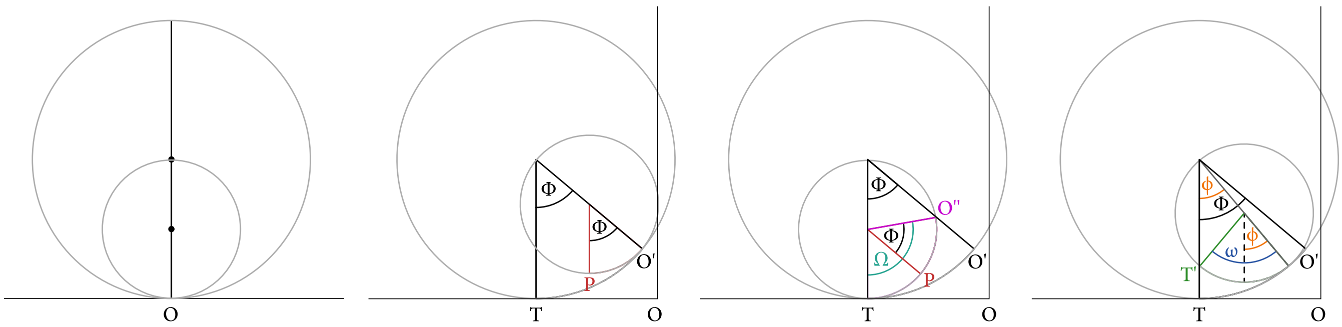
Druhou možnosťou je popísať polohu gule pomocou jej natočenia φ v laboratórnej sústave. Vďaka tomu by sme si uľahčili písanie pohybových rovníc, no na druhej strane je takáto parametrizácia ťažko čitateľná a priradiť nejaký uhol konkrétnej polohe je značne náročné.

Tento problém vyriešime priam šalamúnsky: budeme používať parametrizáciu uhlom ϕ, ale rovnice budeme napriek tomu formulovať v inerciálnej sústave, pričom tam, kde to bude treba, si pomôžeme uhlom φ. V takejto parametrizácii sú súradnice ťažiska gule vyjadrené ako[10]

$$x = -R\Phi + (R - r)\sin\phi;$$

$$y = R - (R - r)\cos\phi.$$

To však nevyhnutne znamená, že v istom momente budeme potrebovať nájsť prevod medzi uhlami ϕ a φ. Tak načo s tým zbytočne otáľať? Urobme to hneď!



Obrázok 38.2: *Odvodenie vzťahu medzi uhlami*

Tento prevod nájdeme v troch krokoch. Začnime so sústavou v nevychýlenom stave, t.,j. v stave, kedy všetky tri uhly sú nulové,[11] a preveďme ju postupne do stavu $[\Phi;\phi]$, pričom budeme sledovať, ako to ovplyvní natočenie gule v laboratórnej sústave φ. Guľa sa dotýka sféry a sféra podložky v počiatku súradnicovej sústavy O.

Teraz odgúľajme sféru o uhol Φ v kladnom smere (t.,j. doľava), pričom guľu držme akoby prilepenú k sfére. Ich vzájomný bod dotyku označme na sfére ako O′ a na guli ako O″. Najnižší bod gule zase označme ako P. V takom prípade sa obe, sféra i guľa, otočia zhodne o uhol Φ.

V druhom kroku odgúľajme guľu po vnútri sféry do jej najnižšieho bodu. Podmienka neprešmykovania hovorí, že dĺžka oblúku na sfére medzi bodmi O′ a novým bodom dotyku T a dĺžka oblúku na guli medzi bodmi O″ a bodom dotyku musia byť rovnaké. Oblúku na sfére zodpovedá uhol Φ. Nech Ω je uhol zodpovedajúci oblúku na guli. Potom zrejme platí $R\Phi = r\Omega$, odkiaľ $\Omega = \frac{R}{r}\Phi$. Lenže nás nezaujíma uhol Ω zodpovedajúci oblúku na guli, ale pootočenie gule v laboratórnej sústave.[12] Na to nahliadneme tak, že sa pozrieme, do akej polohy sa pri tomto odvaľovaní dostal niekdajší najnižší bod gule P, ktorého pôvodné natočenie bolo 0. Z obrázka je zrejmé, že je rovný $\Omega - \Phi$, preto pootočenie gule pri jej odvaľovaní do najnižšej polohy je $\left(\frac{R}{r} - 1\right)\Phi$.

[10]poloha stredu sféry plus poloha gule vzhľadom na stred sféry

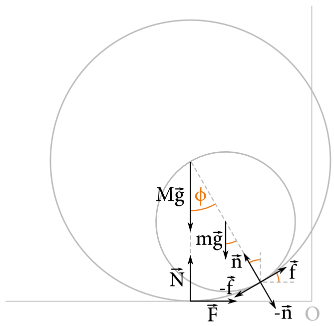
[11]Zadanie síce hovorí, že guľa je vychýlená o uhol α, ale to nám teraz neprekáža. To sa ošetrí na záver počiatočnými podmienkami pri riešení nájdených diferenciálnych rovníc.

[12]To sa líši od Ω, pretože guľa sa odvaľuje po zakrivenom povrchu a nie po rovine.

Posledným krokom je odvalenie gule po sfére do polohy ϕ. Označme si pôvodný bod dotyku gule so sférou ako T′. Potom dĺžka oblúku na sfére medzi bodom T a novým bodom dotyku gule a sféry musí byť rovnaká ako dĺžka oblúka na guli medzi bodom T′ a novým bodom dotyku. Uhol zodpovedajúci oblúku na sfére je ϕ. Ak si označíme uhol zodpovedajúci oblúku na guli ako ω, tak zrejme platí $R\phi = r\omega$, odkiaľ $\omega = \frac{R}{r}\phi$. Nás ale opäť nezaujíma priamo uhol ω, ale pootočenie gule, ktoré je v tomto prípade dané uhlovým odklonom niekdajšieho najnižšieho bodu gule T′ od zvislého smeru, a to je rovné $\phi - \omega$, teda pootočenie gule v laboratórnej sústave zodpovedajúce jej odvaleniu do polohy ϕ je $\left(1 - \frac{R}{r}\right)\phi$.

Konečene dajme dokopy všetky tri pootočenia gule z jednotlivých krokov a dostaneme celkové natočenie gule v laboratórnej sústave

$$\varphi = \Phi + \left(\frac{R}{r} - 1\right)\Phi + \left(1 - \frac{R}{r}\right)\phi = \frac{R}{r}\Phi - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\phi.$$



Obrázok 38.3: *Sily pôsobiace na melón*

V tomto momente máme to najťažšie za sebou a od teraz to bude už len viac-menej priamočiare uplatnenie fyzikálnych zákonov. Začnime tým, že si vyznačíme, aké sily v našej mechanickej sústave pôsobia. Na guľu sú to tiažová sila $m\mathbf{g}$, normálová sila od sféry $\mathbf{n}$ a trecia sila $\mathbf{f}$. Na sféru sú to zase tiažová sila $M\mathbf{g}$, normálová a trecia sila od podložky $\mathbf{N}$ a $\mathbf{F}$ a normálová a trecia sila od gule $-\mathbf{n}$ a $-\mathbf{f}$. Jednotlivé sily si rozpíšeme po zložkách:

$$m\mathbf{g} = (0; -mg)\,; \qquad M\mathbf{g} = (0; -Mg)\,;$$

$$\mathbf{n} = (-n\sin\phi; n\cos\phi)\,; \qquad \mathbf{N} = (0; N)\,;$$

$$\mathbf{f} = (f\cos\phi; f\sin\phi)\,; \qquad \mathbf{F} = (F; 0)\,.$$

Teraz už možno podľa druhého Newtonovho zákona postupne písať:[13]

$$m\ddot{x} = f\cos\phi - n\sin\phi;$$

$$m\ddot{y} = -mg + f\sin\phi + n\cos\phi;$$

$$M\ddot{X} = F - f\cos\phi + n\sin\phi;$$

$$M\ddot{Y} = -Mg + N + f\sin\phi - n\cos\phi.$$

[13]Dve bodky nad premennou značia jej druhú časovú deriváciu (v našom prípade zrýchlenie).

Za zrýchlenia na ľavej strane možno dosadiť príslušné výrazy získané dvojnásobným zderivovaním podľa času vzťahov pre závislosť súradníc na uhloch. Dostaneme

$$m\left[-R\ddot{\Phi}+(R-r)\cos\phi\ddot{\phi}-(R-r)\sin\phi\dot{\phi}^2\right]=f\cos\phi-n\sin\phi;$$

$$m\left[(R-r)\sin\phi\ddot{\phi}+(R-r)\cos\phi\dot{\phi}^2\right]=-mg+f\sin\phi+n\cos\phi;$$

$$-MR\ddot{\Phi}=F-f\cos\phi+n\sin\phi;$$

$$0=-Mg+N+f\sin\phi-n\cos\phi.$$

Ak budeme uvažovať iba malé kmity, tak uhly, rýchlosti a zrýchlenia budú malé. Potom možno uvedené rovnice aproximovať do prvého rádu, čím nadobudnú nasledovný tvar:

$$m\left[-R\ddot{\Phi}+(R-r)\,\ddot{\phi}\right]\approx f-n\phi;$$

$$0\approx -mg+f\phi+n;$$

$$-MR\ddot{\Phi}\approx F-f+n\phi;$$

$$0\approx -Mg+N+f\phi-n.$$

Z prvej rovnice dostávame

$$f\approx n\phi+m\left[-R\ddot{\Phi}+(R-r)\,\ddot{\phi}\right].$$

Keďže všetky členy na pravej strane sú malé prvého rádu, tak aj f samotné bude malé prvého rádu, preto člen $f\phi$ v druhej a štvrtej rovnici bude malý druhého rádu a možno ho zanedbať. Potom z druhej rovnice dostávame

$$n\approx mg.$$

Tretia a štvrtá rovnica nám umožnia dopočítať treciu a normálovú silu od podložky, čo nám napríklad umožňuje overiť podmienku neprešmykovania. To ale z dôvodu úspory miesta nebudeme robiť. Užitočnou informáciou však je, že podľa štvrtej rovnice s prihliadnutím na malosť druhého rádu výrazu $f\phi$ dostávame

$$Mg-N+n=0.$$

Stále nám chýbajú dve rovnice, nakoľko aktuálne máme sústavu štyroch rovníc o šiestich neznámych. Tu nám na pomoc prichádza druhá impulzová veta, podľa ktorej sa časová zmena momentu hybnosti rovná výslednému momentu síl. Nájdime si preto momenty hybností gule a sféry a momenty pôsobiacich síl. Všetky momenty budeme písať vzhľadom na pevný počiatok súradnicovej sústavy. Vzhľadom na to, že uvažujeme rovinný pohyb, nás budú zaujímať len ich z-ové zložky, t.j. zložky vyskakujúce z papiera.

Začnime s momentmi hybnosti. Tie vypočítame ako súčet momentu hybnosti za rotáciu okolo ťažiska a príspevku za pohyb ťažiska vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy, čiže

$$L_z=J\omega+(\mathbf{r}\times\mathbf{p})_z,$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, ω je uhlová rýchlosť rotácie, $\mathbf{r}$ je polohový vektor ťažiska telesa a $\mathbf{p}$ je jeho hybnosť. Dolný index značí, že uvažujeme len z-ovú zložku. Pre sféru dostávame

$$L_z=J\dot{\Phi}+(-R)\left(-MR\dot{\Phi}\right)=\left(J+MR^2\right)\dot{\Phi},$$

kde $J = \frac{2}{3}MR^2$ je moment zotrvačnosti sféry. Pre guľu zase máme

$$l_z = j\dot{\varphi} + \left[-R\Phi + (R-r)\sin\phi\right] m\,(R-r)\sin\phi\dot{\phi} - \left[R - (R-r)\cos\phi\right] m\left[-R\dot{\Phi} + (R-r)\cos\phi\dot{\phi}\right].$$

Tu využijeme prevod medzi uhlami φ a ϕ, ktorý sme si odvodili na začiatku a rovnicu aproximujeme do druhého rádu.[14] Dostaneme

$$l_z \approx j\left[\frac{R}{r}\dot{\Phi} - \left(\frac{R}{r}-1\right)\dot{\phi}\right] + mrR\dot{\Phi} - mr\,(R-r)\,\dot{\phi} = \left(\frac{R}{r} + mrR\right)\dot{\Phi} - \left[\left(\frac{R}{r}-1\right)j + mr\,(R-r)\right]\dot{\phi},$$

kde $j = \frac{2}{5}mr^2$ je moment zotrvačnosti gule.

Teraz nájdime výsledné momenty síl. Na sféru pôsobí moment sily

$$M_z = (-R\Phi)\,(N - Mg) + (-R\Phi + R\sin\phi)\,(-f\sin\phi - n\cos\phi) - (R - R\cos\phi)\,(-f\cos\phi + n\sin\phi)\,,$$

čo v priblížení do prvého rádu dáva

$$M_z \approx R\,(Mg - N)\,\Phi + Rn\Phi - Rn\phi = R\,\underbrace{(Mg - N + n)}_{0}\,\Phi - Rn\phi = -mgR\phi.$$

Na guľu pôsobí zase moment

$$m_z = \left[-R\Phi + (R-r)\sin\phi\right](-mg) + (-R\Phi + R\sin\phi)\,(f\sin\phi + n\cos\phi) - (R - R\cos\phi)\,(f\cos\phi - n\sin\phi)$$

a v priblížení do prvého rádu

$$m_z \approx mgR\Phi - mg\,(R-r)\,\phi - Rn\Phi + Rn\phi = R\,\underbrace{(mg-n)}_{0}\,\Phi + \left[R\,\underbrace{(n-mg)}_{0} + mgr\right]\phi = mgr\phi.$$

Konečne môžeme napísať príslušné pohybové rovnice podľa druhej vety impulzovej

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z \quad\Rightarrow\quad \left(J + MR^2\right)\ddot{\Phi} \approx -mgR\phi;$$

$$\frac{\mathrm{d}l_z}{\mathrm{d}t} = m_z \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{R}{r} + mrR\right)\ddot{\Phi} - \left[\left(\frac{R}{r}-1\right)j + mr\,(R-r)\right]\ddot{\phi} \approx mgr\phi.$$

Dostali sme dvojicu previazaných lineárnych diferenciálnych rovníc, ktoré však nie je problém vyriešiť. Vylúčením $\ddot{\Phi}$ z rovníc dostaneme

$$\left[\left(\frac{R}{r}-1\right)j + mr\,(R-r)\right]\ddot{\phi} + mg\left[\frac{\left(\frac{R}{r}j + mrR\right)R}{J + MR^2} + r\right]\phi = 0,$$

ktorú vieme prepísať do tvaru $\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$, čo je rovnica lineárneho harmonického oscilátora. Po siahodlhých úpravách možno nájsť

$$\omega^2 = \frac{mg}{R-r}\left(\frac{j + mr^2}{J + MR^2}R^2 + \frac{J + MR^2}{j + mr^2}r^2\right).$$

[14] Aproximácia do prvého rádu tentokrát nestačí, pretože príslušný výraz budeme raz derivovať, čím sa zníži jeden rád malosti.

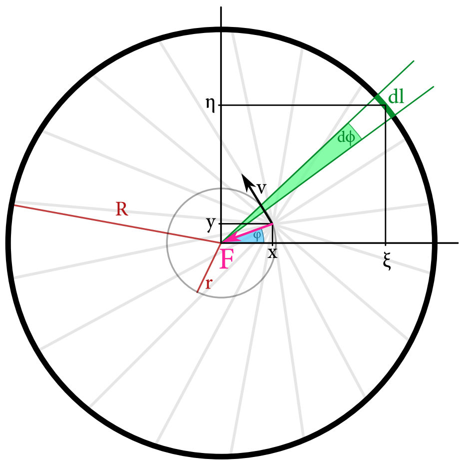
Využijúc vzťahy medzi veličinami dostávame $\omega^2 = \frac{67}{35}\frac{g}{r}$, čo vedie na periódu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{35}{67}\frac{r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{35}{134}\frac{R}{g}} \doteq 0{,}397\ \mathrm{s}.$$

Na záver ešte poznamenajme, že z rovníc vyplýva, že $\ddot{\Phi} \propto \ddot{\phi}$. To znamená, že aj uhol Φ sa bude meniť harmonicky s presne rovnakou periódou. Odlišná bude len amplitúda.

Samozrejme, mohli by sme dopočítať presný predpis časového vývoja jednotlivých uhlov, ale toto potešenie si odpustíme. Jednak sa nás na to zadanie nepýta, no a dvak nepriniesIo by to nič zaujímavé. Koniec koncov, aj tak sú to len sínusovky a kosínusovky.

39 Zaveďme si kartézsku súradnicovú sústavu s počiatkom v strede obruče. Uvažujme žiarovku vychýlenú v polohe $[x; y]$ a nájdime si potenciálnu energiu uloženú v pružinkách. Vzhľadom na geometriu problému bude jednoduchšie riešiť ho v polárnych súradniciach.



Obrázok 39.1: *Geometrická analýza problému*

Uvažujme pružinky spájajúce žiarovku s elementom obruče dĺžky $\mathrm{d}l$ so súradnicami $[\xi; \eta]$. Na tento element je upnutých

$$\mathrm{d}N = N\frac{\mathrm{d}l}{2\pi R} = N\frac{R\,\mathrm{d}\phi}{2\pi R} = \frac{N}{2\pi}\,\mathrm{d}\phi$$

pružiniek.

Nech je element dostatočne malý. Potom sa javí ako rovinný a všetky pružinky naň upnuté sú prakticky rovnobežné. Tým pádom je efektívna tuhosť týchto pružiniek

$$K = k\,\mathrm{d}N = \frac{Nk}{2\pi}\,\mathrm{d}\phi$$

a ich príspevok k potenciálnej energii je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= \frac{1}{2}\frac{Nk}{2\pi}\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right]\mathrm{d}\phi = \\
&= \frac{Nk}{4\pi}\left[(R\cos\phi - r\cos\varphi)^2 + (R\sin\phi - r\sin\varphi)^2\right]\mathrm{d}\phi = \\
&= \frac{Nk}{4\pi}\left[R^2 + r^2 - 2Rr\left(\cos\phi\cos\varphi + \sin\phi\sin\varphi\right)\right]\mathrm{d}\phi = \\
&= \frac{Nk}{4\pi}\left[R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\phi - \varphi\right)\right]\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}
$$

Teraz potrebujeme sčítať príspevky od všetkých pružiniek. Ak uvážime, že pružiniek je dostatočne veľa, nedopustíme sa veľkej chyby, keď ich budeme považovať za spojito rozložené. Potom celková potenciálna energia je

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^{2\pi} \frac{Nk}{4\pi}\left[R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\phi - \varphi\right)\right]\mathrm{d}\phi = \\
&= \frac{Nk}{4\pi}\left(R^2 + r^2\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi - \frac{NkRr}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\phi - \varphi\right)\mathrm{d}\phi = \\
&= \frac{1}{2}Nk\left(R^2 + r^2\right).
\end{aligned}
$$

Druhý integrál je rovný nule, pretože integrujeme funkciu kosínus cez jednu celú periódu.

Nás by ale viac zaujímalo, akou silou pôsobia pružinky na žiarovku. Vieme, že sila je mínus gradientom potenciálnej energie. V polárnych súradniciach ju vypočítame ako

$$
\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial r};\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) = \left(-Nkr; 0\right).
$$

Okamžite vidíme, že sila pôsobí vždy proti vychýleniu do stredu, teda je dostredivou silou. Pre veľkosť dostredivej sily platí

$$
F_{\mathrm{dostr}} = m\frac{v^2}{r}.
$$

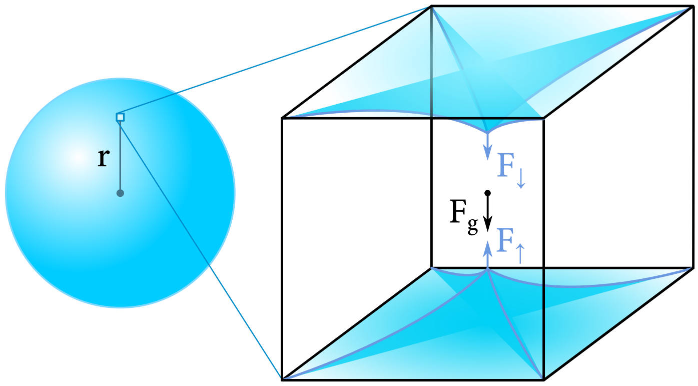
Z rovnosti síl dostávame

$$
Nkr = m\frac{v^2}{r} \quad\Rightarrow\quad v = r\sqrt{\frac{Nk}{m}}.
$$

Pre číselné hodnoty zo zadania $v = 0{,}5\ \mathrm{m/s}$.

40 Pozrime sa na malý element vody v tvare kvádra s plochou podstavy ΔS a výškou Δh, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti r od stredu (pozri 40.1). Pôsobia naň tri sily:

- tiažová sila F_g od zvyšku vody o veľkosti $\rho \cdot \Delta h \cdot \Delta S \cdot g$ smerujúca do stredu planéty,
- hydrostatická tlaková sila $F_\downarrow$ stĺpca nad ním, o veľkosti $p_\downarrow \cdot \Delta S$, taktiež smerujúca do stredu,
- a hydrostatická tlaková sila $F_\uparrow$ o veľkosti $p_\uparrow \cdot \Delta S$, smerujúca od stredu planéty.



Obrázok 40.1: *Sily pôsobiace na malý element vody vo vzdialenosti r od stredu planéty*

Výsledná sila má teda veľkosť

$$F = p_\uparrow \Delta S - p_\downarrow \Delta S - \rho \Delta h \Delta S g.$$

v smere rastúceho r, čiže od stredu planéty.

V stave hydrostatickej rovnováhy sa náš element nesmie hýbať, a teda výsledná sila musí byť nulová. Po vykrátení plochy podstavy elementu ΔS preto môžeme písať

$$0 = p_\uparrow - p_\downarrow - \rho g \Delta h \quad \Rightarrow \quad p_\uparrow - p_\downarrow = \rho g \Delta h. \tag{40.1}$$

Plocha ΔS je nenulová, takže ňou môžeme obe strany rovnice vydeliť. Rovnica 40.1 musí platiť v ľubovoľne malom objeme, takže ju môžeme prepísať do diferenciálneho tvaru

$$\mathrm{d}p = -\rho g \, \mathrm{d}h.$$

alebo v našom sféricky symetrickom prípade rovno

$$\mathrm{d}p = -\rho g \, \mathrm{d}r. \tag{40.2}$$

Z rovnice vidieť, že tlak smerom do stredu rastie, a teda 100 kPa v strede planéty je maximálna možná hodnota. Pri takýchto hodnotách tlaku môžeme hustotu vody považovať za konštantnú. Veľkosť tiažového zrýchlenia g konštantná nie je, závisí však iba od r. Ostáva nám teda určiť priebeh $g(r)$. To je celkom jednoduché, pretože stačí uvažovať časť hmoty, ktorá je k ťažisku bližšie ako r.[15] Označme si $m(r)$ hmotnosť časti planéty, ktorá je k ťažisku bližšie, ako r. Pre tiažové zrýchlenie potom bude platiť

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} = \frac{G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{4G\pi\rho r}{3}. \tag{40.3}$$

[15] Vyplýva to z Gaussovho zákona pre gravitačné pole.

Ostáva nám to zintegrovať od povrchu až po stred planéty. Okrajová podmienka na povrchu ($r = R$) je zjavne $p(R) = 0$, takže budeme počítať

$$p(0) = p(R) - \int_R^0 \rho g(r)\,\mathrm{d}r,$$

$$p(0) = 0 + \frac{4}{3}\pi G\rho^2 \int_0^R r\,\mathrm{d}r,$$

$$p(0) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

Odtiaľ už iba vyjadríme R a dosadíme za p a dostávame výsledok

$$R = \sqrt{\frac{3p}{2\pi G\rho^2}} \doteq 26\,755\ \mathrm{m} \doteq 27\ \mathrm{km}.$$

Výsledky

1 $-\frac{4}{9}\omega \doteq -0{,}44$

2 $1{,}06 \cdot 10^{-24}$ N

3 $T_{\text{min}} = T_{\text{max}} = 60$ °C

4 1,5 m

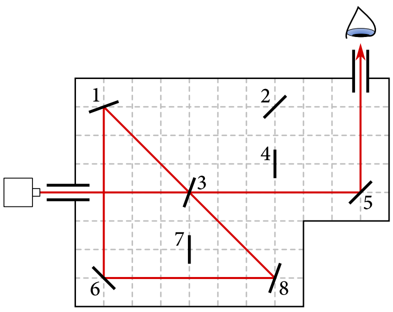
5 $\frac{5}{6}$ ugh $\doteq$ 0,83 ugh

6 0,6 mm

7 90 km

8 $\dfrac{1}{6} \doteq 16{,}7\%$

9 67,5°



10 18 km/h

11 341,14 mm

12 $\dfrac{11}{168}a\rho \doteq 65{,}5\ \mathrm{kg/m^2}$

13 $\left[0, \dfrac{R}{2}\right]$, resp. $\frac{R}{2} = 500\ \Omega$

14 $\approx 8{,}87$ m/s

15 $\dfrac{R}{v}\left(5 - 3\sqrt{2}\right) = \dfrac{R}{v}\dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 2{,}5$ min

16 0 J

17 Diódy 1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14 a 15.

18 $\sqrt{gd} \approx 6{,}26\ \mathrm{m/s}$

19 83

20 $\pi\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \doteq 52{,}72°$, resp. $307{,}28°$. *Uznávajte ľubovoľný z výsledkov.*

21 $\frac{3-\sqrt{3}}{4} \doteq 31{,}7\%$

22 $\sqrt{\frac{2d}{a\cos\varphi}} = 20\ \mathrm{s}$

23 2,38 m. *Uznajte aj výsledky v rozpätí 2,35 – 2,41 m.*

24 $16\pi\ \mathrm{rad/s} \doteq 50{,}3\ \mathrm{rad/s}$

25 20 199 km

26 492700 rokov, *uznajte výsledky líšiace sa o menej ako 5730 rokov.*

27 15,9 cm

28 $4k$; resp. hľadaný podiel je 4,0

29 $\frac{1}{2}\pi R^4\sigma \approx 7.854 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2}$

30 740 kg

31 $\frac{163}{201} \doteq 0{,}81$

32 $V_H = \frac{IBM_m(\mathrm{Au})}{ce\rho N_A} \approx 2{,}12 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{V}$

33 $\frac{5}{24}ma^2\omega^2 \approx 3.29 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$

34 $\frac{6}{5} = 1{,}2$

35 $\left(1+\sqrt{2}\right)R \approx 2414\ \Omega$

36 $2.3 \cdot 10^{-12}\ °\mathrm{C}$

37 4860 K

38 $2\pi\sqrt{\frac{35}{134}\frac{R}{g}} \approx 0{,}397\ \mathrm{s}$

39 $r\sqrt{\dfrac{Nk}{m}} = 0{,}5\ \mathrm{m/s}$

40 27 km